UC-NRLF
B 2 958 220

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

NOV 13 '35

Digitized by Google

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

10. BAND 1. HEFT

MIT 10 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 2. JANUAR 1906.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☞ Generalregister zum Archiv der Mathematik und Physik, II. Reihe, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit einem Bildnis und Biographie R. Hoppes. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. 1901. geh. n. Mk. 6.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigkirchstraße 6[I]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Archivs umfaßt 34 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Von **J. Horn** in Clausthal	1
Die Tantallampe der Firma Siemens & Halske A. G. Von **E. Budde** in Berlin. Mit 3 Figuren im Text	9
Raumkurven und Liniengeometrie. Von **Paul Epstein** in Straßburg i. E.	16
Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen. Von **Albert Fleck** in Berlin	23
Sur l'équation différentielle de Monge; Par **M. W. Kapteyn** à Utrecht (Suite)	39
Über einen Satz von Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von **Edmund Landau** in Berlin	46
Zur Bildung der symmetrischen Funktionen. Von **Carl Kostka** in Insterburg	50
Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn C. Kostka. Von **L. Saalschütz** in Königsberg i. Pr.	56
Fonctions continues sans dérivée; par **M. Ernest Cesàro** à Naples	57
Rezensionen. Von **A. H. Bucherer, Paul Epstein, A. Galle, A. Gleichen, Güntsche, K. Heun, E. Jahnke, A. Kneser, M. Krause, H. Kühne, E. Kullrich, E. Lampe, E. Müller, H. Samter, Paul Stäckel, F. Uppenborn, R. Vater**	64

Klein, F. und Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels. Von A. Galle. S. 64. — Hancock, Harris, Lectures on the calculus of variations (Weierstrassian theory). Von Paul Stäckel. S. 67. — Lummer, Otto, Die Ziele der Leuchttechnik. Von F. Uppenborn. S. 69. — Simon, Max, Analytische Geometrie des Raumes. Von H. Kühne. S. 71. — Klein, F., Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Von Paul Epstein. S. 72. — Herbertich, Gustav, Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Von Paul Epstein. S. 73. — L. A. Sohnckes Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung. Von E. Lampe. S. 73. — Tropfke, Johannes, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von E. Lampe. S. 77. —

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

ZEHNTER BAND.

MIT GENERALREGISTER ZU BAND I—X.

MIT 67 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Digitized by Google

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Digitized by Google

Inhalt.

	Seite
Budde, E., in Berlin. Die Tantallampe der Firma Siemens und Halske	9—15
Cesàro, Ernest, à Naples. Fonctions continues sans dérivée	57—63
Epstein, Paul, in Straßburg i. E. Raumkurven und Liniengeometrie	15—22
Fleck, Albert, in Berlin. Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen.	23—38
Gleichen, Alexander, in Berlin. Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre	227—233
Haentzschel, Emil, in Berlin. Bemerkung zu der Notiz des Herrn Safford: Rotation Cyclids and Lamé's Products.	238
Herzog, Joseph, in Budapest und **Feldmann, Clarence,** in Delft. Über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze (Transfiguration)	282—299
Horn, Jacob, in Clausthal. Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche	1—8
Jourdain, Philip, E. B., Broadwindsor, Dorset, England. The Development of the Theory of Transfinite Numbers	254—281
Kapteyn, Willem, à Utrecht. Sur l'équation différentielle de Monge (Suite)	39—44
Kostka, Carl, in Insterburg. Zur Bildung der symmetrischen Funktionen	50—55
Landau, Edmund, in Berlin. Über einen Satz von Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen	45—50
Meyer, W. Franz, in Königsberg i. Pr. Über Partialbruchzerlegung bei vielfachen Linearfaktoren des Nenners	239—247
Saalschütz, Louis, in Königsberg i. Pr. Bemerkung zu dem Aufsatze der Herrn C. Kostka: Zur Bildung der symmetrischen Funktionen .	56—57
Safford, F., H., Philadelphia. Rotation Cyclids and Lamé's Products	234—237
Schaefer, Clemens, in Breslau. Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen	113—137
Schultz, Ernst, in Stettin. Die überzähligen willkürlichen Konstanten in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung .	165—177
Segre, Corrado, à Turin. Sur la génération projective des surfaces cubiques	209—215
Spieß, Otto, in Basel. Einige Integralsätze	248—253
Sturm, Rudolf, in Breslau. Über die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel	216—226
Thieme, H., in Posen. Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung	137—150
Wallenberg, Georg, in Charlottenburg. Über Beziehungen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung und ihren ersten Ableitungen	151—164

Rezensionen.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. I. Bd. Von **A. H. Bucherer**	93
Alexandroff, J., Aufgaben aus der niederen Geometrie. Von **E. Jahnke**	81
Annuaire pour l'an 1904. Von **E. Jahnke**	81
Astronomischer Kalender für 1905. Von **E. Kullrich**	82
Anfseß, O., Freiherr von und zu. Die physikalischen Eigenschaften der Seen. Von **H. Samter**	320
Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues. Von **A. Schoenflies**	325

a*

148 R85

Digitized by Google

Seite
Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht. Von **E. Kullrich** . . . 180
Bolza, O., Lectures on the calculus of variations. Von **C. Carathéodory** . 183
Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles. Von **M. Krause** . 323
—, Algèbre. Von **E. Netto** . . . 326
Bork-Nath. Mathematische Hauptsätze. Von **E. Kullrich** . . . 82
Burg, R., Sammlung algebraischer Aufgaben. Von **A. Leman** . . . 317
Bützberger, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Von **E. Kullrich** . 187
Cellérier, Ch., Cours de mécanique. Von **K. Heun** . . . 79
Cesàro, E., Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Von **G. Holzmüller** . . . 300
Classen, Fr. J., Mathematische Optik. Von **A. Gleichen** . . . 85
Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie. Von **E. Kullrich** . . . 189
Fort, O. und Schlömlich, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von **P. Zühlke** . . . 186
Fonët, A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Von **H. Liebmann** . . . 309
Fuhrmann, A., Bauwissenschaftliche Anwendung der Integralrechnung. Von **E. Lampe** . . . 185
Gauß, C. F., Ges. Werke. Neunter Band. Von **E. Jahnke** . . . 81
Geißler, K., Grundlagen der mathematischen Erdkunde. Von **E. Kullrich** 191
Gérard, E., Leçons sur l'électricité. Von **H. Linsenmann** . . . 320
Grimsehl, E.. Angewandte Potentialtheorie. Von **H. Samter** . . . 319
Gutsche, O., Mathematische Übungsaufgaben. Von **M. Nath** . . . 181
Habenicht, B., Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Von **F. Ludwig** . . . 196
Hadamard, J., Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Von **A. Wangerin** . . . 302
Hancock, H., Lectures on the calculus of variations. Von **P. Stäckel** . . 67
Herberich, G., Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Von **P. Epstein** . . . 73
Hochheim, A., Aufgaben aus der analyt. Geometrie der Ebene. Von **P. Zühlke** . . . 186
Hoffmann, A., Mathematische Geographie. Von **E. Kullrich** . . . 191
Höfler, A., Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie. Von **E. Grimsehl** . . . 314
Holzmüller, G., Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Von **E. Kullrich** . . . 180
Janisch, W., Geometrische Aufgaben. Von **E. Kullrich** . . . 179
Jouffret, E., Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introduction à la géométrie à *n* dimensions. Von **E. Müller** . . . 195
Junker, F., Physikalische Aufgaben. Von **H. Samter** . . . 182
Kaučič, Georg Freiherr von Vega. Von **H. Samter** . . . 183
Klein, F. und Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels III. Von **A. Galle** 64
Klein, F., Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts. Von **P. Epstein** . . . 72
Kübler, J., Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum. Von **H. Samter** . . . 178
Lejeune-Dirichlet, G., Vorl. über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Von **P. Epstein** . . . 311
Liebmann, H. Nichteuklidische Geometrie. Von **G. Hessenberg** . . . 316
Lobatschefskij, N. J., „Imaginäre Geometrie" und „Anwendung der imag. Geometrie auf einige Integrale". Von **P. Epstein** . . . 310
Loewy, A., Versicherungsmathematik. Von **G. Bohlmann** . . . 179
Loppé, F., Essais industriels des machines électriques. Von **M. Schenkel** 194
Lorenz, H., Technische Wärmelehre. Von **K. Heun** . . . 79
Lummer, O., Die Ziele der Leuchttechnik. Von **F. Uppenborn** . . . 69
Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung. Von **H. Samter** . . . 182
Marcolongo, R., Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici. Von **E. Lampe** . . . 91

Seite
Martus, H., Mathematische Aufgaben. Von **E. Kullrich** 188
Marx, L'éther principe universel des forces. Von **H. Samter** 195
Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. Von **H. Samter** 179
Müller, H. und Kutnewsky, M., Sammlung von Aufgaben. Von **E. Kullrich** 189
Musil-Ewing, Bau der Dampfturbinen. Von **R. Vater** 86
Newest, Die Gravitationslehre ein Irrtum! Von **H. Samter** 192
Noack, Aufgaben für physikalische Schülerübungen. Von **H. Samter** . . 193
Orlando, L., Note di Matematica. Von **E. Kullrich** 188
Pascal, E., Repertorium der höheren Mathematik. Von **E. Müller** . . . 92
Perry, J., Drehkreisel. Von **H. Samter** 84
Reichel, O., Vorstufe der höh. Analysis und der analyt. Geometrie. Von **E. Kullrich** 190
Rohrbach, C., Vierstellige, logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von **E. Kullrich** 84
Rüefli, J., Lehrbuch der Stereometrie. Von **E. Kullrich** 189
Scheiner, J., Der Bau des Weltalls. Von **H. Samter** 84
Schubert, H., Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Von **R. Güntsche** 86
Schuster, M., Stereometrische Aufgaben. Von **E. Kullrich** 187
Schwalbe, Grundriß der Astronomie. Von **H. Samter** 312
Seyffarth, W., Dr. E. Bardeys Aufgabensammlung. Von **E. Kullrich** . . 189
Sicard, H., Traité de cinématique théorique. Von **K. Heun** 80
Simon, M., Analytische Geometrie des Raumes. Von **H. Kühne** 71
Snyder, V. and Hutchinson, J., Differential and integral calculus. Von **E. Jahnke** 82
Snyder, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft. Von **H. Samter** 318
Sohnke, L. A., Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung. Von **E. Lampe** 73
Stodola, A., Die Dampfturbinen. Von **A. Kneser** 88
Thomae, Sammlung von Formeln und Lehrsätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen. Von **M. Krause** 95
Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik. Von **E. Lampe** . . . 77
Vries, H. de, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Von **E. Kullrich** 188
Waeber, Lehrbuch für den Unterricht der Physik. Von **H. Samter** . . . 193
Wagenmann, Das System der Welt. Von **H. Samter** 178
Walther, K. und Röttinger, M., Technische Wärmelehre. Von **R. Vater** 86
Weber, E. v., Vorlesungen über das Pfaffsche Problem. Von **E. Lampe** . 89
Weber, L., Wind und Wetter. Von **H. Samter** 84
Wehner, Die Bedeutung des Experimentes für den Unterricht in der Chemie. Von **H. Samter** 181
Weighardt, E., Mathematische Geographie. Von **E. Kullrich** 191
Wislicenus, Der Kalender. Von **H. Samter** 183

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.
A. Aufgaben und Lehrsätze. 135—161. Von **E. Cesàro, P. Epstein, O. Gutsche, E. Jahnke, G. Kober, A. Krug, J. Krug, E. Lampe, E. Lemoine, O. Meißner, J. Neuberg, W. Peche, H. Wieleitner** 97, 197, 327
B. Lösungen: Zu 4 (E. Lampe) von **A. Baruch** 100
Zu 52 (E. Lampe) von **A. Baruch** 102
Zu 113 (K. Cwojdziński) von **K. Cwojdziński** 103
Zu 118 (Ad. Schmidt) von **Ad. Schmidt** 103
Zu 121 (G. Loria) von **G. Loria** 198
Zu 124 (G. Kober) von **W. Stegemann** 199
Zu 126 (E. Jahnke) von **W. Stegemann** 200
Zu 128 (O. Gutsche) von **J. Krug** 329
Zu 129 (G. Kober) von **G. Kober, W. Stegemann, J. Krug** 331
Zu 130 (A. Krug) von **W. Stegemann** 333

Digitized by Google

Seite

2. A. Anfragen. 27 Von **A. Krug** 104
28 Von **P. Ehrenfest** 105
B. Antworten. Zu 22 (O. Meißner) von **O. Meißner** 334

3. Kleinere Notizen.

Holzmüller, G., Über eine besondere isothermische Spiegelung 339
Jung, F., Über die Ableitung der Eulerschen Knickungsformel 201
Koch, F. und Reisacher, J., Die Aufgabe, einen Würfel durch einen andern durchzuschieben 335
Sawayama, Y., Ein neuer Lehrsatz der Geometrie 105
Stahl, H., Berichtigung einer Arbeit von Herrn E. T. Whittaker (Messenger (2), 31, 145—148) 336
Visnya, A., Eine Verallgemeinerung der v. Staudtschen projektiven Koordinaten 337

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Inhalt der Bände 1—10 der dritten Reihe . . . . 347—378

Berichtigung zu der Arbeit von E. Cesàro 208
Berichtigung zu der Arbeit von A. Fleck 378

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

37. Sitzung am 25. Oktober 1905 1
38. „ „ 29. November 1905 1
39. „ „ 13. Dezember 1905 17
40. „ „ 31. Januar 1906 17
41. „ „ 28. Februar 1906 39
42. „ „ 28. März 1906 39
43. „ „ 25. April 1906 39
Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und von Biquadraten ganzer Zahlen. Von **A. Fleck** 2
Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz. Von **Rudolf Rothe** 9
Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Von **P. Zühlke.** (Mit 1 Figur im Text) 15
Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal. Von **E. Lampe.** Mit 4 Figuren im Text 17
Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie. Von **R. Güntsche** . . 27
Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft. Von **Paul Koebe** 39
Ein Apparat zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts in der Ebene. Von **R. Skutsch.** Mit 4 Figuren im Text 42
Über lineare homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung mit nur wesentlichen singulären Stellen. Von **Richard Fuchs** 46
Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen. Von **Stanislaus Jolles** 51
Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen. Von **Emil Haentzschel.** Mit 1 Figur im Text 54
Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht, inbezug auf ihr Verhalten bei der Iteration. Von **Paul Koebe.** Mit 3 Figuren im Text . 57
Über die Projektion des räumlichen Punktgitters. Von **Gerhard Hessenberg.** Mit 5 Figuren im Text 64
Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen. Von **Otto Meißner** . . 70

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche.

Von J. Horn in Clausthal.

1. Ein schwerer Punkt von der Masse 1 bewege sich auf einer Rotationsfläche mit lotrechter Achse, welche zur z-Achse (positiv nach oben) genommen wird, während in der xy-Ebene Polarkoordinaten eingeführt werden:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Rotationsfläche sei

$$z = f(r).$$

Das Prinzip der lebendigen Kraft und der Flächensatz für die xy-Ebene liefern die Gleichungen

$$(1 + f'(r)^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2gf(r) = 2h,$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k,$$

worin h, k Konstante sind. Daraus erhält man durch Differentiation die Differentialgleichungen

$$(1 + f'(r)^2)\frac{d^2r}{dt^2} + f'(r)f''(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + gf'(r) = 0,$$

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Sie besitzen die Lösung

$$r = r_0 = \text{const.}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \eta_0 = \sqrt{\frac{gf'(r_0)}{r_0}}\,^{1)},$$

falls $f'(r_0) > 0$ *ist.* Diese Lösung stellt *eine gleichförmige Bewegung auf dem Parallelkreis vom Radius* r_0 *mit der Geschwindigkeit* $r_0\eta_0 = \sqrt{gr_0f'(r_0)}$

1) Wir denken uns die Achsen so gelegt, daß η_0 positiv ausfällt.

dar. *Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist die analytische Darstellung der benachbarten Bewegungen.*[1])

Die der gleichförmigen Bewegung entsprechenden Werte von h und k sind

$$h_0 = gf(r_0) + \tfrac{1}{2} g r_0 f'(r_0),$$
$$k_0 = r_0 \sqrt{g r_0 f'(r_0)}.$$

Zur Untersuchung der benachbarten Bewegungen setzen wir

$$r = r_0 + R, \quad h = h_0 + H, \quad k = k_0 + K$$

und

$$f(r_0 + R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots,$$

so daß

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(r_0)}{\nu!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist.

Die obigen Integralgleichungen bringen wir auf die Form

$$t = \int^r \frac{r\sqrt{1 + f'(r)^2}}{\sqrt{2r^2(h - gf(r)) - k^2}} dr,$$

$$\varphi = k \int^r \frac{\sqrt{1 + f'(r)^2}}{r\sqrt{2r^2(h - gf(r)) - k^2}} dr.$$

2. Wir haben

$$\begin{aligned} F(r) &= 2r^2(h - gf(r)) - k^2 \\ &= 2(r_0 + R)^2(h_0 + H - gf(r_0 + R)) - (k_0 + K)^2 \\ &= AR^2 + A'R^3 + \cdots + 2r_0^2 H - 2k_0 K - K^2 + 4r_0 RH + 2R^2 H; \end{aligned}$$

dabei ist

$$A = -g r_0 (3a_1 + 2a_2 r_0),$$
$$A' = -2g(a_1 + 2a_2 r_0 + a_3 r_0^2)$$

---

1) Dieselbe Aufgabe ist nach einer anderen Methode in § 1 und § 9 des Aufsatzes des Verf. „Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen" (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **52**) behandelt. — Die vorliegende Arbeit knüpft an die folgenden Abhandlungen an: Weierstraß, über eine Gattung reell periodischer Funktionen (Werke Bd. II); Staude, über eine Gattung doppelt reell periodischer Funktionen zweier Veränderlicher (Math. Ann. **29**); über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche (Act. math. **11**); über bedingt periodische Funktionen und Anwendung derselben auf Mechanik (Journ. f. Math. **105**). In betreff der Untersuchung kleiner Schwingungen im Anschluß an diese Abhandlungen vergl. die folgenden Aufsätze des Verf.: Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **49**); Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage (Journ. f. Math. **126**).

Digitized by Google

usw. Damit der schwere Punkt beständig in der Nähe des Parallelkreises vom Radius r_0 bleibt, setzen wir $A < 0$, also $3a_1 + 2a_2 r_0 > 0$ voraus; mit andern Worten, *es soll*

$$3f'(r_0) + r_0 f''(r_0) > 0$$

sein. Es besteht die Faktorenzerlegung

$$F(r) = (R^2 + g_1 R + g_2)(G_0 + G_1 R + G_2 R^2 + \cdots);$$

$$g_1 = \left(\frac{4r_0}{A} - \frac{2A'r_0^2}{A^2}\right)H + \frac{2A'k_0}{A^2}K + \cdots,$$

$$g_2 = \frac{2r_0^2}{A}H - \frac{2k_0}{A}K + \cdots;$$

$$G_0 = A + \left(2 - \frac{4A'r_0}{A} + \frac{2A'^2r_0^2}{A^2} - \frac{2A''r_0^2}{A}\right)H + \left(\frac{2A''k_0}{A} - \frac{2A'^2k_0}{A^2}\right)K + \cdots,$$

$$G_1 = A' + \cdots$$

usw. Weiter ist

$$R^2 + g_1 R + g_2 = (R - c)(R - \bar{c});$$

$$c = -\frac{g_1}{2} + \sqrt{\frac{g_1^2}{4} - g_2}, \quad \bar{c} = -\frac{g_1}{2} - \sqrt{\frac{g_1^2}{4} - g_2}.$$

Wir setzen

$$L^2 = \frac{g_1^2}{4} - g_2 = -\frac{2}{A}(r_0^2 H - k_0 K) + \cdots$$

und führen an Stelle von H, K die Integrationskonstanten H, L ein. Dann ist

$$K = \frac{r_0^2}{k_0}H + \cdots = \sqrt{\frac{r_0}{g a_1}}\,H + \cdots$$

eine Potenzreihe von H, L, worin die nicht angeschriebenen Glieder mindestens zweiten Grades sind, und es wird

$$c = L - \frac{2r_0}{A}H + \cdots,$$

$$\bar{c} = -L - \frac{2r_0}{A}H + \cdots,$$

ferner

$$G_0 + G_1 R + \cdots = A + A'R + \left(2 - \frac{4A'r_0}{A}\right)H + \cdots,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{-(G_0 + G_1 R + \cdots)}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \cdot \left\{1 - \frac{A'}{2A}R + \left(\frac{2A'r_0}{A^2} - \frac{1}{A}\right)H + \cdots\right\}.$$

Schließlich ist

$$(r_0 + R)\sqrt{1 + f'(r_0 + R)^2} = \sqrt{1 + a_1^2} \cdot \left\{r_0 + \left(1 + \frac{2a_1a_2r_0}{1 + a_1^2}\right)R + \cdots\right\}.$$

Digitized by Google

Man hat demnach

$$t = \mp\sqrt{\frac{1+a_1^2}{-A}}\int\limits_c^R \frac{r_0 + \left(1 + \frac{2a_1a_2r_0}{1+a_1^2} - \frac{A'r_0}{2A}\right)R + \left(\frac{2A'r_0^2}{A^2} - \frac{r_0}{A}\right)H + \cdots}{\sqrt{(c-R)(R-\bar{c})}}\,dR,$$

wenn R zur Zeit $t = 0$ den größten oder kleinsten Wert c annimmt und wenn zur Zeit t der zwischen c und c gelegene Wert R zum ersten Mal erreicht wird.[1])

3. Durch die Substitution

$$R = \frac{c+\bar{c}}{2} + \frac{c-\bar{c}}{2}\cos v = -\frac{2r_0}{A}H + \cdots + L\cos v$$

erhält man

$$t = \mathfrak{A}_0 v + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}_\nu L^\nu \sin \nu v,$$

wo $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... Potenzreihen von H, L sind; insbesondere ist

$$\mathfrak{A}_0 = \alpha + \beta H + \cdots,\quad \mathfrak{A}_1 = \gamma + \cdots$$

unter Anwendung der Bezeichnung

$$\alpha = r_0\sqrt{\frac{1+a_1^2}{-A}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1+a_1^2}{-A}}\left(\frac{3A'r_0^2}{A^2} - \frac{3r_0}{A} - \frac{4a_1a_2r_0^2}{A(1+a_1^2)}\right),$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+a_1^2}{-A}}\left(1 + \frac{2a_1a_2r_0}{1+a_1^2} - \frac{A'r_0}{2A}\right).$$

Wir setzen

$$\omega = \pi\mathfrak{A}_0 = \pi(\alpha + \beta H + \cdots)$$

und

$$u = \frac{\pi}{\omega}t = v + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{B}_\nu L^\nu \sin \nu v,$$

wo

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{A}_0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

eine Potenzreihe von H, L und insbesondere

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\gamma}{\alpha} + \cdots = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{2a_1a_2}{1+a_1^2} - \frac{A'}{2A}\right) + \cdots$$

ist.

1) Es gilt das Zeichen − oder +, je nachdem $c > \bar{c}$ oder $c < \bar{c}$ ist. In Nr. **3** fällt das doppelte Vorzeichen fort, und t unterliegt keiner Beschränkung mehr. Vgl. Ztschr. Math. Phys. **49**, 257 ff.

Als gerade periodische Funktion von u mit der Periode 2π läßt sich $\cos v$ in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$\cos v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n u$$

entwickeln; es ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos v \, du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos v \frac{du}{dv} dv,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos v \cos n u \, du = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin v \sin n u \, dv \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Zunächst ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos v \,(1 + \mathfrak{B}_1 L \cos v + \cdots)\, dv = \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 L = \frac{\gamma}{2\alpha} L + \cdots.$$

Wenn

$$\eta = u - v = \mathfrak{B}_1 L \sin v + \cdots$$

gesetzt wird, hat man

$$\sin u = \sin v \cos \eta + \cos v \sin \eta = \sin v + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 L \sin 2v + \cdots$$

und

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin v \,(\sin v + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 L \sin 2v + \cdots)\, dv = 1 + \cdots$$

Nunmehr ist

$$R = -\frac{2r_0}{A} H + \cdots + L\left(\frac{\gamma}{2\alpha} L + \cos u + \cdots\right)$$

oder

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n L^n \cos n u,$$

wo die $\mathfrak{R}_n$ Potenzreihen von H, L sind und insbesondere

$$\mathfrak{R}_0 = -\frac{2r_0}{A} H + \cdots, \quad \mathfrak{R}_1 = 1 + \cdots.$$

4. Aus

$$\varphi = (k_0 + K)\int \frac{\sqrt{1 + f'(r_0 + R)^2}\, dR}{(r_0 + R)\sqrt{(c - R)(R - c)} \cdot \sqrt{-(G_0 + G_1 R + \cdots)}}$$

folgt, wenn man

$$K = \frac{r_0^2}{k_0} H + \cdots$$

beachtet,

$$\varphi = \mp\sqrt{\frac{g a_1 r_0 (1+a_1^2)}{-A}} \int\limits_c^R \frac{1+\left(\frac{2 a_1 a_2}{1+a_1^2} - \frac{1}{r_0} - \frac{A'}{2A}\right)R + \left(\frac{2A' r_0}{A^2} + \frac{1}{g a_1 r_0} - \frac{1}{A}\right)H + \cdots}{\sqrt{(c-R)(R-\bar{c})}} dR^{1)}$$

$$= \mathfrak{C}_0 v + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{C}_\nu L^\nu \sin \nu v,$$

wo $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ Potenzreihen von H, L sind; insbesondere ist

$$\mathfrak{C}_0 = \varkappa + \lambda H + \cdots, \quad \mathfrak{C}_1 = \mu + \cdots,$$

wobei gesetzt ist:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{g a_1 r_0 (1+a_1^2)}{-A}},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{g a_1 r_0 (1+a_1^2)}{-A}} \left(\frac{3A' r_0}{A^2} + \frac{1}{A} + \frac{1}{g a_1 r_0} - \frac{4 a_1 a_2 r_0}{A(1+a_1^2)}\right),$$

$$\mu = \sqrt{\frac{g a_1 r_0 (1+a_1^2)}{-A}} \left(\frac{2 a_1 a_2}{1+a_1^2} - \frac{1}{r_0} - \frac{A'}{2A}\right).$$

Um den Winkel φ als Funktion von $u = \frac{\pi}{\omega} t$ darzustellen, setzen wir

$$v = u - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{B}_\nu L^\nu \sin \nu v$$

und erhalten

$$\varphi = \mathfrak{C}_0 u + \psi(v),$$

wo

$$\psi(v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_0 \mathfrak{B}_\nu) L^\nu \sin \nu v$$

als ungerade periodische Funktion von u mit der Periode 2π die Entwicklung zuläßt:

$$\psi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n u.$$

Hierbei ist

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \psi(v) \sin n u\, du = \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^\pi \cos n u \frac{d\psi(v)}{dv} dv$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^\pi \cos n u \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_0 \mathfrak{B}_\nu) L^\nu \cos \nu v \cdot dv.$$

---

1) Die Achsen sind so gelegt, daß für $\varphi = 0$ $t = 0$ ist. Wenn der zwischen c und $\bar{c}$ gelegene Wert R zum ersten Mal erreicht wird, gilt das Zeichen $-$, wenn $c > \bar{c}$, das Zeichen $+$, wenn $c < \bar{c}$ ist. Schon in der folgenden Zeile fällt das doppelte Vorzeichen fort.

Wegen
$$\cos u = \cos v \cos \eta - \sin v \sin \eta$$
und
$$\eta = \mathfrak{B}_1 L \sin v + \cdots$$
oder
$$\cos u = \cos v - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 L + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 L \cos 2v + \cdots$$
ergibt sich
$$B_1 = (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_0 \mathfrak{B}_1) L + \cdots = \frac{\alpha\mu - \gamma\varkappa}{\alpha} L + \cdots.$$

Für $t = \omega$ oder $u = \pi$ nimmt φ den Wert
$$\varpi = \pi \mathfrak{C}_0 = \pi(\varkappa + \lambda H + \cdots)$$
an. Also hat man
$$\varphi = \frac{\varpi}{\pi} u + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n L^n \sin n u,$$
wo die $\mathfrak{S}_n$ ebenso wie ϖ Potenzreihen von H, L sind; insbesondere ist
$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\alpha\mu - \gamma\varkappa}{\alpha} + \cdots.$$

5. Wir wollen noch die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des bewegten Punktes als Funktionen von t darstellen.

Zunächst ist
$$z = f(r_0 + R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots$$
oder
$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{T}_n L^n \cos n u,$$
wo die $\mathfrak{T}_n$ Potenzreihen von H, L sind und insbesondere
$$\mathfrak{T}_0 = a_0 - \frac{2 a_1 r_0}{A} H + \cdots, \quad \mathfrak{T}_1 = a_1 + \cdots.$$

Ferner ist, wenn man
$$\chi = \varphi - \frac{\varpi}{\pi} u$$
setzt,
$$\begin{aligned} x = r \cos\varphi &= (r_0 + R) \cos\left(\frac{\varpi}{\pi} + \chi\right) \\ &= \cos\frac{\varpi}{\pi} u \cdot (r_0 + R) \cos\chi - \sin\frac{\varpi}{\pi} u \cdot (r_0 + R) \sin\chi, \\ y = r \sin\varphi &= (r_0 + R) \sin\left(\frac{\varpi}{\pi} + \chi\right) \\ &= \sin\frac{\varpi}{\pi} u \cdot (r_0 + R) \cos\chi + \cos\frac{\varpi}{\pi} u \cdot (r_0 + R) \sin\chi. \end{aligned}$$
Es ist
$$\cos\chi = 1 - \tfrac{1}{2}\chi^2 + \cdots = 1 - \frac{(\alpha\mu - \gamma\varkappa)^2}{4\alpha^2} L^2 (1 - \cos 2u),$$
$$\sin\chi = \chi - \cdots = \frac{\alpha\mu - \gamma\varkappa}{\alpha} L \sin u + \cdots$$

Digitized by Google

und

$$(r_0 + R)\cos\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n L^n \cos nu,$$

$$(r_0 + R)\sin\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n L^n \sin nu,$$

wo die $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{Q}_n$ Potenzreihen von H, L sind; insbesondere ist

$$\mathfrak{P}_0 = r_0 - \frac{2r_0}{A} H + \cdots, \quad \mathfrak{P}_1 = 1 + \cdots,$$

$$\mathfrak{Q}_1 = r_0 \frac{\alpha\mu - \gamma\varkappa}{\alpha} + \cdots.$$

Also haben wir

$$x = \cos\frac{\varpi}{\pi} u \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n L^n \cos nu - \sin\frac{\varpi}{\pi} u \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n L^n \sin nu,$$

$$y = \cos\frac{\varpi}{\pi} u \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n L^n \sin nu + \sin\frac{\varpi}{\pi} u \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n L^n \cos nu.$$[1]

Wir drücken die Integrationskonstanten H, K bezw. H, L durch die Werte c und c' aus, welche $R = r - r_0$ und $\frac{d\varphi}{dt} - \eta_0$ für $t = 0$ annehmen. Aus

$$2h_0 + 2H = (r_0 + c)^2(\eta_0 + c')^2 + 2gf(r_0 + c),$$

$$k_0 + K = (r_0 + c)^2(\eta_0 + c')$$

ergeben sich

$$H = 2ga_1 \cdot c + r_0\sqrt{ga_1 r_0} \cdot c' + \cdots,$$

$$K = 2\sqrt{ga_1 r_0} \cdot c + r_0^2 \cdot c' + \cdots$$

als Potenzreihen bezw. ganze rationale Funktionen von c, c'. Da sich in

$$L^2 = -\frac{2}{A}(r_0^2 H - k_0 K) + \cdots$$

die Glieder ersten Grades in c, c' wegheben, so ist L die Quadratwurzel aus einer mit Gliedern zweiter Dimension beginnenden Potenzreihe von c und c'.

1) Bei Staude a. a. O. sind die Koeffizienten der verschiedenen Fourierschen Reihen, sowie die Größen ω und ϖ nur durch Quadraturen dargestellt. Für die hier betrachtete Bewegung in der Nähe eines Parallelkreises konnten wir sowohl die Reihenkoeffizienten als auch die Größen c, $\bar{c}$ und ω, ϖ nach Potenzen der kleinen Integrationskonstanten H, L entwickeln.

Digitized by Google

Die Tantallampe der Firma Siemens & Halske A.-G.

Von E. Budde in Berlin.

Wenn auch die quantitativen Strahlungsgesetze erst eine Errungenschaft des letzten Jahrzehnts sind, so war doch schon lange bekannt, daß bei Körpern, welche durch bloße Temperaturstrahlung Licht aussenden, der sichtbare Strahlnngsanteil mit der Temperatur steigt. Und die Technik hatte schon früh[1]) hieraus den Schluß gezogen, man würde eine möglichst ökonomische Glühlampe erhalten, wenn man als Leuchtkörper einen Faden verwendete, der eine möglichst hohe Temperatur aushält. Die Schädlichkeiten, denen der Faden in der Hitze standhalten muß, sind Schmelzung, Zerbrechen und Zerstäubung. Namentlich die letztere spielt bei den Glühlampen eine wichtige Rolle. In der ersten Zeit, nachdem Edison den Kohlenfaden erfunden hatte, benutzte man die Glühlampe so lange, bis der Faden brach, auch wenn sie kohlschwarz geworden war; neuerdings ist man dahin übereingekommen, die Lampe als ausgedient anzusehen, wenn sie 20% ihrer ursprünglichen Leuchtkraft verloren hat. Der „ökonomische Tod" der Lampe wird demgemäß in der Regel durch Zerstäubung herbeigeführt; der Faden an sich hält meistens bedeutend länger.

Bei den ersten Versuchen, eine Glühlampe mit höherer Fadentemperatur herznstellen, hielt man sich an die Kohlenfäden, deren „Unschmelzbarkeit" ihnen von vornherein eine besonders günstige Stellung zu sichern schien. Die Versuche nach dieser Richtung hatten aber keinen durchschlagenden Erfolg. Es ist nicht schwer, ausgesuchte Kohlenfäden herzustellen, die mit einem Energieverbrauch von etwa 2,6 Watt pro HK brennen, während die gewöhnliche Kohlenlampe 3,2 bis 3,5 Watt verbraucht; aber es scheint, daß in der Hitze molekulare Umänderungen des Fadens eintreten, welche seine Festigkeit vermindern und seine Zerstäubungstendenz erhöhen, sodaß man nicht mit Sicherheit auf eine genügende Lebensdauer derartiger Lampen rechnen kann. Siemens & Halske entschlossen sich infolgedessen vor etwa 8 Jahren, die Versuche mit Kohlenfäden fallen zu lassen und sich endgültig nach einem metallischen Fadenmaterial von genügend hohem Schmelzpunkt umzusehen. Sie gaben dem Chemiker ihres

1) Vergl. W. Siemens in der „ETZ" 1883. Vol. IV, S. 107.

Digitized by Google

Glühlampenwerkes, Dr. W. von Bolton, den Auftrag, nach einem geeigneten Körper zu suchen. Die anzustrebenden Bedingungen waren: Schmelzpunkt erheblich über 2000°, geringe Zerstäubung, Vorkommen in solcher Menge, daß das Erzbedürfnis der Technik ohne Schwierigkeiten befriedigt werden kann.

Die letzte Bedingung schien die Platinmetalle auszuschließen. Dr. von Bolton suchte infolgedessen unter den sogenannten seltenen Metallen mit höherem Atomgewicht und fand, daß einzelne Körper aus der Vanadinmgruppe entsprechende Eigenschaften zeigten. Vanadium selbst erwies sich noch als zu leicht schmelzbar, Niob hatte schon einen recht hohen Schmelzpunkt, neigte aber in übermäßig hohem Grade zur Zerstäubung. Dann ging man zum Tantal über. Die Reduktion erwies sich anfangs als recht schwierig, und zwar hauptsächlich deshalb, weil das Tantalmetall, wenn man es durch kohlehaltige Mittel reduziert, stets Kohlenstoff aufnimmt. Doch zeigte sich, daß man durch starkes Glühen von Tantalverbindungen in einem gut unterhaltenen Vakuum ziemlich reines Metall herstellen kann, und diese Bemerkung führte allmählich zu der Methode, nach der das Tantal jetzt hergestellt wird: Tantalkaliumfluorid wird mit metallischem Kalium reduziert. Das Ergebnis der Reaktion ist ein grauschwärzliches Pulver, welches vom Auslaugen aber noch Verunreinigungen enthält. Das Pulver wird zu kleinen Scheiben gepreßt und dann im Vakuum durch einen elektrischen Lichtbogen erhitzt, wobei das zu schmelzende Material als Anode dient, während die Kathode ihrerseits aus einem Tantalstück besteht. Bei längerem Durchschmelzen dissoziieren sich die in dem Präparat enthaltenen Gasreste und entweichen beim fortwährenden Auspumpen; es bleibt ein Regulus von reinem Tantal.

Das Wort Metall wird heutzutage in zwei deutlich verschiedenen Bedeutungen gebraucht: Der Chemiker versteht darunter ein Element, welches mit Sauerstoff Basen, oder wenigstens eine Base, bildet; der Physiker einen undurchsichtigen Leiter erster Klasse mit den bekannten Glanzeigenschaften. Im chemischen Sinne ist das Tantal nicht ein Metall zu nennen; es ist bis jetzt kein Salz desselben bekannt, in welchem das Tantalatom die Rolle des Kations spielt; es hat vielmehr in seinem chemischen Verhalten eine erhebliche Ähnlichkeit mit Silicium. Es sieht ein wenig dunkler als Platin, aber heller als Eisen aus, hat ungefähr den Glanz des Platins und nach dem Schmelzen und Ziehen das spezifische Gewicht 16,8. Sein höchstes Oxyd, die Tantalsäure, TA_2O_5, ist ein weißes nichtleitendes Pulver. Die niederen Oxyde sehen schwärzlichbraun aus und besitzen in der Kälte eine mäßige Leitungsfähigkeit für den elektrischen Strom. An der Luft erhitzt,

Digitized by Google

läuft es ähnlich wie Stahl an, bei 400° gelb, bei 500 bis 600° tief dunkelblau, bei heller Glühhitze verbrennt es, und zwar ohne merkliche Flamme. Mit Wasserstoff und Stickstoff verbindet es sich schon bei Rotglut begierig und bildet brüchige, dunkel-metallisch aussehende Verbindungen. Kohlenstoff nimmt es mit äußerster Leichtigkeit auf und bildet mehrere Karbide, die schwärzlich aussehen, einen gewissen Metallglanz haben und sehr spröde und so hart sind, daß sie Glas schneiden. In der Kälte ist es gegen die gewöhnlichen chemischen Agentien außerordentlich beständig. Es reagiert nur gegen Flußsäure und geschmolzene Alkalien; durch Kochen in Salzsäure, Königswasser, Salpetersäure und Schwefelsäure wird es nicht angegriffen, ebensowenig durch alkalische Lösnngen von mäßiger Konzentration.

Was die physikalischen Eigenschaften angeht, so ist es hämmerbar, walzbar und läßt sich zu sehr feinen Drähten ziehen. Die absolute Festigkeit dickerer Stücke ist etwas größer als die des besten Stahls (93 kg pro qmm); beim Ziehen zeigt es in hohem Grade die auch für andere Metalle bekannte Eigenschaft, daß die scheinbare Zerreißfestigkeit mit der Abnahme des Durchmessers bedeutend wächst; ein Draht von 0,1 mm Durchmesser trägt noch ca. 1200 g, und ein solcher von 0,05 mm Durchmesser (wahrscheinlicher Fehler der Dickenbestimmung etwa 0,001 mm) trägt noch 310 bis 440 g. Der elektrische Widerstand des Materials bei Zimmertemperatur beträgt 0,165 Ohm für 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt. Sein Temperaturkoeffizient ist positiv und hat zwischen 0 bis 100° C den Wert 0,30; bei der Temperatur, welche der glühende Faden in der Lampe annimmt, wenn er mit 1,5 Watt pro HK belastet wird, steigt der Widerstand fast genau auf das Fünffache desjenigen Wertes, den er bei Zimmertemperatur hat; er beträgt dann für 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt 0,830.

Fig. 1 zeigt die Widerstandszunahme eines Tantalfadens und zum Vergleich diejenige eines Kohlenfadens, wobei als Abszisse die Spannung, als Ordinate der Widerstand aufgetragen und der Maßstab so gewählt ist, daß bei einer Strombelastung von 1,5 Watt pro HK sowohl Spannung wie Widerstand = 100 gesetzt sind.

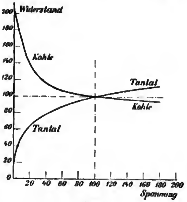


Fig. 1.

Digitized by Google

Der Schmelzpunkt des Tantals liegt zwischen 2250 und 2300°, wahrscheinlich näher an 2250°. Der Schmelzung geht ein allmähliches Erweichen voran, welches sich über ein Temperaturintervall von mehreren hundert Grad zu erstrecken scheint.

Der hohe Schmelzpunkt ließ das Tantal für Glühlampen geeignet erscheinen; es zeigte sich ferner schon bei den ersten Versuchen, daß das Material, wenn es rein und wenn die Lampe gut gepumpt ist, sehr wenig zerstäubt. Damit war seine Brauchbarkeit erwiesen. Aus dem spezifischen Widerstand und aus dem Lichteffekt einiger Versuchslampen ließ sich berechnen, daß zur Herstellung einer 25-kerzigen Lampe, die bei 110 Volt brennen sollte, ein Tantaldraht von 0,05 mm Durchmesser und von 65 cm Länge erforderlich sein würde. An die eigentliche Lampenfabrikation trat also die Forderung heran, einen sehr dünnen Draht von dieser Länge im Innern einer Glühlampenbirne unterzubringen. Diese Aufgabe machte anfangs einige Schwierigkeiten und wurde schließlich von dem Direktor des Glühlampenwerkes, Dr. Feuerlein, in der in Fig. 2 abgebildeten Form gelöst.

Wie man aus dem Bilde sieht, enthält die Lampe einen zentralen Ständer von Glas. An diesem Ständer befinden sich 2 linsenförmige Glaskörper von horizontaler Flächenausdehnung, der obere am oberen Ende des Ständers, der untere etwa 12 mm tiefer. In diese Linsen sind Nickeldrähte eingeschmolzen, die einen doppelten Stern bilden; jeder Nickeldraht hat am Ende ein Häkchen, und zwischen diesen Häkchen ist der als Leuchtkörper dienende Tantaldraht zickzackförmig hin- und hergespannt. Seine beiden Enden sind an Platindrähte angelötet, welche durch den Fuß nach außen führen und somit in üblicher Weise die Verbindung mit dem Stromnetz vermitteln.

Die in Fig. 2 gezeichnete Ausführung hat sich als recht stabil erwiesen. Sie hält starke Erschütterungen aus, sodaß die Lampe weitgehende See- und Eisenbahntransporte verträgt. Das einzelne Drahtstück, welches von einem Häkchen zum nächsten führt, ist so kurz, daß es sich auch in der Hitze nicht merklich durchbiegt. Demgemäß brennt die Lampe in jeder Stellung und ist nicht, wie z. B. die Osmiumlampe, an die Bedingung des Senkrechtherabhängens gebunden. Das Licht ist, der höheren Temperatur entsprechend, weißer als das der gewöhnlichen Kohlenlampe. Sie brennt mit einer Belastung von 1,5 bis 1,7 Watt pro HK (kleine individuelle Verschiedenheiten sind bei der Dünne des Drahtes nicht zu vermeiden gewesen) und hat bei dieser Belastung eine normale Lebensdauer von 400 bis 500 Stunden. Bei Wechselstrom scheint sie etwas geringere Lebensdauer zu haben als bei Gleichstrom. Vielleicht weil der dünne Tantaldraht sich innerhalb jedes

Digitized by Google

Stromwechsels verhältnismäßig stark abkühlt und demgemäß einem kräftigeren Temperaturwechsel ausgesetzt ist, als z. B. der Kohlenfaden. Man wird vielleicht dahin kommen, besondere Wechselstromlampen einzuführen, deren Wattverbrauch um ein geringes höher ist als derjenige der Gleichstromlampen.

Die Tantallampe teilt mit einigen Kohlenlampen die merkwürdige Eigenschaft, daß ihre Lichtstärke innerhalb der ersten, etwa 20, Gebrauchsstunden merklich zunimmt, um 15 bis 20%. Zu gleicher Zeit nimmt der Stromverbrauch um etwa 3 bis 6% zu, während der spezifische Energieverbrauch auf 1,4 Watt pro HK herabsinkt. Die Lampe wird also in den ersten Lebensstunden besser, erreicht ein Optimum, und von da ab nimmt ihre Lichtstärke stetig und langsam ab, bis sie nach etwa 400 Stunden auf 80% des Anfangswertes gesunken ist.

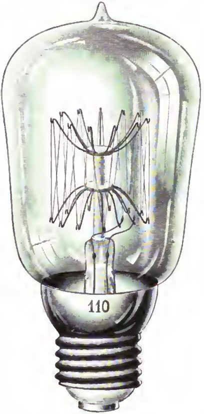


Fig. 2.

Dieser ganze Vorgang deutet offenbar darauf hin, daß in dem lange Zeit erhitzten Tantaldraht, wie übrigens in fast allen Körpern, molekulare Änderungen vor sich gehen. Zum Teil spielt da einfach die Kapillarität mit. Wie schon gesagt, erweicht der Tantalfaden bereits unterhalb der Schmelztemperatur, und wenn diese Erweichung auch nicht soweit geht, daß der Faden in Tropfen zerfällt, so macht sich doch die kapillare Kontraktion geltend. Und zwar erstens darin, daß die Tantalfäden durch Verkürzung straffer werden. In der frischen Lampe sind diese mit Absicht etwas lose gewickelt; in einer Lampe, die 200 Stunden gebrannt hat, sitzen sie straff zwischen den tragenden Häkchen. Bei noch längerem Brennen verlieren die Tantaldrähte ihre Glätte, sie bekommen ein eigentümlich glitzeriges Ansehen, und unter

dem Mikroskop zeigt sich, daß ein Anfang von Tropfenbildung stattgefunden hat; sie sehen aus, als ob sie auf dem Wege wären, rosenkranzförmig zu werden.

Fig. 3 zeigt einen solchen Faden, der 1000 Stunden gebrannt hat, neben einem frischen Faden, beide in hundertfacher Vergrößerung. Dementsprechend büßen auch die Tantaldrähte, wenn sie längere Zeit gebrannt haben, einen Teil ihrer Festigkeit ein. Während sie, wie oben gesagt, im Zustande der Frische rüttelnden Transport sehr wohl vertragen, sind sie nach 250-stündigem Brennen spröde geworden und zerspringen bei mäßiger Erschütterung. Bei der gewöhnlichen Benutzung, wo die Lampen ein für allemal eingeschraubt werden, kommt diese Eigentümlichkeit natürlich kaum zur Beobachtung.

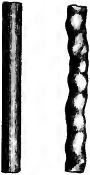


Fig. 3.

Der Tantalfaden unterscheidet sich thermisch vom gewöhnlichen Kohlenfaden erstens dadurch, daß er viel dünner ist, und zweitens durch seinen positiven Temperaturkoeffizienten. Die Folge dieses letzteren Umstandes ist, daß in dem Augenblick, wo der Strom geschlossen wird, die Tantallampe einen wesentlich stärkeren Strom bekommt als die Kohlenlampe. In Verbindung mit dem geringen Volumen des Drahtes wirkt dies dahin, daß der Tantaldraht sich sehr viel schneller als der Kohlenfaden auf seine endgültige Leuchttemperatur erhitzt: Während man bei der Kohlenlampe das Aufglühen des Leuchtfadens mit bloßem Auge ganz deutlich verfolgen kann, geschieht das Aufglühen des Tantaldrahtes in so kurzer Zeit, daß es dem unbewaffneten Auge als momentan erscheint. Versuche, den Hergang stroboskopisch zu verfolgen, sind eben im Gange. Das schnelle Einschießen des Stromes in den Draht bedeutet, wenn es öfter wiederholt wird, vermutlich eine molekulare Anstrengung desselben. Auf der anderen Seite gibt ihm sein positiver Temperaturkoeffizient einen gewissen Widerstand gegen mäßige Überspannung: Erhöht man die Spannung in einer Kohlenlampe, so nimmt dadurch der Widerstand des Kohlenfadens ab, und die Erhitzung wächst bedeutend schneller als die Spannung; bei der Tantallampe ist das Umgekehrte der Fall.

Gegen sehr starke Überspannungen erweist sich die Tantallampe leidlich widerstandsfähig; eine solche, die für 110 Volt gebaut ist, kann man bei langsamem Erhöhen der Spannung bis auf etwa 260 Volt hinauftreiben, ehe sie unter gewaltig blendender Lichtentwickelung durchbrennt.

Digitized by Google

Wenn sie während ihres natürlichen Lebenslaufes eine Beschädigung erleidet, so kommt es nicht selten vor, daß sie sich sozusagen spontan flickt. Reißt nämlich eine der Drahtwindungen, so fällt das frei gewordene Ende häufig auf den Nachbar und klebt dort fest. Die Lampe brennt also weiter, aber, da ein Teil des Widerstandes ausgeschaltet ist, mit stärkerem Strom als vorher; sie wird also plötzlich heller und geht dann freilich auch früher zugrunde.

Aus geschäftlichen Opportunitätsgründen wird die Lampe zurzeit von der Firma Siemens & Halske für im Mittel 110 Volt und 25 HK gebaut. Sie kann auch mit geringerer Spannung und dann natürlich mit entsprechend geringerem Lichteffekt gebrannt werden; auch sind mäßige Abweichungen nach oben bis 120 Volt zulässig. Will man 2 Lampen hintereinander schalten, um 220 Volt zu benutzen, so müssen die Lampen ausgesucht werden, sodaß beide Bestandteile des Paares ziemlich genau den gleichen Strom aufnehmen. Anderenfalls nimmt das besser leitende Exemplar zu viel Strom auf, wird dadurch überanstrengt und geht abnorm früh zugrunde.

Berlin, den 10. August 1905.

Raumkurven und Liniengeometrie.

Von Paul Epstein in Straßburg i. E.

Die Elemente eines dreifach orthogonalen Systems werden vermittels der Formeln von Euler durch vier Parameter $p_1 p_2 p_3 p_4$, welche die Bedingung

$$(1) \qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1$$

erfüllen, in folgender Weise dargestellt:

$$(2)\begin{cases} a_1 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2, & b_1 = 2(p_2 p_3 - p_1 p_4), & c_1 = 2(p_2 p_4 + p_1 p_3) \\ a_2 = 2(p_2 p_3 + p_1 p_4), & b_2 = p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 - p_4^2, & c_2 = 2(p_3 p_4 - p_1 p_2) \\ a_3 = 2(p_2 p_4 - p_1 p_3), & b_3 = 2(p_3 p_4 + p_1 p_2), & c_3 = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_4^2. \end{cases}$$

Man kann nach dem Vorgang von Herrn Study[1]) die Parameter p_i als homogene Punktkoordinaten in einem Raum, den wir *„Parameterraum“* nennen wollen, auffassen; dann entspricht jedem Pnnkt dieses

1) Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. 1893.

Raumes außerhalb der nullteiligen Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, insbesondere jedem reellen Punkt ein bestimmtes orthogonales System, und umgekehrt wird jedes orthogonale System durch einen „Parameterpunkt" (p) repräsentiert, dessen Koordinaten durch die Formeln

$$(3)\quad p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = (1 + a_1 + b_2 + c_3) : (b_3 - c_2) : (c_1 - a_3) : (a_2 - b_1)$$

gefunden werden können.

Zwei orthogonale Systeme, $(a_i b_i c_i)$ mit den Parametern $(p_1 p_2 p_3 p_4)$ und $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ mit den Parametern $(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4)$, kann man zu einem neuen System

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{a}_i = \alpha_i a_1 + \beta_i a_2 + \gamma_i a_3 \\ \bar{b}_i = \alpha_i b_1 + \beta_i b_2 + \gamma_i b_3 \\ \bar{c}_i = \alpha_i c_1 + \beta_i c_2 + \gamma_i c_3 \end{cases}$$

zusammensetzen, dessen Parameter $q_1 q_2 q_3 q_4$ sein mögen. Es entspricht dann der Zusammensetzung der beiden ersten Systeme eine bestimmte Transformation im Parameterraum, durch die man aus den Punkten (p) und (π) den Punkt (q) des komponierten Systems erhält. Nun findet man leicht, daß die Parameter q_i aus den p_i und π_i durch die Formeln der Multiplikation von Quaternionen:

$$(5)\quad \begin{cases} q_1 = \pi_1 p_1 - \pi_2 p_2 - \pi_3 p_3 - \pi_4 p_4 \\ q_2 = \pi_2 p_1 + \pi_1 p_2 - \pi_4 p_3 + \pi_3 p_4 \\ q_3 = \pi_3 p_1 + \pi_4 p_2 + \pi_1 p_3 - \pi_2 p_4 \\ q_4 = \pi_4 p_1 - \pi_3 p_2 + \pi_2 p_3 + \pi_1 p_4 \end{cases}$$

hervorgehen, und diese Gleichungen stellen bei konstanten Parametern π_i eine bestimmte Kollineation des Parameterraums vor, die unter dem Namen *Schiebung*[1]) (erster Art) bekannt ist. Es bleiben dabei zwei konjugiert imaginäre Geraden, die Achsen der Schiebung, fest, und sämtliche Punkte verschieben sich längs der Geraden einer linearen Strahlenkongruenz, die die beiden Achsen zu Leitlinien hat.

Wir haben also den Satz:

Der Zusammensetzung von zwei orthogonalen Systemen entspricht eine Schiebung im Parameterraum.

Die Lage der Achsen ist bedingt durch die Parameter π_i, also durch den zugehörigen Parameterpunkt, dergestalt daß zu einem Parameterpunkt mit den Koordinaten $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4$ ein Paar konjugiert ima-

1) Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. 1890. Eine Schiebung zweiter Art erhält man, wenn man die Systeme in anderer Weise zusammensetzt. Vgl. auch Study, Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. I, S. 351.

ginärer Achsen gehört, deren Plückersche Linienkoordinaten, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, durch die Ausdrücke gegeben sind

$$(6)\qquad \begin{cases} \pi_{12} = \pi_{34} = -\pi_3^2 - \pi_4^2, \\ \pi_{13} = \pi_{42} = \pi_2\pi_3 \pm i\pi_4\omega, \\ \pi_{14} = \pi_{23} = \pi_2\pi_4 \mp i\pi_3\omega, \end{cases}$$

worin $\omega = +\sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2}$.

Umgekehrt gehören aber zu jedem Paar Achsen unendlich viele Punkte (π), denn durch die Gleichnngen (5) sind nnr die Koordinaten $\pi_2 : \pi_3 : \pi_4$ eindeutig bestimmt, während π_1 willkürlich bleibt; alle diese Pnnkte liegen auf einer Geraden, die die beiden Achsen schneidet und durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders gegenüber der Ebene $x_1 = 0$ hindurchgeht.

Bei allen durch die Gleichungen (4) dargestellten Schiebungen geht nicht nur die absolute Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ in sich selbst über, sondern es bleibt auch ein ganzes *Bündel von linearen Komplexen* unverändert, welches durch die paarweise involutorischen *Fundamentalkomplexe*

$$(7)\qquad p_{12} - p_{34} = 0, \quad p_{13} - p_{42} = 0, \quad p_{14} - p_{23} = 0$$

bestimmt ist; die Achsen sämtlicher Schiebungen sind die gemeinsamen Geraden aller Komplexe des Bündels und sind Erzeugende der absoluten Fläche.

Wir kehren zu den Gleichnngen (2) des orthogonalen Systems zurück und nehmen an, daß die Parameter p_i *Funktionen einer Variablen s* sind. Dann können wir die Elemente a_i, b_i, c_i als die Richtungskosinus eines beweglichen rechtwinkligen Dreikants ansehen.

Wir verlangen jetzt, daß die a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ die Richtungscosinus der *Tangente, Haupt- und Binormale* einer *Raumkurve* mit dem Bogenelement ds sein sollen und fragen:

Welche Bedingungen müssen die Parameter p_1, p_2, p_3, p_4 erfüllen, damit die Eulerschen Formeln die Richtungskosinus des begleitenden Dreikants einer Raumkurve darstellen?

Wir gebrauchen im folgenden die Bezeichnung

$$(8)\qquad p_{ik} = p_i p_k' - p_k p_i',$$

wobei die Akzente Differentiationen nach s andeuten.

Sind nun r und ϱ der *Krümmungs-* und der *Torsionsradius* der Raumkurve, so bestehen die *Frenetschen Differentialgleichungen*

$$(9)\qquad \frac{da_i}{ds} = \frac{b_i}{r}, \quad \frac{db_i}{ds} = -\left(\frac{a_i}{r} + \frac{c_i}{\varrho}\right), \quad \frac{dc_i}{ds} = \frac{b_i}{\varrho},$$

und wir können unsere Aufgabe so ausdrücken:

Es sollen die Parameter in den Eulerschen Formeln so bestimmt werden, daß die Frenetschen Gleichungen erfüllt sind.

Wir differenzieren die Ausdrücke für a_1, a_2, a_3 in den Formeln (2) nach s und erhalten:

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{b_1}{r} = p_1 p_1' + p_2 p_2' - p_3 p_3' - p_4 p_4' \\ \frac{1}{2}\frac{b_2}{r} = p_2 p_3' + p_3 p_2' + p_1 p_4' + p_4 p_1' \\ \frac{1}{2}\frac{b_3}{r} = p_2 p_4' + p_4 p_2' - p_1 p_3' - p_3 p_1'. \end{cases}$$

Hier multiplizieren wir der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3, indem wir dafür rechts die Ausdrücke aus (2) einsetzen, addieren die drei Gleichungen und erhalten nach einiger Rechnung, wenn wir noch rechts den Faktor $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1$ weglassen, die einfache Formel

$$(11)\qquad \frac{1}{2r} = p_{14} - p_{23}.$$

In gleicher Weise verfahren wir mit den Ausdrücken für c_1, c_2, c_3 in (2) und erhalten:

$$(12)\qquad -\frac{1}{2\varrho} = p_{12} - p_{34}.$$

Multipliziert man aber die Gleichungen (9) der Reihe nach mit c_1, c_2, c_3 und addiert, so sieht man, daß

$$(13)\qquad p_{13} - p_{42} = 0$$

sein muß, und erkennt ohne besondere Schwierigkeit, daß *unter Voraussetzung der Gleichungen* (11), (12) *und* (13) *die Frenetschen Gleichungen identisch erfüllt sind.* Wir haben damit folgenden Satz gefunden:

Damit durch die Eulerschen Formeln die Richtungskosinus des begleitenden Dreikants einer Raumkurve dargestellt werden, ist notwendig und hinreichend, daß die Parameter p_1, p_2, p_3, p_4 *der Differentialgleichung*

$$p_1 \frac{dp_3}{ds} - p_3 \frac{dp_1}{ds} = p_4 \frac{dp_2}{ds} - p_2 \frac{dp_4}{ds}$$

Genüge leisten; es bestimmen sich dann Krümmung und Torsion der Kurve durch die Formeln (11) *und* (12).

Diese Resultate lassen sich nun durch Übertragung auf den Parameterraum in einfacher Weise geometrisch deuten.

Sind die Richtungskosinus a_i, b_i, c_i Funktionen einer Veränderlichen s, so beschreibt der zugehörige Punkt im Parameterraum eine „Parameterkurve". Diese Kurve wird von besonderer Art sein müssen, wenn die a_i, b_i, c_i gerade die Richtungskosinus des begleitenden Dreikants einer Raumkurve sein sollen. Nun stellen offenbar die p_{ik} *die Plückerschen*

Digitized by Google

Linienkoordinaten der Tangente an die Parameterkurve im Punkt (p) vor, und die Gleichung (13) bedeutet, daß sämtliche Tangenten der Parameterkurve dem Fundamentalkomplex $p_{13} - p_{42} = 0$ angehören müssen. Die Parameterkurve muß also eine *Komplexkurve* sein. Bei einer solchen Kurve ist bekanntlich jeder Kurvenpunkt seiner Schmiegungsebene in dem zum Komplex gehörenden Nullsystem zugeordnet, und es ist daher die Komplexkurve eine Ordnungskurve des Nullsystems. Wir haben also den Satz:

Damit durch die Formeln von Euler die Richtungskosinus des begleitenden Dreikants einer Raumkurve dargestellt werden, ist notwendig und hinreichend, daß die Parameterkurve eine Ordnungskurve des dem Fundamentalkomplex $p_{13} - p_{42} = 0$ zugeordneten Nullsystems ist.

Es stellen also die Eulerschen Formeln eine bestimmte *Transformation* vor, *bei der sämtliche Raumkurven in Kurven eines linearen Komplexes übergehen.*

Nehmen wir z. B. eine *allgemeine Schraubenlinie* und legen die z-Achse parallel den Erzeugenden des Zylinders, auf dem die Kurve verläuft, so können wir, wenn φ irgend eine Funktion von s, k eine Konstante bedeutet, für die Richtungskosinus der *Tangente* ansetzen:

$$a_1 = \varphi, \quad a_2 = \sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}, \quad a_3 = k$$

und erhalten damit die Richtungskosinus der *Hauptnormale*

$$b_1 = \frac{\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad b_2 = -\frac{\varphi}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad b_3 = 0,$$

die Richtungskosinus der *Binormale*:

$$c_1 = \frac{k\varphi}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad c_2 = \frac{k\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad c_3 = -\sqrt{1 - k^2},$$

ferner *Krümmung* und *Torsion*:

$$(14) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\varphi'\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{k\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}}.$$

Nun finden wir mit Hilfe der Formeln (3) die Parameter:

$$\lambda p_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2}}\left(\sqrt{1 - k^2} - \varphi\right)$$

$$\lambda p_2 = -\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}$$

$$\lambda p_3 = -\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}\left(\sqrt{1 - k^2} - \varphi\right)$$

$$\lambda p_4 = -\frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2}}\left(\sqrt{1 - k^2 - \varphi^2}\right),$$

worin infolge (1)

$$\lambda^2 = 4\,\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}}\left(\sqrt{1-k^2}-\varphi\right)$$

zu nehmen ist, und können zunächst die Formeln (11) und (12) für Krümmung und Torsion, sowie die Formel (13) verifizieren. Weiterhin aber sehen wir, daß die Gleichungen

$$(15)\quad kp_1 + \left(1-\sqrt{1-k^2}\right)p_3 = 0, \quad kp_4 - \left(1-\sqrt{1-k^2}\right)p_2 = 0$$

stattfinden, und wenn wir noch beachten, daß wir die Gesamtheit der Schraubenlinien aus den hier betrachteten durch eine Koordinatentransformation ableiten, die sich im Parameterraum, wenn wir von einfacher Translation absehen, in eine Schiebung überträgt, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Der Gesamtheit der allgemeinen Schraubenlinien entsprechen vermöge der Eulerschen Formeln die Strahlen der linearen Strahlenkongruenz, die die Kanten (13) *und* (14) *des Fundamentaltetraeders zu Leitlinien hat, sowie die aus ihnen durch irgend eine Schiebung hervorgehenden Strahlen.* Die Gesamtheit dieser Strahlen bilden gerade den Fundamentalkomplex $p_{13} - p_{42} = 0$.

Umgekehrt ist leicht zu zeigen, daß jeder Strahl des Fundamentalkomplexes als Parameterkurve einer allgemeinen Schraubenlinie aufgefaßt werden kann. Es ist nämlich die Strahlenkongruenz, deren Strahlen die Kanten (13) und (24) des Fundamentaltetraeders treffen, der Schnitt der beiden speziellen Komplexe

$$p_{13} = 0, \quad p_{42} = 0,$$

also bestehen für die Parameter die Differentialgleichungen

$$p_1 p_3' - p_3 p_1' = 0, \quad p_4 p_2' - p_2 p_4' = 0,$$

und es ist

$$(16)\qquad p_3 = \alpha p_1, \quad p_4 = \beta p_2,$$

worin α und β konstant. Daraus ergibt sich

$$p_{14} = \beta p_{12}, \quad p_{23} = -\alpha p_{12}, \quad p_{34} = \alpha\beta p_{12}$$

und

$$(17)\qquad p_{14} - p_{23} = (\alpha+\beta)p_{12}, \quad p_{12} - p_{34} = (1-\alpha\beta)p_{12},$$

folglich nach (11) und (12):

$$\frac{r}{\varrho} = \text{const.},$$

wodurch die Kurve in der Tat als eine allgemeine Schraubenlinie gekennzeichnet ist.

Digitized by Google

Gleichzeitig sehen wir, daß *jeder Komplexkurve eine ganze Familie von Raumkurven zugeordnet* ist. Berechnen wir beispielsweise für die eben betrachtete allgemeine Schraubenlinie nach den Formeln (2) die Richtungskosinus der Tangente, indem wir zu (16) noch die Formel

$$(1+\alpha^2)p_1^2 + (1+\beta^2)p_2^2 = 1$$

hinzunehmen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} - 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{1+\beta^2}p_1^2 \\ a_2 &= \qquad 2(\alpha+\beta)p_1p_2 \\ a_3 &= \frac{2\beta}{1+\beta^2} - 2\frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+\beta^2}p_1^2, \end{aligned}$$

also haben die Erzeugenden der Zylinder, auf denen sämtliche durch die Gleichnngen (16) charakterisierten Schraubenlinien verlaufen, die gleiche Richtung; ihre Richtungskosinus verhalten sich, da wir nach (17) den Fall $\alpha + \beta = 0$ ausschließen dürfen, wie

$$(1+\alpha\beta) : 0 : (\beta - \alpha).$$

Nennen wir die Richtung dieser Erzeugenden die *Achsenrichtung* der Schraubenlinie, so können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Jede Gerade des Fundamentalkomplexes $p_{13} - p_{42} = 0$ *ist Parameterkurve für eine ganze Familie von allgemeinen Schraubenlinien mit gemeinsamer Achsenrichtung und gleichem Verhältnis zwischen Krümmung und Torsion.*

Die Anfgabe, zu einer Raumkurve, von der Krümmung und Torsion als Funktionen der Bogenlänge gegeben sind, die Parameterkurve zu finden, ist gleichbedeutend mit dem *Integrationsproblem der natürlichen Gleichungen* einer Ranmkurve und wäre mit den hier gegebenen Hilfsmitteln in folgender Weise zu lösen. Wir haben in den Formeln (1), (11), (12), (13) vier Gleichungen zur Bestimmnng der Parameter, die wir so schreiben können:

$$\begin{aligned} p_1p_1' + p_2p_2' + p_3p_3' + p_4p_4' &= 0 \\ -p_2p_1' + p_1p_2' + p_4p_3' - p_3p_4' &= -\frac{1}{2\varrho} \\ -p_3p_1' - p_4p_2' + p_1p_3' + p_2p_4' &= 0 \\ -p_4p_1' + p_3p_2' - p_2p_3' + p_1p_4' &= \frac{1}{2r}. \end{aligned}$$

Aus ihnen finden wir durch geeignete Kombination die folgenden

Differentialgleichungen, die eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den Frenetschen Gleichungen besitzen:

$$(18)\qquad \begin{cases} 2p_1' = \frac{p_2}{\varrho} - \frac{p_4}{r}, & 2p_2' = -\frac{p_1}{\varrho} + \frac{p_3}{r}, \\ 2p_3' = -\frac{p_4}{\varrho} - \frac{p_2}{r}, & 2p_4' = \frac{p_3}{\varrho} + \frac{p_1}{r}. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt

$$p_1 + ip_3 = x, \quad p_2 - ip_4 = y$$

und erhalten aus den Gleichungen (18) durch paarweises Zusammenfassen:

$$2x' = y\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{i}{r}\right), \quad 2y' = -x\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{i}{r}\right)$$

und hieraus für x die *lineare Differentialgleichung*

$$(19)\qquad x'' - x'\frac{d}{ds}\log\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{i}{r}\right) + \frac{x}{4}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) = 0.$$

Setzt man aber

$$p_2 + ip_4 = \xi, \quad p_1 - ip_3 = \eta,$$

so ist

$$2\xi' = -\eta\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{i}{r}\right), \quad 2\eta' = \xi\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{i}{r}\right),$$

und man erhält für ξ dieselbe Differentialgleichung.

Die Aufgabe ist also auf die Integration der Differentialgleichung (19) zurückgeführt, und diese geht durch die Substitution

$$(20)\qquad \frac{d\log x}{ds} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right)\cdot t$$

in die bekannte Riccatische Differentialgleichung

$$t' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right)t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{\varrho}\right)$$

über.

Straßburg i. E., Dezember 1903.

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen.

Von Albert Fleck in Berlin.

Historisches. — Das Problem der Darstellung definiter Formen als Summen von Quadraten, welches Herr Hilbert in seinen auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris 1900 gehaltenen Vortrage anfstellte[1]), hatte diesen Forscher im Jahre 1888 zu dem Resultate geführt, daß für *ternäre* Formen solche Darstellung nicht immer möglich sei[2]), selbst bei Zulassung beliebiger reeller Koeffizienten in den Basen der Quadrate.

Herrn E. Landau ist jedoch 1902 zuerst der Nachweis gelungen, daß *jede* definite *binäre* Form $2k$-ten Grades mit rationalzahligen Koeffizienten sicher als Summe von $4k+4$ Quadraten ganzer rationaler Funktionen mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist.[3])

Da aber die Zahl $4k+4$ nur eine obere allgemeine Grenze für die Anzahl der Quadrate darstellt, so läßt sich im Einzelfalle diese Zahl noch vermindern — wie schon aus der eben erwähnten Arbeit des Herrn Landau hervorgeht.

Herr Landau stellte nun das Problem auf: *Welches ist die für eine definite Funktion 2kten Grades äußerste zulässige Anzahl von Quadraten, durch welche solche Funktion darstellbar ist?* Diese Grenzzahl nennt Herr Landau $N(2k)$. Jede definite binäre Form ist dann sicher durch $N(2k)$ Quadrate darstellbar; aber es gibt auch stets Formen, welche genau durch $N(2k)$ und nicht weniger Quadrate dargestellt werden können.

Eine allgemeine Lösung hat jedoch dieses Problem noch nicht erfahren. Bisher hat nur Herr Landau gezeigt[4]), daß $N(0)=4$; $N(2)=5$ und $N(4) \gtreqless 6$ ist.

Die letztere Ungewißheit zu entscheiden, hat Herr Landau persönlich mir dankenswerteste Anregung gegeben.

Formulierung des Problems. — Im folgenden soll gezeigt werden, daß $N(4)=5$ ist, d. h. *daß jede definite biquadratische Funktion einer Variabeln mit rationalzahligen Koeffizienten sich als Summe von fünf*

1) s. dieses Archiv (3) **1**, 224, 1901.
2) s. Math. Annalen **32**, 344 ff. 1888.
3) s. Math. Annalen **57**, 53 ff. 1903.
4) s. dieses Archiv (3) **7**, 271 ff. 1904.

Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darstellen läßt, und daß es biquadratische Formen gibt, zu deren Darstellung fünf Quadrate gerade ausreichen.

Der letztere Teil dieser Behauptung leuchtet ein — worauf auch Herr Landau mich persönlich hinwies — wenn man die Funktion

$$x^4 + 7x^2$$

durch 4 Quadrate auszudrücken versucht.

Sei

$$x^4 + 7x^2 = \sum_{k=1}^{4}(\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^2,$$

so ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1, \qquad 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4) = 0$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + 2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 + \alpha_4\gamma_4) = 7$$

$$2(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 + \gamma_4\beta_4) = 0, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die γ alle = Null sein müssen, und daraus folgt, wenn wir die erste Gleichung mit x^2, die dritte mit 1 multiplizieren: $x^2 + 7 = \sum_{k=1}^{4}(\alpha_k x + \beta_k)^2$.

Dies aber ist unmöglich, wie Herr Landau in seiner letzten Arbeit (oben auch als letzte zitiert) nachgewiesen hat.

Es ist daher nur der Nachweis erforderlich, daß der Wert 6 noch auf 5 reduzierbar ist. Dieser stützt sich auf das von Herrn Landau ebenfalls in seiner letzten Arbeit gewonnene Resultat, daß für jede definite biquadratische Funktion ohne mehrfache Wurzeln

$$f = ax^4 + bx^2 + cx + d$$

mit rationalen Koeffizienten stets eine rationale Größe ξ gefunden werden kann, so daß

$$\psi = f - \left(\xi x + \frac{c}{2\xi}\right)^2 = ax^4 + (b - \xi^2)x^2 + d - \frac{c^2}{4\xi^2}$$

definit bleibt.

Dadurch ist f als Summe von 6 Quadraten leicht erweisbar, da die rechte Seite der letzten Gleichung eine definite *quadratische* Funktion von x^2 darstellt, und für eine solche nach dem obigen $N(2) = 5$ bereits erwiesen ist.

Es läßt sich aber zeigen, daß ξ, welches ja innerhalb gewisser Grenzen jeden rationalen Wert annehmen kann, ohne daß ψ indefinit wird, stets in diesem Bereiche auch so gewählt werden kann, daß

$$ax^4 + (b - \xi^2)x^2 + d - \frac{c^2}{4\xi^2}$$

eine schon durch *vier* Quadrate darstellbare definite Funktion ist.

Digitized by Google

Damit wäre für f bewiesen, daß $N = 5$ ist.

Vorbereitungen zur Lösung. — *Die Funktion f kann stets in eine mit ganzzahligen Koeffizienten umgewandelt werden.* — Um dies zu erreichen, bringen wir die Glieder von f auf einen gemeinsamen Nenner, erweitern dann den Bruch so, daß der Nenner quadratisch wird, und können dann diesen quadratischen Faktor weglassen, da er auf die zu suchende Zahl N ohne Einfluß ist. So entsteht die Funktion

(1) $$F = Ax^4 + Bx^2 + Cx + D,$$

und es ist entsprechend dem obigen:

$$\begin{aligned}\varphi = F - \left(\xi x + \frac{C}{2\xi}\right)^2 &= Ax^4 + (B - \xi^2)x^2 + D - \frac{C^2}{4\xi^2}\\ &= A\left(x^2 + \frac{B - \xi^2}{2A}\right)^2 + D - \frac{C^2}{4\xi^2} - \frac{(B-\xi^2)^2 A}{4A^2}\\ &= A\left(x^2 + \frac{B-\xi^2}{2A}\right)^2 + \frac{4A^2D\xi^2 - A^2C^2 - (B-\xi^2)^2A\xi^2}{4A^2\xi^2}.\end{aligned}$$

Also:

$$A\varphi = A^2\left(x^2 + \frac{B-\xi^2}{2A}\right)^2 + \frac{4AD\xi^2 - AC^2 - (B-\xi^2)^2\xi^2}{4\xi^2}.$$

Können wir hier von $A\varphi$ nachweisen, daß es durch 4 Quadrate darstellbar ist, so folgt dasselbe für $A^2\varphi$ nach dem Satze, daß das Produkt zweier Summen von je 4 Quadraten wieder eine Summe von 4 Quadraten ist, also gilt dann das gleiche von φ, und F wäre daher eine Summe von 5 Quadraten.

Dies führt aber zurück auf die Aufgabe: *Zu zeigen, daß durch geeignete Wahl des rationalen ξ innerhalb seiner Grenzen der Ausdruck:*

(2) $$4AD\xi^2 - AC^2 - (B - \xi^2)^2\xi^2$$

stets als Summe von drei Quadraten darstellbar ist. Hat eine Zahl Δ letztere Eigenschaft, so soll dies im folgenden kurz durch die Gleichung $\Delta = Z_3$ ausgedrückt werden.

Von den ganzen Zahlen sind bekanntlich alle von der Form

$$8n + 1, \quad 8n + 2, \quad 8n + 3, \quad 8n + 5, \quad 8n + 6$$

sicher in 3 Quadrate zerlegbar. Um nur ganze Zahlen betrachten zu brauchen, setzen wir $\frac{\xi}{m}$ statt ξ, und es seien von jetzt an ξ und m ganzzahlig. Wir können ferner schreiben:

$$\frac{\xi}{m} = \frac{2^\varrho u \xi}{2^\varrho u m},$$

wo u ungerade, ϱ ganzzahlig positiv sei. Dann kann $2^\varrho u$ stets so gewählt werden, daß $\frac{\xi}{m}$ innerhalb der ihm gesteckten Grenzen auch dann bleibt, wenn $2^\varrho mu + \zeta$ statt $2^\varrho um$ gesetzt wird, wo ζ eine je nach Erfordern zu bestimmende Zahl ist. Setzen wir statt $2^\varrho mu + \zeta$

einfach m und statt ξu einfach ξ, so wird statt des ursprünglichen ξ geschrieben werden können $\frac{2^{\varrho}\xi}{m}$, wo — für das Folgende durchweg — *ξ und m ungerade Zahlen sind (deren Reste* mod 8 *beliebig je nach Bedarf gewählt werden können).*

Setzen wir in (2) diesen Wert des ursprünglichen ξ ein, so erhalten wir nach Fortlassung des quadratischen Nenners:

$$2^{2+2\varrho} A D \xi^2 m^4 - A C^2 m^6 - (B m^2 - 2^{2\varrho}\xi^2)^2 \xi^2 \cdot 2^{2\varrho}.$$

Da es wesentlich auf die in den drei Gliedern dieses Ausdrucks enthaltenen Potenzen von 2 ankommt, so sondern wir diese, soweit sie vorhanden sind, auch aus den Koeffizienten A, B, C, D aus und schreiben:

$$A = 2^{\alpha} A_1; \quad B = 2^{\beta} B_1; \quad C = 2^{\gamma} C_1; \quad D = 2^{\delta} D_1,$$

wo nun die A_1, B_1, C_1, D_1 ungerade ganze Zahlen sind.

So erhalten wir schließlich als zu diskutierende Größe:

(A) $\Delta = 2^{2+\alpha+\delta+2\varrho} A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{\alpha+2\gamma} A_1 C_1^2 m^6 - (2^{\beta} B_1 m^2 - 2^{2\varrho}\xi^2)^2 \xi^2 2^{2\varrho}.$

Über die Koeffizienten stellen wir gleich anfangs fest, daß

1. A_1 und D_1 positive ganze ungerade Zahlen sind, und daß
2. $C_1 \gtrless 0$, da für $C_1 = 0$ die Funktion F eine quadratische wird, für welche ja $N = 5$ ist.

Da ϱ eine *beliebige* ganze positive Zahl ist, so können wir aus der Klammer in (A) je nach Bedarf den Faktor $2^{2\beta}$ oder $2^{4\varrho}$ herausnehmen, je nachdem wir die Ungleichung $2\varrho > \beta$ oder $2\varrho < \beta$ als bestehend annehmen. Im ersteren Falle setzen wir $2\varrho = \beta + \pi$ (π positiv ganz), im letzteren Falle $2\varrho = \beta - \pi$ (π positiv ganz). Wichtig ist, zu bemerken, daß, wenn die letzteren Gleichungen ganzzahlig erfüllbar sein sollen, *π stets zugleich mit β gerade resp. ungerade zu wählen ist.* Diesen beiden Fällen entsprechend lautet nun der Ausdruck (A)

(P′) $\Delta = 2^{2+\alpha+\delta+\beta+\pi} A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{\alpha+2\gamma} A_1 C_1^2 m^6 - (B_1 m^2 - 2^{\pi}\xi^2)^2 \xi^2 2^{3\beta+\pi}$

(Q′) $\Delta = 2^{2+\alpha+\delta+\beta-\pi} A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{\alpha+2\gamma} A_1 C_1^2 m^6 - (2^{\pi} B_1 m^2 - \xi^2)^2 \xi^2 2^{3\beta-3\pi}.$

Die Exponenten von 2 in den 3 Gliedern sind hier:

(P) $2 + \alpha + \delta + \beta + \pi = A + \pi; \quad \alpha + 2\gamma = B; \quad 3\beta + \pi = \Gamma + \pi$

(Q) $2 + \alpha + \delta + \beta - \pi = A - \pi; \quad \alpha + 2\gamma = B; \quad 3\beta - 3\pi = \Gamma - 3\pi.$

Je nachdem der Exponent A um π *erhöht* oder *erniedrigt* ist, wollen wir später von *erhöhten oder erniedrigten Exponenten* oder auch von dem *Verfahren* (P) oder (Q) sprechen.

Im folgenden wird nun die Größe π (welche positiv und $\equiv \beta \bmod 2$ ist) nach Möglichkeit so variiert werden, daß der Schluß $\Delta = Z_3$ daraus hervorgeht, wobei wir uns je nach Bedarf des Verfahrens (P) oder (Q)

Digitized by Google

der erhöhten oder erniedrigten Exponenten bedienen werden, welche in dem dritten Exponenten den bemerkenswerten Unterschied $+\pi$ resp. -3π zeigen.

1. *Ist α ungerade, so läßt sich stets $\Delta = Z_3$ machen.* — Denn wenden wir das Verfahren (P) an und machen π so groß, daß der erste und dritte Exponent beliebig groß gegen den zweiten $B = \alpha + 2\gamma$, welcher *ungerade* ist, wird, so wird $\Delta \equiv 2^{A+\pi} A_1 D_1 - 2^B A_1 - 2^{\Gamma+\pi} \pmod{2^{B+2}}$, also $\frac{\Delta}{2^{B-1}} \equiv 0 - 2A_1 - 0 \pmod 8 \equiv 2$ oder $6 \pmod 8 = Z_3$, also auch $\Delta = Z_3$.

Dies gilt auch im Falle $B = 0$. Denn dann ist nach (A)

$$\Delta \equiv 2^{A+2\varrho} A_1 D_1 - 2^B A_1 - 2^{6\varrho},$$

wo ϱ an keine Ungleichung gebunden ist. Wird es groß genug gewählt, so folgt stets

$$\frac{\Delta}{2^{B-1}} \equiv 0 - 2A_1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

Wir können also ungerade α im folgenden stets aus der Betrachtung ausschalten und daher $B = \alpha + 2\gamma$ stets als gerade ansehen.

2. *Ist α gerade, so läßt sich, falls A_1 nicht $\equiv 1 \bmod 8$, stets $\Delta = Z_3$ machen.* — Denn das Verfahren (P) führt, wenn π groß genug genommen wird, zu

$$\Delta \equiv 2^{A+\pi} A_1 D_1 - 2^B A_1 - 2^{\Gamma+\pi} \pmod{2^{B+3}},$$

also:

$$\frac{\Delta}{2^B} \equiv 0 - A_1 - 0 \pmod 8.$$

Dies wird $= Z_3$ in allen Fällen, wo nicht $A_1 \equiv 1 \pmod 8$ wird. In letzterem Falle würde eine Zahl von der Form $8m + 7$ sich ergeben, welche bekanntlich nur als Z_4 darstellbar ist. *Es bleibt daher für die Betrachtung nur übrig*: $A_1 \equiv 1 \pmod 8$ bei geradem α.[1]

3. *Die gleichen Beschränkungen wie für A_1 und α gelten auch für D_1 und δ.* — Um dies zu zeigen, transformieren wir die Funktion

$$F = Ax^4 + Bx^2 + Cx + D,$$

indem wir $x = \frac{4D}{z - C}$ setzen und dann mit $(z - C)^4$ multiplizieren. Wir erhalten dann:

$$(3)\quad (z-C)^4 F\left(\frac{4D}{z-C}\right) = Dz^4 + (16BD - 6C^2)Dz^2 + (8C^3 - 32BCD)Dz + (256AD^3 + 16BC^2D - 3C^4)D.$$

1) Im Falle $B = 0$ folgt genau wie vorher: $\frac{\Delta}{2^B} \equiv 0 - A_1 - 0 \pmod 8$, also dasselbe Resultat.

Wir können also F stets in eine Funktion derselben Art verwandeln, in welcher nicht A, sondern D der Koeffizient von z^4 ist und das Glied mit z^3 wegfällt. Nach dem vorigen ist für diese aber stets $\varDelta = Z_3$, wenn δ ungerade, oder wenn bei geradem δ $D_1 \equiv 3$ oder 5 oder 7 (mod 8) ist.[1]

4. *Ist C ungerade, so kann man stets $\varDelta = Z_3$ machen.* — Denn dann ist die transformierte Funktion (3) in ihrem letzten Koeffizienten D' nicht so beschaffen, daß, wenn aus demselben der in D' steckende gerade Faktor $2^{\delta'}$ weggelassen wird, ein ungerader Faktor übrig bleibt, der $\equiv 1$ (mod 8) wäre. Wäre diese dem D_1 der Funktion F entsprechende Größe aber $\equiv 3$ oder 5 oder 7 (mod 8), so wäre nach (3) stets $\varDelta = Z_3$ zu machen. *C kann also im folgenden stets als gerade angesehen werden, also γ als positiv, also auch $B = \alpha + 2\gamma$ stets als positiv.*

5. *Ist B ungerade, also $\beta = 0$, so kann stets $\varDelta = Z_3$ werden.* — Denn für $\beta = 0$ wären nach (A) die drei Exponenten: $2 + \alpha + \delta + 2\varrho$; $\alpha + 2\gamma$; 2ϱ. Ist hier $\alpha + 2\gamma = 2k$, so setze man $\varrho = k$, dann werden die Exponenten $2 + 2k + \alpha + \delta$; $2k$; $2k$; also

$$\frac{\varDelta}{2^{2k}} \equiv 2^{2+\alpha+\delta} A_1 D_1 - A_1 C_1^2 - 1 \equiv \pm 2 \pmod 8, \quad \text{also} \quad \varDelta = Z_3.$$

Dies gilt auch für $k = 0$. *B kann also im folgenden stets als gerade, β als positiv angesehen werden.*

6. *Ist $B = 0$, so kann stets $\varDelta = Z_3$ werden.* — Ist $B = 0$, so ersetzen wir die Funktion F durch die transformierte Funktion (3). In dieser kann dann der Koeffizient von z^2 nicht auch Null sein, da sonst $16BD - 6C^2 = 0$, also wegen $B = 0$ auch $C = 0$ wäre, ein Fall, der schon oben ausgeschieden wurde, da sich F dann auf eine quadratische Funktion reduziert.

Es könnte aber eintreten, daß einmal an Stelle der Funktion F mit *nicht* verschwindendem B die transformierte Funktion (3) zu setzen wäre und in *dieser* der Koeffizient von z^2 verschwände, und daß die Schlüsse, welche sich auf letztere Funktion bezögen, dann wegen des Verschwindens dieses Koeffizienten keine Geltung mehr hätten. In diesem

1) Daß auch in diesem Falle sich Quadrate *ganzer* Funktionen ergeben, folgt, wenn wir die Koeffizienten der Funktion (3) mit A', B', C', D' bezeichnen und $z = \frac{Cx + 4D}{x}$ einsetzen. Dann wird $(4D)^4 F(x) = A'(Cx + 4D)^4 + B'(Cx + 4D)^2 x^2 + C'(Cx + 4D) x^3 + D' x^4$. Ist nun $A'u^4 + B'u^2 + C'u + D' = \sum_1^5 (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)^2$, so ist das auch für $u = \frac{Cx + 4D}{x}$ der Fall, also wenn mit x^4 multipliziert wird, $(4D)^4 F(x) = (4D)^4 \sum_1^5 [\alpha (Cx + 4D)^2 + \beta (Cx + 4D) x + \gamma x^2]^2$.

Falle wäre $16BD - 6C^2 = 0$, ohne daß B verschwände. Dann würden wir die transformierte Funktion (3) durch eine analoge Substitution $= \frac{4D'}{u - C'}$ transformieren und diese der Betrachtung unterziehen. In ihr aber könnte nach dem oben Gesagten der Koeffizient von u^2 nicht mehr verschwinden. *B kann also im folgenden als von Null verschieden angesehen werden.*

Wenden wir uns nach dieser Ausschaltung spezieller Fälle der allgemeinen Diskussion des Ausdrucks (A) zu und betrachten zunächst den Fall, wo der erste Exponent größer als der dritte ist.

7. *Fall:* $2 + \alpha + \delta + \beta > 3\beta$ oder $A > \Gamma$.

A) *Unterfall:* $\alpha + 2\gamma \geqq 3\beta$ oder $B \geqq \Gamma$. — Bei Anwendung des Verfahrens (P) werden die drei Exponenten von 2 gleich $A + \pi$; B; $\Gamma + \pi$, wo $\Gamma + \pi$ nach dem obigen stets gerade ist, ebenso B nach (1). Wir machen π so groß, daß $B + 2 = \Gamma + \pi$, dann wird

$$\frac{\varDelta}{2^B} \equiv 0 - 1 - 4 \pmod 8 = Z_3.$$

B) *Unterfall:* $\alpha + 2\gamma < 3\beta$ oder $B < \Gamma$. — Bei Anwendung des Verfahrens (Q) werden die drei Exponenten von 2 gleich $A - \pi$; B; $\Gamma - 3\pi$. Hier muß $\alpha + 2\gamma$ nach **4.** positiv sein. Wir wählen nun π so, daß $\Gamma - 3\pi = 3\beta - 3\pi$ möglichst wenig von $\alpha + 2\gamma$ verschieden ist.

Da beide gerade sind, so kann ihre Differenz dann nur gerade sein und einer der 3 Fälle eintreten:

a) $\alpha + 2\gamma - 2 = 3\beta - 3\pi$. Hier ist π sicher nicht 0, da $\alpha + 2\gamma < 3\beta$, also ist sicher $A - \pi > \Gamma - 3\pi$ und

$$\frac{\varDelta}{2^{\Gamma - 3\pi}} \equiv 0 - 4 - 1 \pmod 8 = Z_3.$$

b) $\alpha + 2\gamma + 2 = 3\beta - 3\pi$. Hier ist:

$$\frac{\varDelta}{2^{\alpha + 2\gamma}} \equiv 0 - 1 - 4 \pmod 8 = Z_3.$$

c) $\alpha + 2\gamma = 3\beta - 3\pi$. Auch hier ist π sicher nicht 0 und:

$$\frac{\varDelta}{2^{\alpha + 2\gamma}} \equiv 0 - 1 - 1 \pmod 8 = Z_3.$$

Hiernach scheidet der Fall $2 + \alpha + \delta + \beta > 3\beta$ *oder* $A > \Gamma$ *aus der folgenden Betrachtung vollständig aus.*

8. *Fall:* $2 + \alpha + \delta + \beta < 3\beta$ oder $A < \Gamma$.

A) *Unterfall:* $\alpha + 2\gamma \geqq 2 + \alpha + \delta + \beta$ oder $B \geqq A$. — Bei Anwendung des Verfahrens (P) werden die Exponenten von 2 gleich

$\varDelta + \pi$; B; $\Gamma + \pi$. Machen wir π so groß, daß $\varDelta + \pi = B + 2$, was durch mindestens $\pi = 2$ zu erreichen ist, so folgt:

$$\frac{\varDelta}{2^B} \equiv 4 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

B) *Unterfall:* $\alpha + 2\gamma < 2 + \alpha + \delta + \beta$ oder $B < \varDelta$. — Bei Anwendung des Verfahrens (Q) werden die Exponenten von 2 gleich $\varDelta - \pi$; B; $\Gamma - 3\pi$. *Wir setzen hier $\Gamma = 3\beta$ soweit herunter, bis $3\beta - 3\pi$ gerade eben kleiner als die beiden anderen Exponenten oder wenigstens gleich dem kleineren von ihnen wird.* Dies kann, da ursprünglich Γ der größte Exponent ist, stets nur durch eine wirkliche Verminderung geschehen. π ist daher stets größer als Null.

Während bei dem Fall **7.** aber nachgewiesen werden konnte, daß *nach* der Verminderung der erste Exponent noch immer der größte geblieben war, ist das hier nicht stets der Fall, wodurch die Betrachtung sich kompliziert.

Nennen wir die durch obige Verminderung erreichten Exponenten die *reduzierten Exponenten* und bezeichnen diese mit I; II; III, wo stets $\text{II} = B = \alpha + 2\gamma$ bleibt, so ist: $\text{III} < \text{I}$ und $\text{III} < \text{II}$; oder allenfalls $\text{III} = \text{I}$ oder $= \text{II}$; oder $\text{III} = \text{I} = \text{II}$.

Anderseits ist $\text{I} \gtreqless \text{II}$ möglich. Es kann nun im folgenden der Fall eintreten, daß die reduzierten Exponenten noch nicht sofort für eine Diskussion sich eignen. Dann müssen wir π um eine gewisse Zahl größer oder kleiner nehmen, um $\varDelta$ als Z_3 charakterisieren zu können, d. h. wir müssen die reduzierten Exponenten entweder *noch weiter vermindern* oder *wieder erhöhen.*[1])

Sei a) $\text{I} > \text{II}$.

α) $\text{III} = \text{II}$. Dann sind die reduzierten Exponenten: I; II; II und $\frac{\varDelta}{2^{\text{II}}} \equiv 0 - 1 - 1 \pmod 8 = Z_3$ oder $\equiv 4 - 1 - 1 \pmod 8 = Z_3$ oder $\equiv 2 - 1 - 1 \pmod 8$.

Die letztere Möglichkeit scheidet aus, da wegen $\beta \equiv \pi \bmod 2$ und wegen **1.** der erste reduzierte Exponent $\text{I} = 2 + \alpha + \delta + \beta - \pi$ gerade wird, während auch II gerade ist.

β) $\text{III} = \text{II} - 2$. Die reduzierten Exponenten sind dann: I; II; $\text{II} - 2$ und es ist:

$$\frac{\varDelta}{2^{\text{II}-2}} \equiv 0 - 4 - 1 \pmod 8 = Z_3.$$

γ) $\text{III} = \text{II} - 4$. Die reduzierten Exponenten sind dann: I; II; $\text{II} - 4$. Diese ergeben sich als unbrauchbar. Wir erhöhen sie wieder

1) Es ist klar, daß die reduzierten Exponenten, sobald $\pi > 0$, stets sämtlich gerade sind.

und zwar: I um 2; III also um 6 (s. Formel (Q)), dann folgt: I + 2; II; II + 2. Also
$$\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 0 - 1 - 4 = Z_3.$$

Ist β ungerade, so könnte der Fall eintreten, daß eine Erhöhung von I um 2 nicht möglich ist. Dies träte dann ein, wenn schon für $\pi = 1$ die Exponenten richtig reduziert (s. o.) wären. Dann würde schon eine Erhöhung von I um 1 die unverminderten Exponenten $2 + \alpha + \delta + \beta = A$; $\alpha + 2\gamma = B$; $3\beta = \Gamma$ liefern. Anderseits erhalten wir bei Erhöhung von I um 1: I + 1; II; II − 1, und es ist wegen I > II sicher I + 1 > II − 1, d. h. $A > \Gamma$, was der Bedingung $A < \Gamma$, die für alle Fälle in 8. gilt, widerspräche.

Reduzierte Exponenten könnten also hier nur durch Verminderung von A um mindestens 3, nicht aber schon für $\pi = 1$ (siehe (Q)) entstehen. Daher ist auch stets die Erhöhung von I um 2 möglich.

Sei b) I = II.

α) III = II. Dann sind die reduzierten Exponenten II; II; II. Diese ergeben sich wieder als unbrauchbar. Erhöhen wir I um 2, also III um 6, so folgt II + 2; II; II + 6, also $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 4 - 1 - 0 = Z_3$. Hier könnte wieder der Fall eintreten, daß eine Erhöhung von I um 2 unmöglich wäre. Dann wäre β ungerade und wir erhielten bei Erhöhung um 1 die ursprünglichen Exponenten A; B; Γ resp. II + 1; II; II + 3. Dann ist aber $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 2 - 1 - 0 = Z_3$.

β) III = II − 2. Dann sind die reduzierten Exponenten II; II; II − 2. Erhöhe ich I um 2: II + 2; II; II + 4, so folgt $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 4 - 1 - 0 = Z_3$.

Angenommen, die Erhöhung von I um 2 wäre unmöglich, so wären die ursprünglichen Exponenten A, B, Γ resp. II + 1; II; II + 1. Das kann aber nicht sein, da dann $A = \Gamma$ wäre, hier aber $A < \Gamma$ ist.

γ) III = II − 4. Dann sind die reduzierten Exponenten: II; II; II − 4.

Erhöhung von I um 2 gibt:

II + 2; II; II + 2, also $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 4 - 1 - 4 \pmod 8$,

Erhöhung von I um 4 gibt:

II + 4; II; II + 8, also $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 0 - 1 - 0$,

Erniedrigung von I um 2 gibt:

II − 2; II; II − 10, also $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}-10}} \equiv 0 - 0 - 1$.

Alle diese Maßnahmen geben nichts, wodurch $\varDelta$ als Z_3 sicher charakterisierbar wäre.

Bei ungeradem β kämen als Kombinationen noch in Betracht Erhöhung von I um 1: II + 1; II; II − 1, welches die ursprünglichen Exponenten sein müßten, was aber nicht sein kann, da hier (entgegen der gültigen Bedingung $\Delta < \Gamma$) $\Delta > \Gamma$ wäre; Erhöhung von I um 3 gibt: II + 3; II; II + 8, also $\frac{\Delta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 0 - 1 - 0 \pmod 8$, was ebenfalls für Δ nichts Charakteristisches gibt. *Dieser Fall läßt sich also mittels der bisher angewandten Methoden nicht erledigen.* Wir können leicht das Charakteristische desselben ermitteln: Die Koeffizienten heißen: $2 + \alpha + \delta + \beta - \pi$; $\alpha + 2\gamma$; $3\beta - 3\pi$, wo nach dem Anfang von 8 und 8 B) $3\beta > 2 + \alpha + \delta + \beta > \alpha + 2\gamma$.

Bei der Reduktion der Exponenten erhalten wir die Form: II; II; II − 4. Es wäre also

$$\mathrm{II} = \alpha + 2\gamma, \quad \mathrm{II} = 2 + \alpha + \delta + \beta - \pi, \quad \mathrm{II} - 4 = 3\beta - 3\pi.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich $2\beta - 2\pi = \alpha + \delta - 2$. Ferner ist:

$$2 + \alpha + \delta + (\beta - \pi) = 2 + \alpha + \delta + \frac{\alpha + \delta}{2} - 1 = 1 + \tfrac{3}{2}(\alpha + \delta),$$

oder:

$$2 + 3(\alpha + \delta) = 2\alpha + 4\gamma,$$

woraus:

$$4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta.$$

Fügen wir hier den Inhalt der obigen Ungleichungen hinzu und und schreiben, da

$$3\beta > 2 + \alpha + \delta + \beta \text{ und } \alpha \text{ und } \delta \text{ gerade},$$

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon, \text{ wo } \varepsilon \text{ eine positive ganze Zahl.}$$

Mit dieser Festsetzung ist dann von selbst die weitere Ungleichung $2 + \alpha + \delta + \beta > \alpha + 2\gamma$ erfüllt, denn es ist:

$$2 + \alpha + \delta + \beta = 2 + \alpha + \delta + \frac{2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon}{2} = \varepsilon + 2 + \alpha + \frac{2 + \alpha + 3\delta}{2}$$
$$= \varepsilon + 2 + \alpha + 2\gamma > \alpha + 2\gamma.$$

Der Fall I: $2\beta = 2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon$ (ε ganze positive Zahl), $4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta$, *restiert also für spätere Betrachtungen.*

Sei c) I < II.

α) III = I. Die reduzierten Exponenten sind dann I; II; I. Erhöhung von I um 2 gibt: I + 2; II; I + 6. Je nachdem hier II > I + 4 oder II = I + 4 oder II = I + 2[1]), wird

$$\frac{\Delta}{2^{\mathrm{I}+2}} \equiv 1 - 0 - 0 \pmod 8) = Z_3, \text{ oder } \equiv 1 - 4 - 0 = Z_3,$$

oder $\equiv 1 - 1 - 0$.

1) I ist stets gerade, da $\mathrm{I} = 2 + \alpha + \delta + \beta - \pi$, wo α, δ und $\beta - \pi$ gerade sind; II ist stets gerade.

In letzterem Falle, in welchem die erhöhten reduzierten Exponenten I; I + 2; I sind, erhöhen wir nochmals um 2, so folgt: I + 2; I + 2; I + 6. Diese Erhöhung ist stets möglich, da jetzt erst der erste *gleich* dem zweiten Exponenten wird, bei den ursprünglichen Exponenten aber $B < A$ werden soll.

Auch hier ergibt sich noch nichts Sicheres, da

$$\frac{\Delta}{2^{I+2}} \equiv 1 - 1 - 0 \pmod 8$$

wird. Erhöhen wir also nochmals um 2, so folgt: I + 4; I + 2; I + 12. Dies gibt

$$\frac{\Delta}{2^{I+2}} \equiv 4 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

Diese letztere Erhöhung könnte aber schon unmöglich werden und im Fall eines ungeraden β nur noch eine Erhöhung *um 1* möglich sein. Dann wären I + 3; I + 2; I + 9 die ursprünglichen Exponenten A, B, Γ, was den für diese gültigen Bedingungen auch nicht widerspräche. Doch ist in diesem Falle

$$\frac{\Delta}{2^{I+2}} \equiv 2 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

β) III = I − 2. Dann sind die reduzierten Exponenten I; II; I − 2 und wird:

$$\frac{\Delta}{2^{I-2}} \equiv 4 - 0 - 1 \pmod 8 = Z_3.$$

γ) III = I − 4. Dann sind die reduzierten Exponenten: I; II; I − 4. Erhöhung von I um 2 gibt: I + 2; II; I + 2, also nichts Brauchbares. Da dieses die ursprünglichen Exponenten noch nicht sein können, so erhöhen wir nochmals um 2: I + 4; II; I + 8.

Ist II > I + 4, so wird: $\frac{\Delta}{2^{I+4}} \equiv 1 - 4 - 0 \pmod 8 = Z_3$ oder $\equiv 1 - 0 - 0 = Z_3$.

Ist II = I + 4, so werden die Exponenten: I + 4; I + 4; I + 8, was wegen $B < A$ der Anfangszustand noch nicht sein kann.

Erhöhen wir um 2, so folgt: I + 6; I + 4; I + 14, also

$$\frac{\Delta}{2^{I+4}} \equiv 4 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

Ist dies nicht möglich, so erhöhen wir um 1: I + 5; I + 4; I + 11. Dann ist

$$\frac{\Delta}{2^{I+4}} \equiv 2 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

Ist II = I + 2, so werden die Exponenten I; I + 2; I − 4. Bei Erhöhung um 2 folgt: I + 2; I + 2; I + 2. Dies kann der Anfangszustand noch nicht sein.

Dann ergibt eine weitere Erhöhung *um 1*: I + 3; I + 2; I + 5, also

$$\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{I}+2}} \equiv 4 - 1 - 0 \pmod 8 = Z_3.$$

Hiermit ist der Fall 8, wo $\varDelta < \Gamma$, vollständig erledigt. Es ist in jedem Spezialfall hier der Nachweis gelungen, daß bei geeigneter Wahl der veränderlichen Größen $\varDelta$ als Summe von 3 Quadraten darstellbar ist. Die *einzige Ausnahme* bildet der Fall I:

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon, \quad 4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta, \quad \varepsilon \text{ ganz und positiv.}$$

Da mit 7 der Fall $\Gamma < \varDelta$ erledigt war, so bleibt übrig die Diskussion von:

9. Fall: $2 + \alpha + \delta + \beta = 3\beta$ oder $\varDelta = \Gamma$.

A. Unterfall: $\alpha + 2\gamma < 2 + \alpha + \delta + \beta$ oder $B < \varDelta$. — Wenden wir hier das Verfahren (*Q*) an, so werden die Exponenten: $\varDelta - \pi$; B; $\varDelta - 3\pi$. Für jeden von 0 verschiedenen Wert von π wird also hier der erste Exponent größer als der dritte. Also ist auch bei den reduzierten Exponenten stets I > III.

Sei a) III = II. Dann sind die reduzierten Exponenten I; II; II und

$$\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 0 - 1 - 1 \pmod 8 = Z_3 \quad \text{oder} \quad \equiv 4 - 1 - 1 = Z_3.$$

Daß das erste Glied nur $\equiv 0$ oder 4, nicht $\equiv 2$ werden muß, folgt daraus, daß schon für $\pi = 1$ der Unterschied von $\varDelta - \pi$ und $\varDelta - 3\pi$ gleich 2 würde, während für größere π er sicher > 3 wird.

Sei b) III = II − 2. Dann sind die reduzierten Exponenten I; II; II − 2. Hier ist zwar I > II − 2, aber es bestehen die Möglichkeiten

α) I > II. Dann ist $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}-2}} \equiv 0 - 4 - 1 \pmod 8 = Z_3$,

β) I = II: II; II; II − 2.

Durch Erhöhung von I um 2 kommt: II + 2; II; II + 4, durch Erhöhung von I um 4 kommt: II + 4; II; II + 10 usw.

Hieraus ist ersichtlich, daß Erhöhung um gerade Zahlen niemals zum ursprünglichen Zustande zurückführt, bei welchem ja $\varDelta = \Gamma$ sein soll. Der Fall eines geraden β kommt hier also außer Betracht.

Für ein ungerades β bleibt nur übrig die Erhöhung um 1. Dann werden die Exponenten II + 1; II; II + 1, welches die ursprünglichen Exponenten $\varDelta$; B; Γ sein müßten und (s. o.) auch sein können. In diesem Falle wird $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 2 - 1 - 2$, d. h. wir können daraus keinen Schluß ziehen, ebenso wie auch etwaige *Erniedrigungen* der reduzierten Exponenten keinen Schluß zulassen.

Dieser Fall läßt sich daher mittels der bisher angewandten Methoden nicht erledigen. Die Exponenten sind hier: $2 + \alpha + \delta + \beta$; $\alpha + 2\gamma$; 3β oder II + 1; II; II + 1.

Es gelten also die Bedingungen:

$$2 + \alpha + \delta + \beta = 3\beta, \quad 2 + \alpha + \delta + \beta = (\alpha + 2\gamma) + 1$$

oder

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta, \quad 4\gamma = 4 + \alpha + 3\delta.$$

Der Fall II: $2\beta = 2 + \alpha + \delta$, $4\gamma = 4 + \alpha + 3\delta$ *restiert also für spätere Betrachtungen.*

Sei c) III = II − 4. Dann sind die reduzierten Koeffizienten I; II; II − 4. Bei Erhöhung um 2: I + 2; II; II + 2. Hier ist I > II − 4, und es gibt drei Möglichkeiten

α) I > II, dann ist: $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}}} \equiv 0 - 1 - 4 \pmod 8) = Z_3$;

β) I = II − 2, dann folgt aus den reduzierten Exponenten: II − 2; II; II − 4, daß $\frac{\varDelta}{2^{\mathrm{II}-4}} \equiv 4 - 0 - 1 \pmod 8 = Z_3$;

γ) I = II, dann ist II + 2; II; II + 2 sicher der Anfangszustand $\varDelta$; B; Γ, da hier $\varDelta = \Gamma$ und $B < \varDelta$.

Weitere Erhöhung ist also nicht möglich. Nur gerade β kommen hier in Betracht, da bei Erhöhung um 1 nicht schon der Anfangszustand eintreten kann. Sowohl die reduzierten Exponenten, wie die um 2 erhöhten, aber auch die noch weiter erniedrigten versagen hier. *Der Fall läßt sich daher mittels der bisher angewandten Methoden nicht erledigen.* Die Koeffizienten sind hier: $2 + \alpha + \delta + \beta$; $\alpha + 2\gamma$; 3β oder II + 2; II; II + 2.

Also gelten die Bedingungen:

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta, \quad 4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta.$$

Dieser Fall wird unter den Fall I *subsumiert werden können, wenn wir dort auch die Bedingung $\varepsilon = 0$ zulassen.*

B) Unterfall: $\alpha + 2\gamma \gtrless 2 + \alpha + \delta + \beta$ oder $B \gtrless \varDelta$, wobei zugleich $\varDelta = \Gamma$ oder $2 + \alpha + \delta + \beta = 3\beta$ gilt. — Weder die Methode (P), noch (Q) liefern hier etwas für $\varDelta$ Charakteristisches. *Also sind auch diese Fälle durch die bisher angewandten Methoden nicht zu entscheiden.*

Die Bedingung: $\alpha + 2\gamma = 2 + \alpha + \delta + \beta (= 3\beta)$ liefert hier

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta, \quad 4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta.$$

Die Bedingung: $\alpha + 2\gamma > 2 + \alpha + \delta + \beta (= 3\beta)$ gibt

Fall III: $2\beta = 2 + \alpha + \delta$, $4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta + 2\eta$ (η ganze positive Zahl).

Läßt man für η auch den Wert 0 zu, so ist der vorige Fall durch die letzteren Gleichungen mit dargestellt.

---

10. *Wir fassen nunmehr alle für eine weitere Betrachtung restierenden Fälle zusammen:*

Fall I: $2\beta = 2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon,\quad 4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta \ (\varepsilon \geqq 0),$

Fall II: $2\beta = 2 + \alpha + \delta,\quad 4\gamma = 4 + \alpha + 3\delta,$

Fall III: $2\beta = 2 + \alpha + \delta,\quad 4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta + 2\eta \ (\eta \geqq 0).$

11. *Es soll nun gezeigt werden, daß die Fälle* I *und* II *sich auf den Fall* III *zurückführen lassen* Dies geschieht, indem wir statt der Funktion $F = Ax^4 + Bx^2 + Cx + D$ die transformierte Funktion (3) benutzen:

$$(3)\quad (z - C)^4 F = Dz^4 + (16BD - 6C^2)Dz^2 + (8C^3 - 32BCD)Dz + (256AD^3 + 16BC^2D - 3C^4)D.$$

Kann bewiesen werden, daß Fall I und II der ersteren Funktion für die letztere auf Fall III zurückführt, so ist dieser Fall allein noch zu diskutieren, und kann durch umgekehrte Transformation das, was für die letztere Funktion gilt, auch für die erstere bewiesen werden.

Zunächst bestimmen wir die Potenzen von 2, welche die Koeffizienten in der transformierten Funktion (3) enthalten. Heißen diese Koeffizienten resp. A', B', C', D', und seien die Exponenten von 2, die in ihnen enthalten sind, α', β', γ', δ', so daß

$$A' = 2^{\alpha'} A_1';\quad B' = 2^{\beta'} B_1';\quad C' = 2^{\gamma'} C_1';\quad D' = 2^{\delta'} D_1',$$

wo die A_1', B_1', C_1', D_1' ungerade sind. Diese Benennungen entsprechen genau denen, welche sich auf die Funktion F bezogen, da nach dem früheren

$$A = 2^{\alpha} A_1;\quad B = 2^{\beta} B_1;\quad C = 2^{\gamma} C_1;\quad D = 2^{\delta} D_1.$$

Setzen wir die letzteren Werte in die Koeffizienten der Fnnktion (3) ein, so folgt:

$$A' = D = 2^{\delta} D_1,$$

$$B' = 16BD^2 - 6C^2D = 2^{4+\beta+2\delta} B_1 D_1^2 - 2^{1+2\gamma+\delta}\cdot 3 C_1^2 D_1,$$

$$C' = 8C^3D - 32BCD^2 = 2^{3+3\gamma+\delta} C_1^3 D_1 - 2^{5+\beta+\gamma+2\delta}\cdot B_1 C_1 D_1^2,$$

$$D' = 256AD^4 + 16BC^2D^2 - 3C^4D = 2^{8+\alpha+4\delta} A_1 D_1^4 + 2^{4+\beta+2\gamma+2\delta} B_1 C_1^2 D_1^2 - 2^{4\gamma+\delta}\cdot 3 C_1^4 D_1.$$

Um nicht für jeden Fall die Größen α', β', γ', δ' einzeln bestimmen zu müssen, vereinigen wir die 3 Fälle unter die eine Formel:

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta + 2\varepsilon\ (\varepsilon \geqq 0),\quad 4\gamma = 2 + \alpha + 3\delta + 2\nu\ (\nu \geqq 0)).$$

Hier entspricht dem *Fall* I das Wertepaar $\varepsilon = \varepsilon$; $\nu = 0$, *Fall* II $\varepsilon = 0$; $\nu = 1$, *Fall* III $\varepsilon = 0$; $\nu = \eta + 2$.

Diese allgemeinen Werte von β und γ setzen wir oben ein und erhalten:

$$(6)\quad \begin{cases} A' = 2^{\delta} D_1, \\ B' = 2^{\frac{10+\alpha+5\delta+2\varepsilon}{2}} B_1 D_1^2 - 2^{\frac{4+\alpha+5\delta+2\nu}{2}} \cdot 3 C_1^2 D_1, \\ C' = 2^{\frac{18+3\alpha+13\delta+6\nu}{4}} C_1^3 D_1 - 2^{\frac{26+3\alpha+13\delta+4\varepsilon+2\nu}{4}} B_1 C_1 D_1^2; \\ D' = 2^{8+\alpha+4\delta} A_1 D_1^4 + 2^{6+\alpha+4\delta+\varepsilon+\nu} B_1 C_1^2 D_1^2 - 2^{2+\alpha+4\delta+2\nu} \cdot 3 C_1^4 D_1. \end{cases}$$

Hieraus sind sofort die α', β', γ'. δ' bestimmbar. Sie werden im

Fall I: $\alpha' = \delta$; $\beta' = \frac{4+\alpha+5\delta}{2}$; $\gamma' = \frac{18+3\alpha+13\delta}{4}$; $\delta' = 2+\alpha+4\delta$,

Fall II: $\alpha' = \delta$; $\beta' = \frac{6+\alpha+5\delta}{2}$; $\gamma' = \frac{24+3\alpha+13\delta}{4}$; $\delta' = 4+\alpha+4\delta$.

Die Bedingungsgleichungen werden aber hier:

im *Fall* I: $2\beta' = 2 + \alpha' + \delta'$, $4\gamma' = 6 + \alpha' + 3\delta' + 2\cdot 3$,

was dem Falle III für $\eta = 3$ entspricht, so daß also durch Transformation von F in die Funktion (3) der für erstere gültige Fall I in den für letztere gültigen Fall III übergeführt wird;

im *Fall* II: $2\beta' = 2 + \alpha' + \delta'$, $4\gamma' = 6 + \alpha' + 3\delta' + 2\cdot 3$,

was wieder dem Falle III für $\eta = 3$ entspricht, so daß der obige Schluß auch hier gilt. *Fall* I *und* II *können daher, weil sie durch Transformation der Funktion* F *auf Fall* III *reduzierbar sind, im folgenden außer Betracht kommen. Es restiert also nur noch die Betrachtung des Falles* III:

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta, \quad 4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta + 2\eta \quad (\eta \geqq 0).$$

12. *Der Sonderfall* $\eta = 0$ *läßt sich auf ein von Null verschiedenes* η *zurückführen.* — Es ist notwendig, dieses zu tun, da der Fall $\eta = 0$ Schwierigkeiten machen würde. Da $\nu = 2$ wird für $\eta = 0$, so suchen wir unter Einsetzung des letzteren Wertes in (6) die α', β', γ', δ' der transformierten Funktion zu bestimmen: Berücksichtigen wir, daß im Falle III $\varepsilon = 0$ ist, so folgt

$$\alpha' = \delta, \quad \beta' = \tfrac{1}{2}(8 + \alpha + 5\delta), \quad \delta' = 6 + \alpha + 4\delta.$$

Ferner wird:

$$C' = 2^{\frac{30+3\alpha+13\delta}{4}} (C_1^3 D_1 - B_1 C_1 D_1^2).$$

Hier ist die Klammer eine gerade Zahl. Enthält sie die Potenz 2^{ω}, so wird $\gamma' = \frac{1}{4}(30 + 3\alpha + 13\delta + 4\omega)$. Aus diesen Werten ergeben sich aber die Bedingungsgleichungen dieses Falles für die transformierte Funktion:

$$2\beta' = 2 + \alpha' + \delta', \quad 4\gamma' = 6 + \alpha' + 3\delta' + 2(3 + 2\omega),$$

d. h. Fall III für $\eta = 0$ führt bei Transformation auf Fall III für $\eta = 3 + 2\omega$, was sicher *positiv* ist.

Digitized by Google

13. *Es bleibt nun allein noch der Fall übrig:* $2\beta = 2 + \alpha + \delta$, $4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta + 2\eta$ $(\eta > 0)$. — Hier sind die Exponenten von 2 in dem zu diskutierenden Ausdruck Δ: $2 + \alpha + \delta + \beta$; $\alpha + 2\gamma$; 3β, oder, wie leicht aus den Bedingungsgleichungen hervorgeht:

$$3\beta;\quad 3\beta + \eta;\quad 3\beta \qquad (\eta > 0).$$

Sei hier β *ungerade*, so ergibt sich durch Anwendung des Verfahrens (Q) $3\beta - \pi$; $3\beta + \eta$; $3\beta - 3\pi$. Für $\pi = 1$ wird dies $3\beta - 1$; $3\beta + \eta$; $3\beta - 3$, also:

$$\frac{\Delta}{2^{3\beta-3}} \equiv 4 - 0 - 1 \pmod 8 = Z_3.$$

Ungerade β kommen also nicht mehr in Betracht.

Sei β *gerade*, so wird auch η gerade, wir schreiben also 2ϑ statt η und haben dann die Bedingungsgleichungen:

$$2\beta = 2 + \alpha + \delta,\quad 4\gamma = 6 + \alpha + 3\delta + 4\vartheta \qquad (\vartheta > 0).$$

Aus (A) erhalten wir nun, wenn wir $2\varrho = \beta$ annehmen, was ja, da β gerade, jetzt erlaubt ist:

$$\Delta = 2^{2+\alpha+\delta+\beta} A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{\alpha+2\gamma} A_1 C_1^2 m^6 - (B_1 m^2 - \xi^2)^2 \xi^2 2^{3\beta}$$
$$= 2^{3\beta} A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{3\beta+2\vartheta} A_1 C_1^2 m^6 - (B_1 m^2 - \xi^2)^2 \xi^2 2^{3\beta}.$$

Hier wird die Klammer auf der rechten Seite aber gerade, also ihr Quadrat mindestens durch 4 teilbar. Es sei:

$$B_1 m^2 - \xi^2 = 2^{1+k} U \text{ (wo } U \text{ ungerade und } k \geqq 0),$$

dann wird:

$$\frac{\Delta}{2^{3\beta}} = A_1 D_1 \xi^2 m^4 - 2^{2\vartheta} A_1 C_1^2 m^6 - 2^{2+2k} U^2 \xi^2$$

oder

$$\frac{\Delta}{2^{3\beta}} \equiv 1 - 2^{2\vartheta} - 2^{2+2k} \pmod 8 \qquad {\scriptstyle (\vartheta > 0) \atop (k \geqq 0)}.$$

Die beiden letzten Glieder sind je nach den Werten von ϑ und k kongruent 4 oder 0 (mod 8). Es folgt daher eine der Kongruenzen $\frac{\Delta}{2^{3\beta}} \equiv 1 - 4 - 4 \pmod 8$ oder $\equiv 1 - 4 - 0$ oder $\equiv 1 - 0 - 4$ oder $\equiv 1 - 0 - 0$.

In allen diesen Fällen wird $\frac{\Delta}{2^{3\beta}} = Z_3$.

Hiermit ist bewiesen, daß Δ durch passende Wahl von ξ, m und π stets so bestimmt werden kann, daß es als Summe von 3 Quadraten darstellbar ist, woraus folgt, daß $N(4) = 5$ sein muß.

Berlin, den 22. Dezember 1903.

Digitized by Google

Sur l'équation différentielle de Monge;

Par M. W. Kapteyn à Utrecht.

(Suite.)

11. Considérons, avant de terminer, encore le cas particulier où la fonction D, intégrale de l'équation (3), satisfait aux deux membres de cette équation séparément. On a dans ce cas

$$\theta_{22}\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - 2\theta_{12}\frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q} + \theta_{11}\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2 = 0$$

et

$$\theta_{22}\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} - 2\theta_{12}\frac{\partial^2 D}{\partial p \partial q} + \theta_{11}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2 - (\lambda + \mu)\frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q} + \lambda\mu\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 D}{\partial q^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 D}{\partial p \partial q} + \lambda\mu\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} = 0.$$

La première de ces équations donne lieu à deux hypothèses

$$\frac{\partial D}{\partial q} - \lambda\frac{\partial D}{\partial p} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial q} - \mu\frac{\partial D}{\partial p} = 0.$$

En introduisant ces hypothèses dans la seconde de ces équations celle-ci donne respectivement

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q} - \mu\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu}{\partial q} - \lambda\frac{\partial \mu}{\partial p} = 0.$$

Or, nous verrons bientôt (Art. 12) que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q} - \mu\frac{\partial \lambda}{d p} = 0$$

est une conséquence de l'équation différentielle

$$\frac{\partial D}{\partial q} - \lambda\frac{\partial D}{\partial p} = 0$$

et que de la même manière $\frac{\partial D}{\partial q} - \mu\frac{\partial D}{\partial p} = 0$ entraîne l'équation

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} - \lambda\frac{\partial \mu}{\partial p} = 0.$$

On aura donc les deux cas suivants

$$\frac{\partial D}{\partial q} - \lambda\frac{\partial D}{\partial p} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial q} - \mu\frac{\partial D}{\partial p} = 0$$

ou, en choisissant comme variables indépendantes q et θ_1,

$$D_1 - DD_2 = 0 \quad \text{et} \quad D_1 + DD_2 = 0.$$

Adoptons la première hypothèse. Dans ce cas l'intégrale générale est représentée par les formules

$$D = \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}} = u^2, \quad \theta_1 = \varphi(u^2) - u^2 v, \quad q = v,$$

φ étant une fonction arbitraire.

En suivant le même chemin qu'auparavant, on obtient ici

$$T\theta_{11} = 2u(\varphi' - v), \qquad T\theta_{12} = 2u(v - \varphi')\frac{\partial p}{\partial v} - u^2\frac{\partial p}{\partial u},$$

$$T\theta_{12} = \frac{\partial \theta_2}{\partial u}, \qquad T\theta_{22} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \frac{dp}{dv}\frac{\partial \theta_2}{\partial u}, \qquad T = \frac{\partial p}{\partial u}.$$

L'égalisation des deux valeurs de θ_{12} et l'équation $D = u^2$ donnent maintenant

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = 2u(v - \varphi')\frac{\partial p}{\partial v} - u^2\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = u^2\frac{\partial p}{\partial v},$$

d'où

$$u\frac{\partial^2 p}{\partial u\, dv} + (\varphi' - v)\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0.$$

On voit donc que $P = \frac{\partial p}{\partial v}$ est l'intégrale générale de l'équation

$$u\frac{\partial P}{\partial u} + (\varphi' - v)\frac{\partial P}{\partial v} = 0$$

ou

$$P = f'[uv - \int^u \varphi'(u^2)du],$$

$f'(t)$ étant la dérivée d'une fonction arbitraire $f(t)$. Posons, pour faire disparaître tout signe d'intégration,

$$\int^u \varphi'(u^2)du = ug''(u),$$

alors on aura

$$\varphi(u^2) = 2u^2 g'' - 4ug' + 4g$$

et

$$P = \frac{\partial p}{\partial v} = f'[u(v - g'')].$$

En introduisant encore une fonction arbitraire de u, de la forme $r''(u)$, on obtient

$$p = \frac{1}{u}f[u(v - g'')] + r''(u).$$

De cette valeur de p se déduit

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial v} = u^2 f',$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

d'où

$$\theta_2 = uf + \sigma(u).$$

En comparant la valeur de $\frac{\partial \theta_2}{\partial u}$ avec la valeur précédente on trouve que la fonction $\sigma(u)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\sigma'(u) = -u^2 r'''(u).$$

On a donc

$$\theta_2 = uf[u(v - g'')] - u^2 r'' + 2ur' - 2r,$$
$$\theta_1 = 2u^2 g'' - 4ug' + 4g - u^2 v,$$

et

$$\theta = \theta_1 p - \int p \frac{\partial \theta_1}{\partial u} du.$$

12. Pour déterminer les intégrales communes du système

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$B(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} + (p + \mu q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$C(V) = A(u) \frac{\partial V}{\partial y} + A(p + \mu q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

nous remarquons que

$$\lambda = \frac{\theta_{12} + u^2}{\theta_{11}} = -\frac{\partial p}{\partial v}, \qquad \mu = \frac{\theta_{12} - u^2}{\theta_{11}} = -\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{u}{v - \varphi'} \frac{\partial p}{\partial u},$$
$$A(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial v}, \qquad A(p + \mu q) = \frac{u}{v - \varphi'} \frac{\partial p}{\partial u} + q \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

La première équation $A(V) = 0$ se réduit ici à $\frac{\partial V}{\partial v} = 0$; par suite, en nous servant des notations de l'art. 9,

$$V = F(x, y, z, u).$$

En substituant cette valeur dans la dernière, on obtient

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial y} + \left[\frac{u}{v - \varphi'} \frac{\partial p}{\partial u} + q \frac{\partial \mu}{\partial v}\right] \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

ou, en observant

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{u}{v - \varphi'} \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \frac{u}{(v - \varphi')^2} \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{u}{(v - \varphi')^2} \frac{\partial p}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi' \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

De cette équation on tire

$$F = G(x, u, \alpha), \qquad \alpha = z - y\varphi'(u^2).$$

En introduisant cette valeur dans l'équation $B(V)=0$, celle-ci devient

$$\frac{\partial G}{\partial x}+[p+\mu q-\mu\varphi']\frac{\partial G}{\partial \alpha}=0.$$

Or,

$$p+\mu(v-\varphi')=p+u\frac{\partial p}{\partial u}-(v-\varphi')\frac{\partial p}{\partial v}=r''+ur''',$$

par conséquent les deux intégrales communes sont représentées par

$$u=\text{const.},\qquad z-y\varphi'(u^2)-x(r''+ur''')=\text{const.},$$

et l'intégrale intermédiaire correspondante par

$$z-y\varphi'(u^2)-x(r''+ur''')=\mathfrak{F}(u).$$

Dans le second système

$$A_1(V)=\frac{\partial V}{\partial q}-\mu\frac{\partial V}{\partial p},$$

$$B_1(V)=\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial V}{\partial y}+(p+\lambda q)\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

$$C_1(V)=A_1(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y}+A_1(p+\lambda q)\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

on a

$$A_1(\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{u}{v-\varphi'}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=-\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}+\frac{u}{v-\varphi'}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=0,$$

$$A_1(p+\lambda q)=\lambda-\mu=-\frac{u}{v-\varphi'}\frac{\partial p}{\partial u},$$

ce qui prouve que la fonction λ, que nous avons déduite de l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial D}{\partial q}-\lambda\frac{\partial D}{\partial p}=0,$$

remplit bien la condition

$$A_1(\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}=0.$$

Ici, la première équation prend la forme

$$\frac{\partial V}{\partial v}-\frac{u}{v-\varphi'}\frac{\partial V}{\partial u}=0,$$

d'où

$$V=F(x,\,y,\,z,\,\alpha),\qquad \alpha=u\,(v-h'').$$

La dernière équation

$$C_1(V)=\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

fait voir que la fonction $F(x,\,y,\,z,\,\alpha)$ est indépendante de la variable z, par suite

$$F=G(x,\,y,\,\alpha).$$

En substituant cette valeur dans l'équation $B(V) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

où

$$\lambda = -\frac{\partial p}{\partial v} = -f'[u(v - g'')].$$

Les intégrales communes

$$u(v - h'') = \text{const.} \quad \text{et} \quad y + xf'[u(v - h'')] = \text{const.}$$

donnent ainsi la seconde intégrale intermédiaire

$$y + xf'[u(v - g'')] = \mathfrak{F}[u(v - g'')].$$

13. Pour faire voir comment se fait l'intégration dans un cas donné, considérons l'équation différentielle

$$Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

où

$$H = pqa^2 + (1 + q^2)ab, \quad 2K = (1 + q^2)b^2 - (1 + p^2)a^2,$$

$$L = -(1 + p^2)ab - pqb^2.$$

Comme dans l'art. **10**, on déterminera facilement

$$\theta_{11} = \frac{H}{N^2}, \qquad \theta_{12} = \frac{K}{N^2}, \qquad \theta_{22} = \frac{L}{N^2},$$

où

$$N = (1 + p^2)a^2 + 2pqab + (1 + q^2)b^2.$$

De ces valeurs on tire

$$D = \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}} = \frac{1}{2N},$$

$$\lambda = \frac{\theta_{12} + \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}}}{\theta_{11}} = \frac{b}{a};$$

par suite $\frac{\partial D}{\partial q} - \lambda \frac{\partial D}{\partial p} = 0$, ce qui montre que la première hypothèse est bien remplie.

Or, comme $D = u^2$, on a $N = \frac{1}{2u^2}$, d'où

$$p = -\frac{b}{a} v + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2u^2} - a^2 - b^2}.$$

Pour déterminer $\varphi'(u^2)$, on a

$$T\theta_{11} = 2u(\varphi' - v),$$

par suite

$$2u\varphi' = \theta_{11}\frac{\partial p}{\partial u} + 2uv = -\frac{2bu}{\sqrt{\frac{1}{2u^2} - a^2 - b^2}},$$

et

$$\int \varphi'(u^2)au = \frac{bu}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{1}{2u^2} - a^2 - b^2} = ug''.$$

En comparant maintenant

$$p = \frac{1}{u}f[u(v-g'')] + r''(u)$$

avec la valeur précédente de p, on trouve

$$f(\tau) = -\frac{b}{a}\tau \quad \text{et} \quad r'' = \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{1}{2u^2} - a^2 - b^2},$$

d'où

$$r'' + ur''' = -\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2u^2} - a^2 - b^2}}\cdot$$

En exprimant à présent u et v en fonction de p et q, on obtient les intégrales intermédiaires demandées

$$z + \frac{ax+by}{ap+bq} = \mathfrak{F}[a^2 + b^2 + (ap+bq)^2]$$

et

$$y - \frac{b}{a}x = \mathfrak{F}\left[\frac{(aq-bp)^2}{a^2+b^2+(ap+bq)^2}\right].$$

14. En adoptant la seconde hypothèse $D_1 + DD_2 = 0$, on trouve de la même manière

$$D = u^2, \quad \theta_1 = \varphi(u^2) + u^2 v, \quad q = v, \quad p = \frac{1}{u}f[u(v+g'')] + r''(u),$$

$$\theta_2 = -uf[u(v+g'')] + u^2 r'' - 2ur' + 2r,$$

$$\theta = \theta_1 p - \int p\frac{\partial\theta_1}{\partial u}du$$

et les intégrales intermédiaires

$$y + xf'[u(v+g'')] = \mathfrak{F}[u(v+g'')],$$

$$z + y\varphi'(u^2) - x(r'' + ur''') = \mathfrak{F}(u).$$

Utrecht, 22 février 1904.

Über einen Satz von Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von Edmund Landau in Berlin.

Man versteht in neueren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen unter einem Rationalitätsbereiche ein System von Funktionen einer unabhängigen Variabeln, welches die Eigenschaft hat, daß Summe, Differenz, Produkt und Quotient je zweier ihm angehörigen Funktionen und der Differentialquotient jeder ihm angehörigen Funktion gleichfalls in dem System vorkommt.

Eine homogene lineare Differentialgleichung n ter Ordnung

(1) $$P(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

deren Koeffizienten dem Bereiche angehören, heißt irreduzibel (in bezug auf den Bereich), wenn sie mit keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Koeffizienten dem Bereiche angehören, ein von Null verschiedenes Integral gemeinsam hat.

Herr Frobenius[1]) hat zuerst den Begriff der Irreduzibilität eingeführt und grundlegende Sätze über ihn bewiesen. Er behandelte den Fall einiger besonders wichtiger Bereiche, insbesondere des Systems der eindeutigen analytischen Funktionen. Für diesen Bereich hat er den Satz bewiesen[2]):

I. *Wenn von zwei linear unabhängigen Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung das eine als homogener linearer Differentialausdruck des anderen darstellbar ist, so ist die gegebene Differentialgleichung reduzibel.*

Mit anderen Worten[3]):

II. *Besteht zwischen zwei Integralen* $y_1 (\neq 0)$ *und* z_1 *der Differentialgleichung* (1) *eine Beziehung*

(2) $$z_1 = q_0(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(x)y_1 = Q(y_1),$$

1) „Über den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, 1873, S. 236—270.

2) l. c., S. 268—270.

3) II ist mit I gleichbedeutend. Denn, wenn die beiden in (2) auftretenden Integrale y_1 und z_1 linear abhängig sind, wenn also $z_1 = \omega y_1$ ist, so hat $P(y) = 0$ mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $Q(y) - \omega y = 0$ das Integral y_1 gemeinsam. Da auch die Koeffizienten von $Q(y) - \omega y$ eindeutige analytische Funktionen von x sind, wäre also $P(y)$ auch in diesem Fall reduzibel.

Digitized by Google

wo $q_0(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ *Funktionen des Bereiches sind, ohne daß gleichzeitig*

$$q_0(x) = \cdots = q_{n-2}(x) = 0, \qquad q_{n-1}(x) = \text{constans}$$

ist, so ist die Differentialgleichung (1) *reduzibel.*

Einen zweiten Beweis dieses Satzes hat Hamburger[1]) angegeben.

Da nun alle übrigen Frobeniusschen Sätze über Reduzibilität für einen beliebigen Rationalitätsbereich gelten — die Frobeniusschen Beweismethoden sind ohne weiteres anwendbar —, so hat man mitunter auch den oben angeführten Satz für einen beliebigen Bereich angewendet.[2]) Dennoch gilt der Satz nicht für jeden Bereich, wie ich in § 1 des Folgenden an einem einfachen Beispiel zeigen werde. In § 2 werde ich die Richtigkeit des Satzes für eine umfassende Klasse von Bereichen nachweisen.

1. Es sei das System der rationalen Funktionen von x mit reellen Zahlenkoeffizienten zugrunde gelegt. Dasselbe ist offenbar ein Bereich in dem oben definierten Sinne. In diesem Bereich ist die Differentialgleichung

$$P(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \tag{3}$$

irreduzibel. Denn wäre sie reduzibel, so hätte sie ein von Null verschiedenes Integral mit einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + r(x) y = 0$$

gemeinsam, wo $r(x)$ eine rationale Funktion von x mit reellen Koeffizienten ist. Da das allgemeine Integral von (3) die Form

$$y = a \sin x + b \cos x$$

hat, so bestände also eine Gleichung

$$\frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} = -r(x),$$

$$\frac{a - b \operatorname{tg} x}{a \operatorname{tg} x + b} = -r(x);$$

---

1) „Über die Reduktibilität linearer homogener Differentialgleichungen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 111, 1893, S. 121—123.

2) Man hat dabei übersehen, daß der Rationalitätsbereich nach der gegebenen Definition nicht alle Konstanten zu enthalten braucht. Für einen Bereich, der alle Konstanten enthält, ist die Hamburgersche Beweismethode wörtlich anwendbar.

Digitized by Google

die linke Seite dieser Gleichung kann aber nur dann eine rationale Funktion von x sein, wenn sie konstant ist, d. h. wenn

$$\frac{a}{b} = -\frac{b}{a}$$

ist. Alsdann ist

$$\frac{a}{b} = \pm i,$$

$$\frac{a - b \operatorname{tg} x}{a \operatorname{tg} x + b} = \pm i;$$

diese Zahlen $+ i$ und $- i$, als Funktionen von x betrachtet, gehören jedoch nicht zum Bereich. Die Differentialgleichung (3) ist also in demselben irreduzibel.

Trotzdem besteht zwischen den beiden Integralen von (3)

$$y_1 = \sin x, \quad z_1 = \cos x$$

die Differentialgleichung erster Ordnung

$$z_1 = \frac{d y_1}{d x} = Q(y_1)$$

mit Koeffizienten im Bereiche.

Diese Bemerkungen gelten natürlich für die Differentialgleichung (1) auch dann, wenn man z. B. den Bereich der rationalen Funktionen von x mit reellen algebraischen Zahlenkoeffizienten oder auch nur mit rationalen Zahlenkoeffizienten zugrunde legt, oder noch einfacher den Körper der rationalen Zahlen.

2. Es sei ein Bereich zugrunde gelegt, welcher außer den auf S. 45 angegebenen Voraussetzungen die weitere erfüllt: ist

(4) $$\varrho^k + a_1 \varrho^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

eine beliebige algebraische Gleichung mit Zahlenkoeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$, welche dem Bereiche angehören, so gehören alle Wurzeln der Gleichung (4) dem Bereiche an. Kurz ausgedrückt: Die Konstanten, welche dem Bereiche angehören, reproduzieren sich durch algebraische Operationen, nicht nur durch rationale Operationen.

Für jeden solchen Bereich soll nun der Frobeniussche Satz bewiesen werden, und zwar in der Formulierung II, welche offenbar I enthält. Die in § 1 vorkommenden Bereiche genügen eben der angegebenen Bedingung nicht.

Gesetzt, es bestehe im Bereiche zwischen zwei Integralen $y_1 (\neq 0)$ und z_1 von (1) die Beziehung

(2) $$z_1 = q_0(x) y_1^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(x) y_1 = Q(y_1),$$

wo nicht zugleich

$$q_0(x) = \cdots = q_{n-2}(x) = 0, \quad q_{n-1}(x) = \text{constans}$$

ist, und es sei trotzdem die Differentialgleichnng (1) irreduzibel. Dann folgt ans

$$P(z_1) = PQ(y_1) = 0$$

zunächst, da der Differentialausdruck $PQ(y)$ mit dem irrednziblen $P(y)$ das Integral y_1 gemeinsam hätte, daß die Differentialgleichung

$$PQ(y) = 0$$

durch jedes Integral von (1) befriedigt wird. Es sei nun

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

ein Fundamentalsystem von (1), und es werde

$$Q(y_1) = z_1, \cdots, Q(y_n) = z_n$$

gesetzt. Dann sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ partikuläre Integrale von (1), also von der Form

$$\begin{array}{l} z_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{array}$$

wo die $a_{\varkappa\lambda}$ gewisse Konstanten sind. Bestimmt man nun ω als eine Wurzel der Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

so läßt sich ein System von n nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ so finden, daß die Gleichungen

$$\begin{array}{l} c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{n1} = \omega c_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1 a_{1n} + \cdots + c_n a_{nn} = \omega c_n \end{array}$$

erfüllt sind. Alsdann ist

$$c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n = \omega(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n),$$

$$Q(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n) = \omega(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n).$$

(1) hätte also mit der Differentialgleichung $(n-1)$-ter oder niedrigerer Ordnung

$$Q(y) - \omega y = 0$$

ein von Null verschiedenes Integral, nämlich $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, gemeinsam. Es gibt also mindestens eine Konstante ω[1]), für welche die Resultante der beiden Differentialausdrücke $P(y)$ und $Q(y) - \omega y$ identisch verschwindet. Nach der allgemeinen Theorie[2]) kann diese Resultante als Determinante dargestellt werden, deren Elemente sich aus den Koeffizienten von $P(y)$ und $Q(y) - \omega y$ durch rationale Operationen und Differentiation finden lassen und insbesondere in bezug auf ω von der Form $f(x) + g(x)\omega$ sind, wo $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen des Bereiches sind. Die Resultante hat also, da sie nicht für alle ω identisch verschwindet[3]), die Form

$$f_0(x)\omega^m + f_1(x)\omega^{m-1} + \cdots + f_m(x),$$

wo $m \geqq 1$ ist, $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ Funktionen des Bereiches sind und $f_0(x)$ nicht identisch verschwindet.[4]) Es besteht also für ω eine algebraische Gleichung

$$(6) \qquad \omega^m + g_1(x)\omega^{m-1} + \cdots + g_m(x) = 0,$$

deren Koeffizienten Funktionen aus dem Bereiche sind. Die Gleichung (5) hatte Zahlenkoeffizienten, die jedoch nicht dem Bereiche anzugehören brauchten.

Beide Gleichungen (5) und (6) habe ich völlig im Anschluß an die Entwicklungen Hamburgers ausgeführt (der allerdings nur vom Bereiche der eindeutigen analytischen Funktionen spricht). Für meinen Zweck kommt es nun darauf an, zu zeigen, daß ω einer algebraischen Gleichung

$$\omega^k + a_1\omega^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

mit Zahlenkoeffizienten aus dem Bereiche genügt; denn daraus folgt (nach der am Anfang dieses Paragraphen gemachten Annahme), daß die Zahl ω selbst dem Bereiche angehört, mit anderen Worten, daß der Differentialausdruck $(n-1)$-ter oder kleinerer Ordnung $Q(y) - \omega y$, mit welchem $P(y)$ das Integral $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ gemeinsam hatte, Koeffi-

1) ω braucht jedoch nach dem Bisherigen, da die Konstanten $a_{x\lambda}$ nicht dem Bereiche angehören müssen, nicht aus dem Rationalitätsbereiche zu sein.

2) Vgl. v. Escherich, „Über die Gemeinsamkeit partikulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen", Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 46, 1882, S. 61—82, oder die neuere Darstellung von Herrn Heffter „Zur Theorie der Resultanten zweier linearen homogenen Differentialgleichungen", Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 3, 1902, S. 124—126.

3) Z. B. hätte der als irreduzibel vorausgesetzte Differentialausdruck $P(y)$ mit $Q(y) - 0 \cdot y = Q(y)$ kein Integral $\neq 0$ gemeinsam.

4) Übrigens zeigt die genauere Betrachtung der Resultante, daß $m = n$ ist; doch ist diese Tatsache hier unerheblich.

zienten im Bereiche besitzt; das besagt dann die Unrichtigkeit der Voraussetzung, daß P irreduzibel ist.

Wenn alle Koeffizienten der Gleichung (6) von x unabhängig sind, ist die Behauptung schon bewiesen; anderenfalls differenziere ich die Gleichung (6) nach x und erhalte

$$g_1'(x)\omega^{m-1} + \cdots + g_m'(x) = 0. \tag{7}$$

Dies ist eine Gleichung mit Koeffizienten im Bereiche, welche nicht sämtlich verschwinden; sie habe den genauen Grad l; dann ist

$$1 \leq l \leq m - 1,$$

und (7) läßt sich nach Division mit dem Koeffizienten von ω^l in der Form

$$\omega^l + h_1(x)\omega^{l-1} + \cdots + h_l(x) = 0$$

schreiben. Sind hierin $h_1(x), \ldots, h_l(x)$ nicht sämtlich konstant, so ist die Differentiation zu wiederholen, bis man schließlich, und zwar nach spätestens $m - 1$ Schritten, zu einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten aus dem Bereiche gelangt.

Die Annahme der Irreduzibilität von P führt daher zu einem Widerspruche.

Für die Gültigkeit des Frobeniusschen Satzes ist also nicht die Zugehörigkeit aller Konstanten zum Bereiche erforderlich; denn nach dem soeben Bewiesenen ist der Satz beispielsweise für den Körper der rationalen Funktionen von x mit algebraischen Zahlenkoeffizienten richtig.

Berlin, den 13. August 1905.

Zur Bildung der symmetrischen Funktionen.

Von Carl Kostka in Insterburg.

Unter dem gleichen Titel gibt Herr Saalschütz im IX. Bd. des Archivs S. 113 ff. eine neue hübsch ausgedachte Methode zur Lösung der Aufgabe, eine symmetrische Funktion von n Größen $t_1, t_2, \ldots t_n$ durch die Elementarfunktionen auszudrücken. Hier geschieht mir Unrecht. In der Anmerkung S. 114 wird mein Name genannt mit dem ausdrücklichen Zusatz, meine Arbeit stehe zum Inhalt jenes Aufsatzes in keiner engeren Beziehung. Die Angabe ist nur richtig hinsichtlich der Methode. Dagegen habe ich im 81. Bd. d. J. f. r. u. a. Math. ein Verfahren zur Lösung jener Aufgabe dargelegt[1]), welches hinsichtlich

1) In der Encyklopädie I S. 465 ist das Verfahren erwähnt, in der Anmerkung 38) aber vor dem Zitat J. f. Math. 81, 1875, p. 28 versehentlich mein Name fortgelassen.

Digitized by Google

der Bequemlichkeit seiner Anwendung mit keiner der sonst bekannten Methoden den Vergleich zu scheuen braucht; auch ein zweites in vielen Fällen recht geeignetes Lösungsverfahren ist in Bd. 93 anseinandergesetzt. Ich durfte daher erwarten, im Text jenes Anfsatzes unter Nr. V genannt zu werden. Im J. Bd. 81 habe ich u. a. die beiden Aufgaben gelöst[1]), die bei Saalschütz S. 140 ff. behandelt sind; und zwar ist meine Lösung kürzer als die bei Serret und kürzer als die von Saalschütz. Hier sei mir gestattet, an einigen anderen der von Herrn Saalschütz gewählten Beispiele die Brauchbarkeit meiner Methoden zu zeigen.

Im folgenden werden gewisse aus den Elementarfunktionen gebildete Determinanten benutzt, die ich in meinen Arbeiten J. Bd. 81, 82, 93 mehrfach verwertet und nach verschiedenen Seiten hin untersucht habe. Sie sind dort c-Funktionen, in der Encyklopädie (I S. 465) nach Wronskis Vorgang Aleph-Funktionen genannt. Man wird mir wohl gestatten, wenigstens die äußere Buchstabenbezeichnung für sie hier festzuhalten. Ich nenne c_h die $h$te Elementarfunktion, d. h. die Summe der Kombinationen der t zur $h$ten Klasse ohne Wiederholung. Zum Vergleich mit den Formeln von Saalschütz hat man:

$$c_h = (-1)^h A_h.$$

Dann setze ich die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_\alpha & c_{\alpha+1} & c_{\alpha+2} & \cdots \\ c_\beta & c_{\beta+1} & c_{\beta+2} & \cdots \\ c_\gamma & c_{\gamma+1} & c_{\gamma+2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = C_{\alpha,\beta+1,\gamma+2\cdots},$$

wobei jedes c mit einem Index, der negativ ist oder größer als n, der Null gleich und $c_0 = 1$ ist. Die Determinante ist nach den Indices der Diagonalreihe bezeichnet, weil dadurch klar das Gewicht der durch sie dargestellten symmetrischen Funktion hervortritt $= \alpha + (\beta + 1) + (\gamma + 2) + \ldots$ Der Index 0 wird in der Regel fortgelassen, weil in diesem Fall die Determinante einfach um einen Grad sich verringert; auch werden gleiche Indices in Potenzform zusammengefaßt. Es ist also z. B.

$$C_{42^21} = \begin{vmatrix} c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Nun soll die symmetrische Funktion

$$V = \sum t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_{n-1}},$$

1) Sie stammen von Waring her.

deren einzelne Glieder durch die Permutationen der Exponenten entstehen, durch die Elementarfunktionen c ausgedrückt werden. Für derartige Funktionsformen wähle ich auch, wie in J. Bd. 93, die Beziehung $T_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}$ oder z. B. $T_{53^2 2}$ mit ähnlicher Vereinfachung der Indexreihe, wie vorher bei den C. Die allgemeine Regel für jene Umformung ist J. Bd. 81 angegeben und bewiesen. Unter Verwertung der hier gewählten Zeichen (vgl. auch Bd. 82, S. 213 f.) kann sie so ausgesprochen werden:

Zu der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ *in der bestimmten Folge addiere man* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *in beliebiger Anordnung. Von den so erhaltenen Zahlenreihen lasse man jede unberücksichtigt, welche irgend zwei gleiche Zahlen enthält; in jeder anderen zähle man die Anzahl* r *der Inversionen und bestimme, nach der Größe aufsteigend, diejenigen Zahlen* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$ *welche in jener Reihe fehlen. Dann ist:*

$$V = \sum (-1)^r \cdot C_{n-\beta_1,\, n-\beta_2+1,\, n-\beta_3+2,\, \cdots}$$

Die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ sind also für das betreffende C charakteristisch, die Indices der ersten Spalte dieser Determinante sind $n-\beta_1$, $n-\beta_2$, $n-\beta_3, \ldots$; die Summe enthält soviel Glieder, als Zahlenreihen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ sich bilden lassen. Jede Determinante ist höchstens vom Grade des größten α.

Sei nun z. B. vorgelegt, wie bei Herrn Saalschütz, $V = \sum (abc)^5$ oder nach unserer Bezeichnung $V = T_{5^3}$. Die niedrigste Zahl, zu der eine 5 addiert werden darf, ist $n-15$; dann muß die zweite 5 zu $n-10$, die dritte zu $n-5$ hinzugefügt werden, um gleiche Zahlen in der Reihe zu vermeiden. Man erhält daher die Determinante $C_{15} = c_{15}$. Ebenso ergibt sich nur eine Determinante, wenn die erste 5 zu $n-14$, oder $n-13$, $n-12$, $n-11$ zugelegt wird. Fügt man sie zu $n-10$ hinzu, so muß die zweite zu $n-5$ zugesetzt werden, die dritte darf 4 verschiedene Stellen einnehmen. Es gibt auch je 4 Determinanten, wenn die Addition bei $n-9$, $n-8$, $n-7$ oder $n-6$ beginnt. Stehen endlich alle 5 bei den letzten 5 Zahlen, so kommt man auf $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$ Umstellungen und Determinanten C. Somit enthält das Ergebnis 35 Glieder und lautet:

$$V = \begin{cases} C_{15} - C_{14,1} + C_{13,1^2} - C_{12,1^3} + C_{11,1^4} + C_{10,5} - C_{10,4,1} + C_{10,3,1^2} \\ - C_{10,2,1^3} - C_{96} + C_{942} - C_{9321} + C_{92^21^2} + C_{861} - C_{852} + C_{8322} - C_{82^31} \\ - C_{761^2} + C_{7521} - C_{742^2} + C_{72^4} + C_{6^21^3} - C_{6531} + C_{642^21} - C_{632^3} + C_{5^3} \\ - C_{5^241} + C_{5^231^2} + C_{54^22} - C_{54321} + C_{53^22^2} - C_{4^33} + C_{4^23^21} - C_{43^32} + C_{3^5}. \end{cases}$$

Das Resultat hat man fast ohne jede Rechnung. Der Ausdruck für V in Aggregaten der c hat Indexreihen der Glieder von ähnlichem Bau,

wenn man, wie in J. Bd. 93, ein solches Aggregat durch K mit der entsprechenden Reihe von Indices bezeichnet, z. B. $K_{82^31} = c_8 \cdot c_2^3 \cdot c_1$. Um das Ergebnis in dieser zweiten Form, die ja von Herrn Saalschütz erstrebt wird, zu erhalten, sind noch die Determinanten, von denen einzelne vom 5. Grade sind, zu entwickeln und die Glieder zusammenzuziehen. Die Rechnung wird dadurch erleichtert, daß man den Bau der Glieder im voraus kennt: jedes muß das Gewicht 15 haben und höchstens 5 Faktoren c enthalten. Es wäre also z. B. abzuzählen, wie oft $c_7^2 c_1$ in jenen Entwicklungen sich finden kann. Wünscht man, wie Herr Saalschütz, z. B. $\overline{V}_7$, d. h. den Teil von V zu kennen, der höchstens c_7, kein c mit höherem Index enthält, so setze man $c_8 = c_9 = \ldots = c_{15} = 0$; man sieht, daß von den 35 Determinanten noch 18 übrig bleiben; und wünscht man $\overline{V}_7 - \overline{V}_6$, d. h. die Gesamtheit aller Glieder, die jedenfalls c_7 enthalten, nicht aber ein c mit höherem Index, so hat man aus jenen 18 Determinanten nur gewisse Partialdeterminanten zu berücksichtigen, also höchstens Determinanten vom 4. Grade zu entwickeln. Die Rechnung gestaltet sich hinreichend übersichtlich. Überdies könnte man — nötigenfalls nach Entwicklung der vorgelegten Determinante nach den Elementen der letzten Spalte — die Tafeln benutzen, welche ich im J. f. Math. Bd. 93 angegeben habe, dort der Raumersparnis wegen allerdings nur bis zum 8. Grade, doch wie ich ebenda gezeigt habe, mit sehr geringer Mühe weiter ausführbar.

Aus denselben Tabellen kann man das andere Beispiel $\sum a^3 b^2$ von Herrn Saalschütz, T_{23} nach unserer Bezeichnung, in beiden Formen sofort entnehmen:

$$\begin{aligned} T_{23} &= -2C_5 + 2C_{41} - C_{32} - C_{31^2} + C_{2^21} \\ &= -5c_5 + 5c_4c_1 - c_3c_2 - 2c_3c_1^2 + c_2^2c_1. \end{aligned}$$

Bei dem Beispiel $\sum a^8 b^7$ oder T_{87} (S. 132) ergeben sich nach meinem Verfahren 57 Determinanten, zum Teil vom 8. Grade, unter denen allerdings einige gleiche sich finden. Zur Beantwortung besonderer Fragen ist der Ausdruck dennoch geeignet, weil er leicht übersichtlich ist. Weit komplizierter gestaltet sich die Aufgabe S. 139, Anm. 2: $V = \sum a^5 b^4 c^3 d^2 e = T_{54321}$. Die Schwierigkeit liegt nicht in verwickelten Rechnungen, sondern nur in der sorgfältigen Aufmerksamkeit im Abzählen von vielen gleichartigen Ausdrücken; doch bemerkt Herr Saalschütz S. 114 sehr richtig, daß bei manchen Aufgaben, wie die langgestreckten Resultate zeigen, die ihrer Natur nach etwas reichliche Rechnung sich nie wird vermeiden lassen. Man wird zuerst den Teil von V bestimmen, bei welchem die Exponenten 1, 2, 3, 4, 5 in irgend

Digitized by Google

einer Folge auf die letzten Zahlen $n-5, \ldots, n-1$ verteilt bleiben, bei dem also *jedes* C als *höchsten* Index 5 haben muß. Dieser Teil sei $V^{(5)}$; es ist:

$$V^{(5)} = -2C_{5^3} + 2C_{5^2 41} + 2C_{5^2 32} - 2C_{5^2 2^2 1} - 2C_{54^2 1^2} - 2C_{543^2} + C_{54321}.$$

Setzt man hier $c_6 = c_7 = \ldots = 0$, so erhält man nach der Entwicklung den Ausdruck V_5 von Herrn Saalschütz. Man wird dann zu $V^{(6)} - V^{(5)}$ übergehen, also alle C ermitteln, bei denen der höchste Index 6 ist. Hier sind schon mehr als 50 Zahlenreihen zu prüfen, während schließlich der Ausdruck in 12 Glieder sich zusammenzieht. Die Rechnung wird nachher wieder einfacher, ist aber, dies ist zuzugeben, etwas reichlich. Aber, worauf ich besondern Wert legen möchte, in jedem Stadium der Rechnung kann man eine gewisse Kontrolle ausüben. Einmal muß bei jeder Zahlenreihe ein C vom Gewicht 15 sich ergeben; vor allem aber kann jeder Zahlenfaktor eines C im schließlichen Ergebnis leicht geprüft werden auf Grund des folgenden Satzes, den ich J. Bd. 93 S. 92 erwiesen habe:

„Der Faktor von $K_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}}$ in der Entwicklung eines C ist identisch mit dem Faktor des konjugierten C in der Entwicklung von $T_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}}$."

Dabei werden zwei C konjugiert genannt, wenn ihre Indexreihen es sind im Sinne von Cayley.[1]) Zu $642^2 1$ z. B. wird die konjugierte Reihe $542^2 1^2$ erhalten, indem man in 5 Zeilen je 6, 4, 2, 2, 1 Einheiten untereinander schreibt und kolonnenweise addiert. So kommt, um ein Beispiel zu nennen, in der Entwicklung des oben genannten $V^{(6)} - V^{(5)}$ ein Glied $-8 \cdot C_{6531}$ vor, und -8 ist auch der Zahlenfaktor von $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$ in der Entwicklung der Determinante $C_{43^2 2^2 1}$; so läßt jeder der oben genannten Zahlenfaktoren sich leicht prüfen.

Damit sind wir aber zu der zweiten Methode gekommen, welche für die Lösung der vorangestellten Hauptaufgabe aus meinen im J. f. Math. veröffentlichten Arbeiten, insbesondere aus Bd. 93 zu ersehen ist. Sie fordert für die Bestimmung der Determinanten C sowohl wie der Aggregate der c, welche den Wert von V zusammensetzen, keine andere Rechnung als die Entwicklung von Determinanten, eine Operation also, die dem Mathematiker etwa so geläufig ist wie das Auflösen von Klammern. Sei a der Zahlenfaktor von $K_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}$ in der Entwicklung eines C und b derjenige von $K_{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}$ in der Entwicklung des konjugierten C; man bilde das Produkt $a \cdot b$ für jede Determinante C von der betreffenden Dimension (immer haben einige dieser Produkte

1) Phil. Transact. London 1857, S. 491. Vgl. Encyklopädie I S. 461.

den Wert 0): dann ist $\sum ab$, d. h. die Summe aller derart gebildeten Produkte ab, der Faktor von $K_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}$ in der Entwicklung von $T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}$; und dieselbe Zahl $\sum ab$ ist offenbar auch der Faktor von $K_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}$ in der Entwicklung von $T_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}$.[1]) Im Wert von $T_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}$ darf kein C den Grad des größten α, es sei $\bar{\alpha}$, übersteigen. Man zerlege also das Gewicht der symmetrischen Funktion $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots \alpha_{n-1}$ auf jede Art in $\bar{\alpha}$ oder weniger positive Summanden und setze jede solche Summandenreihe als Index eines C im Werte von T. Den Zahlenfaktor dieses C findet man, indem man den Faktor von $c_{\alpha_0} c_{\alpha_1} \ldots c_{\alpha_{n-1}}$ in der Entwicklung des konjugierten C ermittelt. Namentlich die successive Entwicklung aller Determinanten C von bestimmtem Gewicht gestaltet sich besonders einfach. Führt man sie aus und ordnet die Schlußtabelle so an, wie ich es in J. Bd. 93 getan habe (nur die Zahlen rechts von der Hauptdiagonale kommen hier in Betracht), so hat man sofort den Ausdruck in den C für *jedes* T von dem bestimmten Gewicht; durch geeignete leichte Kombination jener Zahlen hat man auch die Entwicklung nach Potenzen von c, wie Herr Saalschütz sie wünscht.

Ich will den Raum des Archivs nicht weiter in Anspruch nehmen, um Dinge vorzutragen, die doch nicht neu sind. Die Behauptung, Bd. IX, S. 114 dieses Archivs, daß meine Arbeiten mit der gestellten Aufgabe in keiner engeren Beziehung ständen, glaube ich hinreichend widerlegt zu haben.

Insterburg, Mitte August 1905.

---

1) Dieser Satz, daß der Faktor von $K_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}$ in der Entwicklung von $T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}$ ebenso groß ist als derjenige von $K_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}$ in der Entwicklung von $T_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}$, ist von Cayley aufgestellt und durch Induktion für die ersten 10 Dimensionen geprüft worden. (Phil. Trans. London 1857, S. 492 f.) Einen vollen Beweis hat Betti (Tort. Ann. Jahrg. 1858, S. 323 f.) und einen andern habe ich (J. f. Math. 93, 93) geliefert. Hier zeigt er sich als ganz einfache, unmittelbar ersichtliche Folge meines oben aus J. Bd. 93 zitierten Satzes, eine Folgerung, die an jener Stelle (J. Bd. 93) nicht gezogen ist.

Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn C. Kostka.

Von L. Saalschütz in Königsberg i. P.

(Auszug eines Schreibens an die Redaktion.)

In dem genannten Aufsatz werden mir von Herrn Kostka zwei Vorwürfe gemacht, daß ich seine Methode nicht im Text meiner qu. Arbeit neben den früheren als V erwähnt habe, und daß ich, in der Anmerkung, von seiner Arbeit gesagt, sie stehe zum Inhalt meines Aufsatzes in keiner engeren Beziehung. Was den ersteren Vorwurf betrifft, so bedauere ich allerdings, den Aufsatz des Herrn Kostka im 81. Bd des Cr. J. zurzeit nicht gekannt zu haben, anderenfalls hätte ich zweifellos seine Methode den anderen bekannten angereiht und charakterisiert; den zweiten Vorwurf glaube ich aber zurückweisen zu dürfen.

Mein Ausdruck: die Arbeit des Herrn Kostka im 93. Bd. von Cr. J. stehe, nebst andern gleichzeitig genannten, zum Inhalt meines Aufsatzes in keiner engeren Beziehung, ist durchaus harmlos gemeint und soll nur ausdrücken, daß sich in der Kostkaschen Arbeit nichts findet, was bei der von mir dargelegten Methode benutzt worden wäre oder hätte benutzt werden können, was ja auch Herr Kostka selbst zugibt. Daß Arbeiten aus demselben Gebiete miteinander überhaupt in Beziehung stehen, ist ja selbstverständlich. — Was aber die Sache selbst betrifft, so verfolgen unsre Methoden, die des Herrn Kostka und die meinige, ganz verschiedene Zwecke; die erstere erzielt Übersichtlichkeit wie sie durch Determinanten-Darstellung gewährt wird, und (in der Abhandlung im 93. Bande) die Möglichkeit, Tabellen aufzustellen, was bis zum Gewicht 8 einschließlich auch wirklich geschieht; die meinige erstrebt praktische Durchführbarkeit bis zur Gewinnung des Endausdrucks.

So hat z. B. bei mir $V = \Sigma\ (abc)^5$ im ganzen 84 Summanden ($\overline{V}_3$ hat 1, $\overline{V}_4 - \overline{V}_3$ 6, $\overline{V}_5 - \overline{V}_4$ 12 usw.), der Ausdruck des Herrn Kostka im vorstehenden Aufsatz zur Lösung derselben Aufgabe enthält 35 Determinanten, darunter 15 vom 5. Grade, deren jede also 120 Glieder enthält; man kann somit ermessen, wieviel Glieder oder Glieder-Gruppen verschwinden oder sich zusammenziehen oder zerstören müssen, um das wirkliche Endresultat zu liefern; wenngleich nicht in Abrede gestellt werden soll, daß bei der Durchführung sich mancherlei Abkürzungen

darbieten würden. — Andererseits ist die Kostkasche Auflösung der Waring-Serretschen Aufgabe kürzer als die meinige.[1])

Wenn also die Arbeiten des Herrn Kostka über symmetrische Funktionen sicher die anerkennende Beachtung der Fachgenossen verdienen, so hoffe ich, daß auch mein Aufsatz daneben nicht als überflüssig angesehen werden wird.

Königsberg, den 22. August 1905.

Fonctions continues sans dérivée;

par M. Ernest Cesàro.

Au cours d'une étude[2]) sur une *ligne continue sans tangentes*, construite[3]) par M. Helge von Koch, j'ai rencontré d'intéressantes fonctions continues sans dérivée, qui ne sont pas les plus simples de leur type. En faisant abstraction des questions géométriques qui leur ont donné naissance, j'ai été conduit à me proposer de construire d'autres fonctions du même type, mais plus simples, et en même temps plus générales. La variable indépendante x étant obligée, pour fixer les idées, à rester dans l'intervalle $(0, 1)$, je suppose qu'on écrive sa valeur dans le système binaire. Soit $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, où $\alpha_n = [2^n x] - 2[2^{n-1}x]$ ne peut avoir que les valeurs 0 et 1. Je remarque d'abord que toute série absolument convergente $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ nous donne le moyen de définir une fonction

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots, \tag{1}$$

qui semble continue, du moins en général, parce que toute variation infiniment petite de x ne peut altérer que les chiffres infiniment éloignés vers la droite, et, pourtant, elle ne peut produire qu'une variation infiniment petite de l'expression (1). Il y a cependant des *valeurs exceptionnelles* de x, pour lesquelles la fonction y n'est pas bien définie. Ce sont les valeurs susceptibles d'une double représentation dans le système binaire; et il faut remarquer qu'il y en a une infinité dans tout intervalle, si petit que ce soit. Chaque fois que x devient égal

1) Ob Kostkas Tabelten, die bis zum Gewicht 8 gehen, auch für symmetrische Funktionen höheren Gewichtes verwertbar sein können, wie es mir in einzelnen Fällen bezüglich der Brunoschen Tabellen gelungen ist, bleibt späterer Untersuchung vorbehalten.

2) *Atti della R. Accademia delle scienze di Napoli* (2ème série, vol. XII, n° 15).

3) *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* (Stockholm, 1904, p. 681—702).

au quotient d'un nombre entier par une puissance entière de 2, la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ finit par ne renfermer que des zéros, après un certain $\alpha_p = 1$; mais on peut remplacer ce chiffre par 0, et chacun des zéros suivants par 1, sans altérer la valeur de x. Si l'on convient d'adopter le premier mode de représentation, la fonction y est bien définie, elle est même continue *à droite* de toute valeur de x, mais elle est discontinue *à gauche* des valeurs exceptionnelles. Le contraire arrive si l'on adopte l'autre mode de représentation. Toutefois il y a moyen de faire disparaître la discontinuité en choisissant la série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ de manière que l'expression (1) ait une valeur *unique* pour toute valeur exceptionnelle de x. Cela exige que l'on ait, quel que soit p,

$$u_p = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots, \tag{2}$$

et, par suite, $u_n = 1/2^n$, à moins d'un facteur constant. On trouve ainsi la fonction $y = x$, dépourvue d'intérêt.

Pour trouver d'autres fonctions continues on est donc obligé de rendre l'expression (1) un peu plus générale, en faisant dépendre le $n^{\text{ième}}$ terme de tous les chiffres qui précèdent α_n. Soit, par exemple,

$$y = \alpha_1 u_1 + \lambda_1^{\alpha_1} \alpha_2 u_2 + \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \alpha_3 u_3 + \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} \alpha_4 u_4 + \cdots$$

La condition (2) devient, dans le cas actuel,

$$u_p = u_{p+1} + \lambda_{p+1} u_{p+2} + \lambda_{p+1} \lambda_{p+2} u_{p+3} + \cdots, \tag{3}$$

d'où, à moins d'un facteur constant, $u_n = 1/(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)$. Il en résulte que, pour toute valeur de x, la fonction

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)} \tag{4}$$

est bien définie, et, par suite, *continue*. Il faut, bien entendu, que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ soit convergente. Pour assurer cette convergence il *suffit* de supposer tous les nombres λ_n plus grands qu'un nombre positif. Cela posé, je vais d'abord calculer la dérivée de la fonction y à droite d'une valeur exceptionnelle de x: soit $x_p = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, où $\alpha_p = 1$. Tout accroissement

$$\delta x = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n'}} + \frac{1}{2^{n''}} + \cdots \qquad (p < n < n' < n'' < \ldots)$$

produit un accroissement de la fonction, évidemment égal à

$$\delta y = \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_p^{\alpha_p} \sigma_n,$$

où

$$\sigma_n = u_n + \lambda_n u_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'} u_{n''} + \cdots.$$

Pour que la dérivée existe, il suffit de choisir les nombres λ_n de manière que, pour n infini, $2^n u_n$ tende vers une limite finie k. Cela exige que ces nombres tendent vers l'unité. Il est d'ailleurs évident, d'après (3), que σ_n ne peut surpasser u_{n-1}, d'où il suit que son produit par 2^n, toujours compris entre deux nombres qui tendent respectivement vers k et $2k$, reste fini. On a donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\delta x} = \lim_{n=\infty} 2^n(\sigma_n - \sigma_{n'}) = \lim_{n=\infty} 2^n \{(\lambda_n - 1)\sigma_n + u_n\} = k;$$

puis

$$\lim_{\delta x = +0} \frac{\delta y}{\delta x} = k \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_p^{\alpha_p}. \tag{5}$$

Qu'arrive-t-il à gauche? Si $\delta x = -\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}} - \cdots$, il faut d'abord mettre la valeur de x sous la forme $x_p = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} 0111 \dots$ pour trouver, en tenant compte de l'identité (3), la variation de y:

$$\delta y = -\frac{a_n u_n + \frac{a_{n'} u_{n'}}{\lambda_n} + \frac{a_{n''} u_{n''}}{\lambda_n \lambda_{n'}} + \cdots}{\lambda_1^{1-\alpha_1} \lambda_2^{1-\alpha_2} \dots \lambda_{p-1}^{1-\alpha_{p-1}} \lambda_p}.$$

On a posé $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = a_n$. Soit τ_n le numérateur de la dernière expression, et remarquons que

$$\tau_n = a_n u_n + \frac{\tau_{n'}}{\lambda_n}, \quad \text{d'où} \quad \tau_n - \tau_{n'} = (1 - \lambda_n)\tau_n' + \lambda_n a_n u_n.$$

Lorsqu'on suppose que les nombres a_n tendent, pour n infini, vers une limite a, il est facile de voir que $2^n \tau_n$ reste fini. Il en résulte

$$-\lim_{n=\infty} \frac{\tau_n}{\delta x} = \lim_{n=\infty} 2^n(\tau_n - \tau_{n'}) = \lim_{n=\infty} 2^n a_n u_n = ka.$$

Donc

$$\lim_{\delta x = -0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{ka}{\lambda_1^{1-\alpha_1} \lambda_2^{1-\alpha_2} \dots \lambda_{p-1}^{1-\alpha_{p-1}} \lambda_p}. \tag{6}$$

La dérivée à gauche ne coïncide donc pas, en général, avec la dérivée à droite.

On peut cependant avoir une dérivée *unique*. En effet, si l'on égale entre elles les expressions (5) et (6), on trouve

$$\lambda_p = \lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \lambda_{p+3} \dots, \quad \text{d'où} \quad \lambda_n = a^{\frac{1}{2^n}}.$$

Il est d'ailleurs aisé de s'assurer de l'existence du nombre k dans ce cas particulier; car

$$u_n = \frac{a^{\frac{1}{2^n}} - 1}{a - 1}, \quad k = \lim_{n=\infty} 2^n u_n = \frac{\log a}{a - 1}.$$

Ainsi, pour toute valeur exceptionnelle de x, la fonction

$$\alpha_1\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)+\alpha_2 a^{x_1}\left(a^{\frac{1}{2^2}}-1\right)+\alpha_3 a^{x_2}\left(a^{\frac{1}{2^3}}-1\right)+\cdots$$

admet la dérivée unique $a^x \log a$. On retrouverait ce résultat si l'on se donnait la peine de calculer la dérivée pour les autres valeurs de x; mais ce serait inutile, car il est facile de voir que la fonction considérée ne diffère pas de $a^x - 1$. Il suffit de remarquer, pour s'en convaincre, que la somme des n premiers termes de la dernière série peut être mise sous la forme suivante:

$$\left(a^{\frac{\alpha_1}{2}}-1\right)+a^{x_1}\left(a^{\frac{\alpha_2}{2^2}}-1\right)+a^{x_2}\left(a^{\frac{\alpha_3}{2^3}}-1\right)+\cdots+a^{x_{n-1}}\left(a^{\frac{\alpha_n}{2^n}}-1\right)=a^{x_n}-1.$$

La somme de la série est donc bien $a^x - 1$.

Je reprends la fonction $y = \varphi(x)$ sous la forme générale (4), et je me propose d'en calculer la dérivée pour une valeur quelconque de x. Je remarque d'abord que, lorsque p croît indéfiniment, les expressions (5) et (6) tendent vers

$$\varphi'(x) = k\,\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\lambda_3^{\alpha_3}\ldots$$

Maintenant, pour s'assurer que cette fonction est effectivement la dérivée de y à gauche de la valeur considérée de x, il suffit de chercher la limite du rapport

$$\frac{y-y_p}{x-x_p}=\frac{\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\sigma_n}{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n'}}+\frac{1}{2^{n''}}+\cdots},$$

dans lequel n, n', n'', ... marquent le rang des chiffres 1, qui suivent le $p^{ième}$. On obtient le rapport analogue à droite en remplaçant x_p par $x_p + \frac{1}{2^p}$, et y_p par $y_p + \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_p^{\alpha_p}u_p$. On retrouve ainsi l'expression précédente; seulement n, n', n'', ... y désignent le rang des chiffres 0. Donc, en faisant croître p, et par suite n, au-delà de toute limite,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{k}\lim_{n=\infty} 2^n(\sigma_n-\sigma_{n'})=\varphi'(x)$$

Ce résultat subsiste même pour les valeurs exceptionnelles de x; car les expressions (5) et (6) ne sont que les deux valeurs de $\varphi'(x)$, qui correspondent aux deux manières d'écrire x_p dans le système binaire. En résumé, lorsque la dérivée de la fonction (4) existe, sa valeur est

$$\varphi'(x)=\frac{2\lambda_1^{\alpha_1}}{1+\lambda_1}\cdot\frac{2\lambda_2^{\alpha_2}}{1+\lambda_2}\cdot\frac{2\lambda_3^{\alpha_3}}{1+\lambda_3}\cdots \tag{7}$$

Maintenant il ne tient qu'à nous de faire manquer cette dérivée, du moins pour une infinité de valeurs de x, en disposant convenable-

ment des nombres λ_n. Lorsqu'on suppose, par exemple, que ces nombres ont une valeur unique $\lambda \leqq 1$, on trouve que $\varphi'(x)$ dépend de la fonction connue[1])

$$\varpi(x) = \lim_{n=\infty} \varpi_n = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n},$$

qui sert à mesurer la *fréquence* du chiffre 1 parmi les chiffres représentatifs de x dans le système binaire. Cette fonction n'est pas bien définie par l'égalité précédente, soit parce qu'elle donne simultanément $\varpi = 0$ et $\varpi = 1$ pour toute valeur exceptionnelle de x, soit parce que la fréquence ϖ_n ne pourrait pas tendre vers une limite déterminée, ce qui arrive pour une infinité de valeurs de x entre deux nombres quelconques; mais ces faits ne peuvent que contribuer à la *non-existence* de $\varphi'(x)$. On a, d'après (7), $\varphi'(x) = \lim_{n=\infty} \lambda^{n(\varpi_n - \alpha)}$, où le nombre α, défini par l'égalité $1 + \lambda = 2\lambda^\alpha$, est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, ou bien entre $\frac{1}{2}$ et 1, suivant que λ est plus petit ou plus grand que 1. Il est impossible que $\varphi'(x)$ ait une valeur finie, autre que zéro. En effet $n(\varpi_n - \alpha)$ ne peut pas tendre vers une limite finie, parce que la différence entre deux valeurs consécutives de cette expression est $\alpha_n - \alpha$, qui ne tend pas vers zéro. Supposons, pour fixer les idées, $\lambda < 1$. Il est évident que $\varphi'(x) = 0$ ou $\varphi'(x) = \infty$ suivant que $\varpi(x) > \alpha$ ou $\varpi(x) < \alpha$, respectivement. En particulier, pour toute valeur exceptionnelle de x, $\varphi'(x)$ est nulle comme dérivée *à gauche* ($\varpi = 1$), infinie comme dérivée *à droite* ($\varpi = 0$). Enfin pour toute valeur de x, telle que $\varpi(x) = \alpha$, $\varphi'(x)$ ne peut exister tant que $n(\varpi_n - \alpha)$ ne tend pas vers $\pm\infty$. Si l'on remplace λ par un autre nombre, par exemple $\mu > 1$, on doit changer $\alpha < \frac{1}{2}$ en $\beta > \frac{1}{2}$, et l'on obtient une autre fonction, dont la dérivée est nulle ou infinie suivant que $\varpi(x) < \beta$ ou $\varpi(x) > \beta$, respectivement. En particulier cette dérivée est nulle comme dérivée à droite, infinie comme dérivée à gauche, pour toute valeur exceptionnelle de x. Il en résulte que la somme des deux fonctions cesse d'avoir une dérivée finie pour ces valeurs de x, aussi bien que pour toute autre valeur qui ferait sortir $\varpi(x)$ de l'intervalle (α, β). Comme cet intervalle est d'autant plus petit que λ et μ sont plus près de l'unité, on peut faire en sorte que les valeurs finies (nulles) de la dérivée deviennent de plus en plus rares; mais il en restera toujours une infinité dans tout intervalle, arbitrairement petit, parce que $\varpi(x)$ reprend une infinité de fois la même valeur entre deux valeurs quelconques de x.

Les fonctions considérées en dernier lieu ont quelques propriétés, qui expliquent comment il se fait que leurs dérivées man-

1) *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (Paris, 1897, p. 257).

Digitized by Google

quent si fréqnemment. Si l'on change $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ en $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dans

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} \lambda^{(n-1)(\bar{\omega}_{n-1}-\alpha)},$$

on trouve $\varphi(x) = (1+\lambda)\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$. Soit $1 + \lambda = 2^m$. Il est évident que la propriété précédente appartient à la fonction x^m, d'où il suit que la courbe $y = \varphi(x)$ rencontre la parabole $y = x^m$ en une infinité de points dont les abscisses sont $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Si l'on attribue à x une valeur x_0, n'appartenant pas à cette succession, on trouve une *autre* parabole, qui passe également par une infinité de points de la courbe, dont les abscisses sont $x_0, \frac{1}{2}x_0, \frac{1}{4}x_0, \ldots$ Ainsi, par exemple, pour $\lambda = 3$, on obtient une première parabole $y = x^2$, puis une infinité d'autres $9y = 7x^2$, $13y = 9x^2$, etc., qui correspondent aux valeurs $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \ldots$ de x_0. On se rend compte assez bien, par là, de l'allure sinneuse de la conrbe dans la région occupée par une gerbe de paraboles, issnes de l'origine tangentiellement à l'un des axes. Soit $\psi(x)$ ce que devient $\varphi(x)$ lorsqu'on y change $\lambda < 1$ en $\mu > 1$. Les paraboles dont il vient d'être question se réduisent à autant de *droites* si l'on considère la fonction $\sqrt{\varphi(x)\psi(x)}$, pour $(1+\lambda)(1+\mu) = 4$, ou bien $\varphi^{\beta}(x)\psi^{\alpha}(x)$, pour $\lambda\mu = 1$; etc.

Je laisse de côté la question de savoir s'il est possible de choisir les nombres *réels* λ_n de manière que la fonction (4) soit absolument dépourvue de dérivée, et je vais me procurer une pareille fonction par l'emploi des imaginaires. Pour $\lambda_n = e^{-2i\theta_n}$ l'expression (4) prend la forme $\varphi + i\psi$, et il est évident que les fonctions

$$(8) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos(\vartheta_n + 2\alpha_n\theta_n)}{2^n \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin(\vartheta_n + 2\alpha_n\theta_n)}{2^n \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n},$$

sont continues. On a posé

$$\vartheta_n = (-1)^{\alpha_1}\theta_1 + (-1)^{\alpha_2}\theta_2 + \cdots + (-1)^{\alpha_n}\theta_n.$$

D'après (7), les dérivées de φ et ψ, si elles existent, sont

$$(9) \quad \varphi'(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\cos\vartheta_n}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n}, \quad \psi'(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\sin\vartheta_n}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n}.$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend $\theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, on trouve

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sin\left(\pi x_{n-1} + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\cos\pi x_{n+1} - \cos\pi x_n),$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = \sin^2\frac{\pi x}{2}$. Or on a bien

$$\varphi'(x) = \lim_{n=\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sin\left(\pi x_n + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\pi x.$$

Digitized by Google

Mais si l'on prend $\theta_n = \frac{\pi}{4}$, de sorte que $\vartheta_n = -\frac{\pi \nu_n}{4}$, où ν_n représente l'excès du nombre des chiffres 1 sur le nombre des chiffres 0, parmi les n premiers chiffres représentatifs de x, il est évident que $\varphi'(x)$ n'existe pas; car, pour n infini, $(\sqrt{2})^n \cos \vartheta_n$ ne peut pas tendre vers une limite. Il en résulte que *la fonction continue*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(\sqrt{2})^n} \sin \frac{\pi \nu_n}{4}$$

n'a pas de dérivée. En d'autres termes, si l'on fait corresponure à chaque valeur de l'abscisse

$$x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \cdots,$$

pour toute succession de nombres entiers n, tels que $0 < n_1 < n_2 < \ldots$, la valeur

$$y = \frac{\cos \frac{\pi n_1}{4}}{(\sqrt{2})^{n_1}} + \frac{\sin \frac{\pi n_2}{4}}{(\sqrt{2})^{n_2}} - \frac{\cos \frac{\pi n_3}{4}}{(\sqrt{2})^{n_3}} - \frac{\sin \frac{\pi n_4}{4}}{(\sqrt{2})^{n_4}} + \frac{\cos \frac{\pi n_5}{4}}{(\sqrt{2})^{n_5}} + \cdots$$

de l'ordonnée, le lieu des points (x, y) est une *courbe continue sans tangentes.*

Telle est aussi toute courbe représentée par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, les fonctions φ et ψ étant définies au moyen des égalités (8), quels que soient d'ailleurs les nombres θ_n, pourvu qu'ils ne tendent pas vers zéro. En effet, d'après (9), la tangente ne peut exister tant que ϑ_n ne tend pas vers une limite finie, ce qui exige que l'on ait $\lim_{n=\infty} \theta_n = 0$. Il est d'ailleurs facile de construire la courbe qui correspond à une succession donnée de valeurs de θ_n. Les points définis par les valeurs 0, $\frac{1}{2}$, 1 de t forment un triangle isoscèle, dont les angles à la base sont égaux à θ_1. Si l'on construit sur les côtés deux autres triangles isoscèles, ayant les angles à la base égaux à θ_2, les deux nouveaux sommets appartiennent à la courbe, sur laquelle ils sont définis par les valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de t. Si l'on construit de même sur les quatre nouveaux côtés quatre triangles isoscèles, ayant les angles à la base égaux à θ_3, on trouve quatre nouveaux points de la courbe, définis par les valeurs $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ de t; etc. En particulier, si l'on prend

$$\theta_n = \frac{\pi}{2^n + 1}, \quad \theta_n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}, \quad \theta_n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}, \ldots$$

on obtient successivement une *circonférence*, la *courbe de von Koch*, une courbe continue *remplissant tout un triangle*; etc.

Rezensionen.

F. Klein und **A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels.** Heft III. Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 247 Seiten.

Die Beziehungen der Kreiselbewegung und der Bewegung der Erde sind in den ersten Heften des vorliegenden Werkes bereits öfter erwähnt worden. Das dritte Heft wendet sich speziell der Anwendung der vorher entwickelten Theorie auf astronomische und physikalische Fragen zu. Der Inhalt des Heftes, der ausführlicher in der demselben vorgedruckten Anzeige angegeben ist, beschränkt sich aber nicht auf diese Anwendungen, sondern umfaßt *außer* dem auf der Horizontalebene spielenden Kreisel: die störenden Einflüsse, insbesondere die Reibung und die Elastizität des Materials, und am Schlusse die Gyroskope. Da der behandelte Stoff mehr noch als bei den vorangehenden Heften über eine von Herrn Klein gehaltene Universitätsvorlesung, der das Werk seinen Ursprung und seine Grundlage verdankt, hinausgeht, wird man im allgemeinen Herrn Sommerfeld, der ihn bearbeitet hat, als den eigentlichen Verfasser bezeichnen dürfen.

Mit Rücksicht auf den reichen Inhalt wird im folgenden auf eine Aufzählung der einzelnen Ergebnisse um so eher verzichtet werden können, als diese, wie sich nicht anders erwarten ließ, zum größten Teile bereits bekannt waren, vielmehr wird ein kurzer Hinweis besonders auf die Methoden gerechtfertigt erscheinen, da auf ihnen der Erfolg des Werkes in erster Linie beruhen dürfte.

Während der früher behandelte Kreisel mit festem Unterstützungspunkt nur drei Freiheitsgrade besitzt, wird in einem Anhang zum VI. Kapitel der auf der Horizontalebene spielende Kreisel untersucht, dem fünf Freiheitsgrade zukommen, indem nur die senkrechte Koordinate des Stützpunktes konstant ist. Die Gleichung, welche den Winkel ϑ zwischen der Figurenachse und der zur Horizontalebene senkrechten z-Achse (Achse der Präzession) als Funktion der Zeit darstellt, enthält hyperelliptische Funktionen, während im früheren Falle elliptische auftraten. Bei sehr großer Rotationsgeschwindigkeit, die durch eine Annahme über die Größe des Eigenimpulses im Verhältnis zur Schwerewirkung präzisiert wird, kann indessen $u = \cos\vartheta$ als elliptische Funktion einer angenäherten Zeit dargestellt werden, deren Abweichung von der wahren Zeit weniger als $0{,}01\,\%$ beträgt. Geht man in den Vernachlässigungen noch weiter, so erhält man u als explizite Funktion der Zeit, bei der Fehler von $1\,\%$ noch zugelassen werden. Im § 9 des IV. Kapitels ist bereits ausführlicher diese Methode angenäherter Berechnung

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

mit Fehlerschätzung begründet worden. Besonderes Interesse erweckt die Bahnkurve des Stützpunktes, deren Ableitung bei den gemachten Vereinfachungen verhältnismäßig leicht ist.

Diese Untersuchungen sind deshalb nicht mit größerer Genauigkeit durchgeführt, weil die störenden Einflüsse bisher vernachlässigt wurden. An erster Stelle kommt die Reibung in Betracht, die in drei Formen als gleitende, rollende und bohrende Reibung auftritt. Der Widerstand W bei der gleitenden Reibung wird dem Druck in der Richtung der Normalen der Berührungsfläche (der Verf. sagt sehr kurz: dem Normaldruck) proportional gesetzt: $W = \mu N$, wo der Reibungskoeffizient μ, dessen Abnahme mit der Geschwindigkeit wenig bekannt ist, bei der geringen Geschwindigkeit des Stützpunktes konstant gesetzt werden kann. Bei der Rotation des Kreisels kommt die rollende Reibung zur Geltung, die als ein Reibungsmoment aufgefaßt werden muß, das von dem Drehmoment in jedem Augenblick überwunden wird: $M = \nu N$. Die bohrende Reibung endlich wirkt, wenn sich ein Körper auf einem andern um die Normale im Berührungspunkte dreht. Infolge der Deformation der Unterlage entsteht aber eine Berührungsfläche statt des Berührungspunktes, so daß wieder von Kräften einer gleitenden Reibung gesprochen werden kann, die sich hier zu einem Drehmoment $M' = \mu' N$ zusammensetzen, wo $\mu' = \mu a$ und a der Radius der Berührungsfläche ist.

Sehr durchsichtig sind die *Wirkungen* der verschiedenen Arten der Reibung dargestellt, indem in erster Linie die geometrischen Verhältnisse der Bewegung zum Verständnis der mechanischen Vorgänge klar gemacht werden. Wir fassen die Ergebnisse kurz zusammen: Durch die gleitende Reibung wird der Impuls N geschwächt, d. h. die Rotation verlangsamt und die Figurenachse aufgerichtet. Ist dies nahezu erreicht, so wirkt besonders die bohrende Reibung, die den Impuls weiter herabsetzt und die aufrechte Bewegung instabil macht, falls der Schwerpunkt über dem Stützpunkte liegt. Bei der Schätzung des quantitativen Reibungseinflusses gibt der Verf. eine graphische Integration einer Differentialgleichung, die über den speziellen Fall hinaus Anwendung finden kann. Wenn allgemein $\frac{d^2u}{dv^2} = f(u, v)$ ist, wird $f(u, v) = 0$ als Leitlinie bezeichnet. Hat $f(u, v)$ in der Nähe der Leitlinie ein starkes Gefälle, so pendelt die Integralkurve fortgesetzt um die Leitlinie herum und $\frac{d^2u}{dv^2}$ (oder $f(u, v)$ selbst) gibt einen Näherungswert der Krümmung der Integralkurve, der bei Einzeichnung der Niveaulinien $f(u, v) = \text{const.}$ abgelesen werden kann; denn auf der Leitlinie ist die Krümmung null, beim Verlassen derselben wird sie sofort bedeutend, die Integralkurve kehrt zur Leitlinie zurück, überschreitet sie usf. Ein anderer störender Einfluß ist der Luftwiderstand, der einer der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit proportionalen und entgegengerichteten Drehkraft gleich gesetzt wird. Beim abgeplatteten Kreisel ist dann die Rotation um die Figurenachse stabil, beim verlängerten labil, woran sich eine Anwendung auf die Erde knüpft. (Die Bezeichnungen abgeplattet und verlängert beziehen sich auf das Trägheitsellipsoid.)

Die Betrachtung des kräftefreien Kreisels wird durch Berücksichtigung der Schwere ergänzt. Hierbei wird die Methode der langsamen Bewegungen

Digitized by Google

angewendet, die eine solche als Aneinanderreihung von Gleichgewichtslagen betrachtet.

Die Elastizität des Kreiselmaterials ist von besonderer Bedeutung im Falle der Erde, deren Gestalt sich ändert, wenn die Drehachse eine andere Lage im Erdkörper annimmt. Diese direkt nicht meßbare Formänderung wird durch ihre Rückwirkung auf den Wechsel der Drehachse im Erdkörper merkbar. Die Präzessionsdauer ist, wie gezeigt wird und für die Erklärung der Chandlerschen Periode wichtig ist, von der elastischen Nachgiebigkeit unabhängig, also gleich derjenigen eines starren Kreisels mit seiner ursprünglichen Elliptizität oder auch derjenigen, die er beim Aufhören der Rotation haben würde. Bei der Erde wird jedoch die Präzession des kräftefreien Kreisels als Nutation bezeichnet, während für die durch Sonne und Mond erzwungene Bewegung der Ausdruck (astronomische) Präzession gebraucht wird.

Die astronomischen Anwendungen im VIII. Kapitel beginnen mit einer Theorie der astronomischen Präzession, welche Herr Klein der Gaußschen Methode zur Bestimmung der Säkularstörungen nachgebildet und die Herr Sommerfeld dann auch auf die Nutationen ausgedehnt hat. Zur Vereinfachung werden die Sonnen- und Mondbahn um die fest gedachte Erde als kreisförmig vorausgesetzt und dementsprechend die Massen *gleichförmig* auf die Bahnen verteilt gedacht. Ferner wird bei dieser genäherten Methode die Erde nicht als Rotationsellipsoid eingeführt, sondern als kugelförmig mit einem wulstartigen Gürtel längs des Äquators. Die Masse dieses Ringes und das Trägheitsmoment der Kugel werden dabei so bestimmt, daß die Kombination von Kugel und Ring dieselben Hauptträgheitsmomente C und A besitzt, wie die Erde. (S. 641 fehlt die Angabe, daß M die Erdmasse bedeutet.) Eine interessante Erweiterung des Gaußschen Verfahrens besteht darin, daß auch bei der Betrachtung des Mondes als *gestörten* Körpers unter der Einwirkung des Sonnen- und des Erdringes zum Nachweis der Knotenbewegung die Mondmasse auf seine Bahn gleichmäßig verteilt wird.

Eine Modifikation der Gaußschen Methode gestattet ihre Anwendung auf periodische statt auf säkulare Störungen und besteht in einer andern Verteilung der Masse des störenden Körpers in seiner Bahn Hierdurch wird die harmonische Schwankung der Rotationsachse der Erde und der Knotenlinie nachgewiesen, deren Periode mit der der Mondknoten zusammenfällt (Bradleysche Ellipse).

Die Betrachtung wendet sich nun den physikalischen Anwendungen und zwar den freien Nutationen zu, welche dem Umstande entspringen, daß die Drehachse und die eine Hauptträgheits- (Figuren)achse nicht zusammenfallen. Hierbei wird die Lagenänderung der Drehachse im Raume und im Erdkörper unterschieden. Im Raume kann sie als stillstehend betrachtet werden. Im Erdkörper beschreibt sie einen Kreiskegel um die Figurenachse in rund zehn Monaten (Eulerscher Zyklus). Sehr instruktiv sind die Figuren (S. 670), welche die von der Figuren- und der Drehachse beschriebenen Kegelflächen darstellen.

Die Beobachtungen zeigen bekanntlich nicht die zehnmonatliche, sondern die Chandlersche Periode von 14 Monaten und eine jährliche. Der Verf. gelangt durch ein Verfahren, das oft geeignet sein dürfte, versteckte Perioden herauszufinden, überraschend schnell zum Nachweis der auf viel

Digitized by Google

mühsamerem Wege entdeckten Perioden. Es werden dabei elliptische Schwingungen vorausgesetzt und dieselben nacheinander eliminiert, indem die um eine Periode auseinanderliegenden Polorte durch Gerade verbunden werden, die man nach Größe und Richtung als Radienvektoren einer neuen Kurve betrachtet, deren Abmessungen im Falle des Vorhandenseins der eliminierten Periode im Vergleich zur alten Kurve sich verringert haben müssen.

Zur Erklärung der Chandlerschen Periode werden verschiedene Annahmen über die Elastizität der Erde in Betracht gezogen. Vier Probleme werden behandelt, bei denen die vier sich ergebenden Elliptizitäten $\frac{C-A}{A}$ (die bei homogener Massenverteilung nahezu identisch mit den Abplattungen $\frac{a-b}{a}$ sind) in einfachen Relationen stehen. Mit Benutzung des oben zitierten Satzes über das Verhältnis der Umdrehungsdauer und der Chandlerschen Periode wird dieses Verhältnis durch eine, bzw. zwei dieser Elliptizitäten dargestellt und dadurch ein Grenzwert für den Elastizitätsmodul erhalten.

Für die Erklärung der Polschwankungen von jährlicher Periode werden wieder verschiedene Einzelprobleme behandelt. Es kommen insbesondere periodische Massenumlagerungen in Betracht, z. B. solche von meteorologischer Art. Weil nämlich die jährliche Periode derselben nicht sehr von der Chandlerschen abweicht, entsteht eine Art Resonanzwirkung, welche den Einfluß solcher Umlagerungen verstärkt.

Für den Schlußparagraphen waren die Grundlinien bereits von Herrn Klein vorgezeichnet. Es handelte sich insbesondere darum, den Foucaultschen Kreiselversuch nach der quantitativen Seite auf alle Fehlerquellen zu prüfen. Ein gewisser Parallelismus zwischen den Richtungen der Schwungringachse und eines freischwebenden Magnetes wird hervorgehoben und auf die theoretische Möglichkeit einer Verwertung zur Polhöhen- und Azimutbestimmung in Bergwerken aufmerksam gemacht.

Wenn die Göttinger Schule, ihrer Tradition eingedenk, in diesem Werke sich den astronomischen Fragen zugewandt hat, so geschah es nicht in abstrakten Theorien, sondern in dem Bestreben, die reichen Mittel moderner Forschung in den Dienst der praktischen Zwecke zu stellen.

Potsdam. A. Galle.

Harris Hancock, Lectures on the calculus of variations (Weierstrassian theory). Bulletin of mathematics of the university of Cincinnati. No. 1, 1904. XVI u. 292 S. 4°.

Bei der Besprechung der *Lectures on the theory of maxima and minima of functions of several variables* (*Weierstrass' theory*), die Herr Hancock im Jahre 1903 herausgegeben hat, hatte ich in diesem Archiv, III. Reihe, Bd. 8, S. 258—261, darauf hingewiesen, daß Weierstraß vor mehr als zwanzig Jahren die Veröffentlichung seiner Vorlesungen über Variationsrechnung ernstlich ins Auge gefaßt hat, und angedeutet, warum sein dringender Wunsch noch immer nicht in Erfüllung gegangen ist. Da wir leider nicht hoffen dürfen, in absehbarer Zeit eine authentische Ausgabe dieser Vorlesungen

zu erhalten, so ist es erklärlich, daß von anderer Seite versucht wird, dem Mangel abzuhelfen. Wer einen solchen Versuch wagt, hat freilich mit den größten Schwierigkeiten zu kämpfen, denn wenn festgestellt werden soll, was Weierstraß für die Variationsrechnung geleistet hat, müssen alle seine stark von einander abweichenden Vorlesungen über diesen Gegenstand berücksichtigt werden.[1]) Auch müßte das sonst noch vorhandene handschriftliche Material herangezogen werden. Daß ein solches Material existiere, ja noch mehr, daß Weierstraß im Besitze neuer Sätze aus der Variationsrechnung gewesen sei, ohne sie öffentlich bekannt zu geben, das ist eine weitverbreitete Ansicht. Da diese Annahme die Entwicklung der Variationsrechnung gehemmt hat und hemmt, scheint es geboten, festzustellen, daß nach Aufklärungen, die mir kürzlich zu Teil geworden sind, *Aufzeichnungen von oder nach Weierstraß, die inhaltlich über die Vorlesungen hinausgehen, aller Wahrscheinlichkeit nach nicht vorhanden sind.*

In der Vorrede spricht sich Herr Hancock über die Grundsätze aus, die er bei der Bearbeitung der Lectures befolgt habe. Er habe sich an die Behandlung von Weierstraß gehalten, ja stellenweise, besonders in dem letzten Teile seines Buches, gebe er kaum etwas anderes, als eine Wiederholung der Ausführungen von Weierstraß, die er aus Nachschriften des Mathematischen Vereins der Universität Berlin und aus Vorlesungen von H. A. Schwarz kennen gelernt habe. Vom Weierstraßschen Standpunkte aus habe er auch seine eigenen Gedanken entwickelt und die von anderen Autoren übernommenen dargestellt.

Schon hieraus geht hervor, daß jemand, der erfahren will, was Weierstraß für die Variationsrechnung geleistet hat, die *Lectures* nicht als Quelle benutzen darf, und das um so mehr, als darin leider nirgends deutlich angegeben ist, was von Weierstraß herrührt und was Zutat des Verfassers ist. Aber die Lectures geben auch keineswegs ein vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande der Entwicklung der Variationsrechnung, die wohl nicht, wie Herr Hancock behauptet, durch Weierstraß zur „perfection" gebracht worden ist; denn die neueren Untersuchungen sind mit Stillschweigen übergangen: Kneser und Osgood werden nur einmal beiläufig in einer Anmerkung (S. 143) erwähnt, und Hilberts Namen habe ich überhaupt nicht finden können. Allerdings gibt der Verfasser am Schlusse der Vorrede dem Bedauern Ausdruck, daß er „aus Mangel an Raum" einige neuerdings veröffentlichte Forschungen nicht habe berücksichtigen können; er hoffe jedoch von Zeit zu Zeit bei seinen Vorlesungen Zusätze und Änderungen zu machen, und werde gern Anregungen dazu entgegennehmen. Es sei mir die Anregung gestattet, daß Herr Hancock den Artikel II, A. 8a der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: *Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren* von E. Zermelo und H. Hahn durcharbeite. Allerdings wäre noch wichtiger, wenn er sich bei der Neubearbeitung darüber entschiede, was er eigentlich geben will: eine Darstellung der Weierstraßschen Theorie (historischer Standpunkt) oder eine Darstellung des gegenwärtigen Standes der Variationsrechnung (enzyklopädischer Standpunkt)

1) Weierstraß hat zuerst im Sommersemester 1865 über Variationsrechnung gelesen, dann S. S. 1867, W. S. 1869/70, S. S. 1872, S. S. 1875, S. S 1877, S. S. 1879, S. S. 1882, S. S. 1884, und, als seine letzte Vorlesung überhaupt, W. S. 1889/1890.

Digitized by Google

oder vielleicht auch nur eine Einführung in die Variationsrechnung, zu der ihn seine Darstellungsgabe sehr wohl befähigte (pädagogischer Standpunkt).

Zum Schluß darf ich eine Berichtigung und Ergänzung zu meiner Besprechung der *Lectures on the theory of maxima and minima* bringen. Ich war dort auf die Behandlung der Maxima und Minima eingegangen, die Herr Hancock als Weierstraßsche bezeichnet, und hatte nachgewiesen, daß diese unzureichend ist. Wie mir Herr O. Bolza in Chicago mitzuteilen die Freundlichkeit hatte, findet sich diese mangelhafte Behandlung in der Tat in der Vorlesung, die Weierstraß im S. S. 1877 gehalten hat, dagegen zeigt die Nachschrift der Vorlesung vom S. S. 1879, die Herr Bolza gehört und aus der er mir die betreffenden Stellen wortgetreu mitgeteilt hat, daß *Weierstraß in der Zwischenzeit den Fehler gefunden hatte*, also bereits vor Peano und Scheeffer zu der Erkenntnis des semidefiniten Falles gelangt war. Ich bin daher zu meiner großen Freude in der Lage, den Schlußsatz jener Besprechung dahin abändern zu können, daß *der kritische Scharfsinn von Weierstraß sich auch hier schließlich bewährt hat.*

Hannover. Paul Stäckel.

Die Ziele der Leuchttechnik von Professor Dr. **Otto Lummer,** Dozent an der Universität zu Berlin, Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. München und Berlin 1903, R. Oldenburg. 112 S. in kl. 8°. Preis 2,50 *M.*

Der Verfasser hat sich der dankenswerten Aufgabe unterzogen, einen im Elektrotechnischen Verein zu Berlin gehaltenen und viel beachteten Vortrag in erweiteter Bearbeitung in Buchform herauszugeben. Die Schrift wendet sich in erster Linie an technische Kreise, um „das im Schwinden begriffene Interesse an den Arbeiten der idealen und uneigennützigen Forschung zu erhöhen“. Wir glauben, daß der Verfasser, der sich so viel mit der „schwarzen Strahlung“ beschäftigt hat, hier doch etwas zu schwarz sieht. Man kann im Gegenteil häufig genug wahrnehmen, daß technische, zumal elektrotechnische Kreise ein großes Interesse an der physikalischen Forschung nehmen und manche Arbeiten durchführen, welche über das rein technische Bedürfnis hinausgehen.

Der Verfasser hat sein Werk in drei Teile gegliedert:

I. Lichtmessung,
II. Das Wesen der verschiedenen Lichtquellen,
III. Die physikalischen Grundlagen der Leuchttechnik.

Der erste Teil gibt nach einer allgemeinen Einleitung über die historische Entwicklung der Leuchttechnik eine kurze Abhandlung über Photometrie und speziell über das vom Verfasser gemeinsam mit E. Brodhun konstruierte Photometer mit dem idealen Fettfleck. Hieran schließen sich kurze Darlegungen über die Hefnerlampe und die Anwendung des Photometers zur ökonomischen Bewertung der gebräuchlichen Lichtquellen.

Im zweiten Teil werden zunächst die beiden Arten des Leuchtens, nämlich Temperaturleuchten und Lumineszenz behandelt. Hieran schließt sich eine sehr eingehende Darstellung des Leuchtvorganges in den einzelnen praktischen Lichtquellen wie Kerze, Gasflamme, Auerlampe, Azetylenflamme, Glühlicht, Bogenlicht, Nernstlicht etc. etc.

Digitized by Google

Die Darstellung wendet sich nunmehr im dritten Teil der Hauptaufgabe zu, nämlich zu den Ergebnissen der neuen Strahlungsforschungen und den Zielen der Leuchttechnik.

Um dem Nichtphysiker dieses schwierige Gebiet verständlich zu machen, hat der Verfasser eine Einleitung vorausgeschickt, welche in musterhaft populärer Weise das Wesen der Licht- und Wärmestrahlung und ihre Trennung behandelt. Die Darstellung wendet sich dann dem physiologischen Gebiet zu, nämlich der Grauglut und Rotglut, den Beobachtungen von Draper und dem H. F. Weberschen „Gespenstersehen", welches seine Erklärung durch den Verfasser darin gefunden hat, daß bei sehr schwacher Beleuchtung nicht mehr die in der Netzhautgrube befindlichen Zäpfchen, sondern die dieselben umgebenden Stäbchen eine Lichtwahrnehmung ermöglichen, welche aber Farbenunterschiede nicht kennt.

Nach dieser interessanten Einleitung geht der Verfasser zu dem Kirchhoffschen Gesetz von der Absorption und Emission des Lichtes über, welches sich nicht nur für die Spektralanalyse, sondern gerade auch für die Strahlungstheorie von größter Bedeutung erwiesen hat, nachdem es gelungen war, die Konstanten zu definieren und die ganze Körperwelt mit dem „absolut schwarzen Körper" in Beziehung zu setzen. Die Realisierung des letzteren ist nun dem Verfasser in sehr eleganter Weise gelungen. Mehrere Konstruktionen dieser „schwarzen Körper" für Temperaturen von — 180° bis + 2300° abs. sind beschrieben. Mit ihnen wurde die Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers ermittelt. Die in Kurvenscharen dargestellten Resultate lassen erkennen, daß der schwarze Körper von allen Strahlern der unökonomischste ist, und so gelangte der Verfasser zu dem ersten Ziel der Leuchttechnik, welches folgendermaßen formuliert werden kann: „Die leuchtende Substanz soll nur Lichtstrahlen und gar keine Wärmestrahlen aussenden". Leider liegen alle bekannten Leuchtsubstanzen dem schwarzen Körper und seinen Strahlungseigenschaften näher als dem idealen. Alle in den letzten 20 Jahren gemachten Fortschritte sind lediglich auf Steigerung der Temperatur zurückzuführen. Nur die Verwendung glühender Dämpfe, wie sie z. B. bei den Flammenbogenlampen in Frage kommt, stellt einen Schritt in der Richtung des idealen Strahlers dar.

Den Strahlungsgesetzen des schwarzen Körpers stellt der Verfasser dann die Strahlungsgesetze des blanken Platins gegenüber. Alsdann behandelt er das Stefan-Boltzmannsche Gesetz der Gesamtstrahlung, welches nach Stefan ursprünglich für die verschiedenartigsten Körper Geltung haben sollte, welches aber tatsächlich, wie zuerst von Boltzmann auf theoretischem Wege, dann aber durch den Verfasser und Pringsheim durch Beobachtungen des schwarzen Körpers nachgewiesen wurde, nur für den letzteren Gültigkeit besitzt.

Nach einer Abschweifung über Folgerungen aus dem Stefanschen Gesetz auf die Existenz des Strahlungsdruckes und die Theorie der Kometen wendet sich der Verfasser den auf das Energiemaximum bezüglichen Gesetzen zu. An dieser Stelle werden die 3 Fundamentalgesetze der schwarzen Strahlung aufgeführt, und es wird an einem Beispiel gezeigt, wie sich das Energiemaximum mit wachsender Temperatur nach kurzen Wellenlängen verschiebt. Für die Wellenlänge, für welche das menschliche Auge am empfindlichsten ist, folgt so die Temperatur 5880° abs.

Digitized by Google

Es folgt dann eine kurze Betrachtung über die Energieverteilung und speziell die aus den Versuchen des Verfassers von M. Planck entwickelte Spektralgleichung.

Die Temperatur der gebräuchlichen Lichtquellen, der Sonne und einiger Fixsterne wird dann unter Benutzung der schwarzen Strahlung und der Strahlung des Platins eingegrenzt und dadurch annähernd festgestellt.

Nunmehr gelangt der Verfasser zum zweiten Ziel der Leuchttechnik, welches sich aus der Beziehung zwischen der Helligkeit und der Temperatur ergibt. Für die Zunahme der Helligkeit einer einzelnen Farbe mit der Temperatur ergibt sich eine sehr einfache Beziehung, welche umgekehrt auch zu einer spektralphotometrischen Temperaturbestimmung benützt werden kann. Für die Abhängigkeit der Gesamthelligkeit von der Temperatur liegen ebenfalls Beobachtungen vor, welche ergeben, daß die Gesamthelligkeit bis 900° abs. (Rotglut) mit der 30., bei 1900° abs. (Weißglut) mit der 14. Potenz fortschreitet.

Im nächsten Abschnitt beschreibt der Verfasser sein Interferenz-Photometer und dessen Anwendung zur Messung von Lichtstärken, zur Vergleichung der Helligkeitsverteilung auf einer leuchtenden Fläche und zur Temperaturbestimmung. Den Schluß der physikalischen Darstellungen bildet ein Abschnitt über die strahlungstheoretische Temperaturskala und ihre Verwirklichung bis 2300 abs. durch die Untersuchungen des Verfassers. Im vorletzten Abschnitt werden die Lichtquellen nach ihrem physikalischen Wert geordnet. Im Schlußwort empfiehlt der Verfasser zur Verbesserung unserer Lichtquellen systematisch nach Substanzen zu forschen, welche die Temperatur der Sonne (6000°) auszuhalten vermögen, weil hierbei die erzeugte Lichtmenge am größten ist.

Der Referent hat den Gang der Darstellung ziemlich detailliert beschrieben, damit der Leser erkennen möge, welch ein enormer Stoff der Arbeit zugrunde gelegen hat. Die Lektüre ist infolge der gewandten Darstellung eine sehr genußreiche, und jedermann wird aus derselben den Eindruck gewinnen, daß die Arbeit eine hochbedeutsame ist. Professor Lummer wird demnächst die langjährige Stätte seiner überaus erfolgreichen Tätigkeit verlassen, um seine Professur in Breslau anzutreten. Für die Physikalisch-Technische Reichsanstalt bedeutet sein Fortgang einen sehr empfindlichen Verlust, während seine demnächstigen Schüler in Breslau sich nur gratulieren können.

München. F. Uppenborn.

Max Simon. Analytische Geometrie des Raumes. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1903, Göschen. 16°. 205 S.

Dieser Auflage ist ein Zettel beigegeben, der die Angabe enthält, daß der Inhalt derselbe geblieben sei, nur hätten die Strahlenkoordinaten und die Reyeschen Achsen eine größere Beachtung gefunden. Ferner spricht der Zettel aus, daß Satz und Stil verbessert worden sind. Daraus schließe ich, daß vielleicht einer meiner Herren Vorgänger, der über die erste Auflage berichtet hat, besonders an dem Stil etwas auszusetzen gehabt hat. Ich muß dazu sagen, daß der Stil auch jetzt noch flüchtig und schwerfällig ist, z. B. kommt in den ersten 14 Zeilen dreimal das Wort bezw. und einmal das Wort in bezug auf vor, während die einfachen Wörter und,

oder, für genügt hätten. Ferner werden manche Sätze wegen der vielen Bei- und Untersätze endlos. Ich würde dafür dem Verf. das treffliche Buch von Wustmann empfehlen. Das ist aber noch nicht das schlimmste. Bei der Interpunktion geht alles kunterbunt durch einander. Der Verf. verwendet das Semikolon meistens da, wo man sonst ein Komma wählt. Aber es kommen auch überhaupt keine Zeichen vor, und der Verfasser setzt sogar statt des Kommas Malpunkte! S. 25 „statt *uvw* kann man $u \cdot v \cdot w$ setzen“; S. 41 „Seien $U_1 U_2$; $U_1 - \lambda_2$; $U_1 + \lambda U_2 \cdots$; S. 70 „Seien $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$ drei Kugeln“. Eine so lässige und ungewöhnliche Interpunktion muß namentlich die Anfänger, für die das Buch geschrieben ist, irreführen. Sonst ist die Anordnung des Stoffes gut, und man wird elementar und ohne viel Rechnung in die Lehre von den Flächen zweiten Grades eingeführt, aber die gerügten Mängel müssen bei der nächsten Auflage beseitigt werden.

Dortmund. H. KÜHNE.

F. Klein, Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 82 S.

Die vorliegenden Vorträge wurden Ostern 1904 bei Gelegenheit eines Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik in Göttingen gehalten und bilden ein Praeludium zu den bekannten Verhandlungen der Breslauer Naturforscherversammlung über die Gesamtfragen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen. Sie sollen in eingehender Weise die These begründen, daß von Untersekunda ab „*der Funktionsbegriff in zweckmäßiger*“ (nämlich analytisch-geometrischer) „*Ausgestaltung in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts zu rücken ist.*“ Als notwendige Folge davon ergibt sich die Forderung, die *Elemente der Differential- und Integralrechnung* in das Pensum der höheren Lehranstalten aufzunehmen.

Man kann ohne weiteres zugeben, daß die von Herrn Klein vertretene Sache nicht beredter und überzeugender zum Ausdruck gelangen konnte, und es ist dringend zu wünschen, daß seine Ausführungen nicht nur bei den Oberlehrern, für die sie in erster Linie bestimmt sind, sondern bei Gebildeten aller Kreise die gebührende Beachtung finden. Handelt es sich doch, wie Herr Klein mit Recht hervorhebt, vor allem darum, den mathematischen Unterricht denen, die später nicht Mathematik studieren, wertvoll zu machen, also den späteren Medizinern, Juristen, Chemikern schon auf der Schule die mathematischen Einsichten zu vermitteln, die sie erfahrungsgemäß auf der Universität nicht nachholen können und ohne die ihnen wichtige Seiten ihres Faches überhaupt verschlossen bleiben.

Man muß lebhaft bedauern, daß diese Schrift noch nicht vorlag, als in der Versammlung zu Halle die „berufenen“ Vertreter die Einführung der Infinitesimalrechnung auch nur auf den *realistischen* Vollanstalten mit Stimmengleichheit ablehnten. Es darf offen ausgesprochen werden, daß der Verlauf der Diskussion nicht ganz der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprach; unzweifelhaft hätten die Ausführungen von Herrn Klein neue und bedeutende Gesichtspunkte in die Debatte hineingebracht und vor allem die irrtümliche

Auffassung beseitigt, die offenbar die Abstimmung entscheidend beeinflußt hat, als sei eine große Vermehrung des Unterrichtspensums beabsichtigt. Denn „nicht sowohl die Einfügung eines neuen Lehrstoffes, als vielmehr die Durchdringung der üblichen Lehrgebiete mit einer neuen Auffassung" wird gefordert, und sie läßt sich nach Herrn Kleins Ansicht ohne Umänderung der Lehrpläne durchführen.

Nach meiner Auffassung wird die Ausgestaltung des Mathematikunterrichts in der von Herrn Klein geforderten Richtung von grundlegender Bedeutung für die Stellung der Mathematik im Gesamtorganismus der Schule sein. Nur wenn es gelingt, die verschiedenen bis jetzt isolierten Gebiete in einer höheren Einheit zusammenzufassen und zu vertiefen, darf man hoffen, daß die Mathematik selbst aus ihrer isolierten Stellung an der Schule heraustritt und mit den übrigen Zweigen der allgemeinen Bildung in lebendige Beziehung gesetzt wird.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

Gustav Herberich, Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Beilage zum 13. Jahresbericht der Kgl. Luitpold-Kreisrealschule in München, 1904. 22 S. mit 1 Figurentafel.

Die Frage, ob es algebraische Kurven konstanter Torsion gibt, wurde zuerst von Darboux gestellt und in zwei Arbeiten von Fabry und Lyon in verschiedener Weise behandelt. Während Fabry unter recht speziellen Annahmen vier verschiedene Klassen reeller Kurven der bezeichneten Art aufstellte, gelangte Lyon durch einen allgemeineren Ansatz zu einem Verfahren, bei dem aber die zu lösenden Bedingungsgleichungen so komplizierter Natur sind, daß sie die Auffindung reeller Kurven nicht gestatteten. Es ist daher von Interesse, daß es Herrn Herberich durch eine Methode, die in gewisser Weise als eine Verschmelzung der Methoden von Fabry und Lyon bezeichnet werden kann, gelungen ist, derartige Kurven in beliebiger Anzahl wirklich darzustellen. Er gibt in seiner sehr fleißigen Arbeit ein vollständig durchgerechnetes Beispiel einer Kurve, bei der die Koordinaten ganze rationale Funktionen von t und $\sqrt{1-t^2}$ sind.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

L. A. Sohnckes Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung. Herausgegeben von Prof. Dr. Hermann Amstein. Sechste verbesserte Auflage bearbeitet von Dr. Martin Lindow. Mit 124 in den Text gedruckten Figuren. Halle a. S. 1903, Verlag von H. W. Schmidt. XI u. 304 S. gr. 8°.

Ein altes liebes Buch in neuem Gewande liegt mir vor. Fünfundvierzig Jahre sind es her, seit ich die zweite von H. J. Schnitzler besorgte Auflage zur Einübung der Lehren der Differentialrechnung benutzte. Damals war diese Aufgabensammlung die einzige in ihrer Art, und jeder, der das Studium der Mathematik begann, wurde auf das nützliche Werk verwiesen. Wenn ich später als Lehrer selbst neue Aufgaben bildete, nahm ich gern das vertraute Exemplar zur Hand, um mich der Gedanken zu erinnern, die sich für mich an die einzelnen Seiten knüpften. Auch die inzwischen er-

schienenen neuen Sammlungen von Aufgaben zeigen oft genug Spuren, die auf Sohnckes bewährte Führerhand zurückweisen.

Aber die Gesichtspunkte, unter denen der Anfänger die mathematischen Gesetze betrachten muß, sind mannigfaltiger geworden als vor einem halben Jahrhundert. Die ersten Kapitel über die rein rechnerischen Teile waren von Sohncke so vortrefflich ausgestattet worden, daß in den folgenden Ausgaben fast nichts geändert zu werden brauchte. Dagegen mußten die Anwendungen — hauptsächlich die geometrischen — erheblich vermehrt werden, und da war es besonders Amstein, der in der vierten und fünften Auflage das Werk so erheblich bereicherte, daß es sich nun den Sammlungen von Frenet, Schlömilch und anderen an die Seite stellen konnte. Jetzt ist die sechste Auflage der Aufgaben zur Differentialrechnung nötig geworden und hat in Hrn. Lindow einen Bearbeiter gefunden, der in der äußeren Anordnung der geometrischen Anwendungen einige willkommene Besserungen bewirkt hat. Gegenüber der zweiten Auflage von 202 Seiten, die ich als Student benutzt habe, ist das Buch um die Hälfte dicker geworden, und trotzdem sähe ich nach meinen Erfahrungen als Lehrer noch manche Dinge gern aufgenommen, würde freilich anderes als nicht so sehr nötig entbehren können. Bei einem alten und bewährten Werke, das in der gegebenen Gestalt vielen genützt hat, sind derartige Änderungen vielleicht bedenklich. Beifällig ist die Aufnahme der Figuren in den Text zu begrüßen; die ältesten Auflagen besaßen überhaupt keine Figuren, und die von Amstein bearbeiteten gaben Figurentafeln getrennt vom Texte.

Wenn ich nun im folgenden Berichtigungen zu einzelnen Stellen gebe, so will ich damit den Wert der Sammlung nicht herabsetzen; ich möchte damit nur einen Beitrag zu der öfter zu machenden Bemerkung liefern, daß Irrtümer sich „wie eine ewige Krankheit forterben". Leider kann ich dies nicht in der an sich sehr wünschenswerten Kürze tun. Ich beschränke mich ohnehin schon auf die geometrischen Anwendungen der Lehre von den extremen Werten der Funktionen

Aufgabe 84 (S. 144): „In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Zylinder einzuschreiben, dessen gesamte Begrenzungsflächen ein Max. bilden. Lösung: Unter der Voraussetzung, daß $h > r$, werden Radius der Grundfläche und Höhe des Zylinders $\varrho = \frac{rh}{2(h-r)}$ und $\varkappa = \frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$."

Es entsteht sofort die Frage: Warum muß h nur größer als r sein, nicht auch größer als $2r$, wie doch die Lösung in dem Ausdruck für die Höhe $\varkappa$ zu verlangen scheint? Was findet denn in dem Falle $h < r$ statt?

Wir haben hier den in den Anwendungen der Kriterien für Maxima und Minima auf die Geometrie häufig vorkommenden Fall, daß die analytischen Bedingungen geometrisch passend gedeutet werden müssen. Wir unterscheiden:

1) $h > 2r$ (also auch $h > r$). In diesem Falle sind der gefundene Radius ϱ und die gefundene Höhe $\varkappa$ beide positiv. Die *Summe* der beiden Grundflächen und des Mantels des Zylinders $2\pi(\varrho^2 + \varrho\varkappa) = \frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$ ist ein Maximum.

2) $2r > h > r$. Jetzt ist nur ϱ positiv, dagegen $\varkappa$ negativ. Die *Differenz* zwischen der Summe der beiden Grenzkreise weniger dem Zylindermantel

Digitized by Google

ist ein Maximum. Geometrisch ist $\varrho > r$, $\varkappa$ negativ, d. h. der eingeschriebene Zylinder hat seinen Deckkreis außerhalb des begrenzten Kegels in dem Teile der Kegelfläche, der über die Basis des Kegels hinausgeht. — Will man gerade die *Summe* aus Zylindermantel und den beiden Grenzkreisen zum Maximum machen, so hat man den Fall des Zylinders von der Höhe Null zu nehmen, also Maximum der Oberfläche gleich $2\pi r^2$.

3) $h < r$. In diesem Falle ist ϱ negativ, $\varkappa$ positiv und länger als h, d. h. der Deckkreis des gefundenen Zylinders liegt in dem Teile der Kegelfläche über die Spitze des begrenzten Kegels hinaus. Die Summe aus den beiden Grenzkreisen und dem Mantel geht wieder in die *Differenz* derselben Größen über und hat einen *negativen* größten Wert, d. h. ist ein Minimum. Für das Maximum der Zylinderoberfläche hat man, wie im vorigen Falle, den Wert $2\pi r^2$, wenn die Zylinderhöhe Null ist.

Aufgabe 87 (S. 145): „In eine gegebene Kugel einen Zylinder einzuschreiben, dessen gesamte Begrenzungsfläche ein Maximum wird.“ Hier gibt die neue Auflage *zwei* Lösungen, während die zweite von 1859 richtig nur *eine* bezeichnet. Der Fehler ist offenbar dadurch entstanden, daß *beide* Wurzeln einer quadratischen Gleichung ohne nähere Untersuchung genommen sind. Nur die eine entspricht aber dem Maximum der *Summe* aus den beiden Grenzkreisen und dem Mantel, die andere der *Differenz*.

Aufgabe 102 (S. 153): In der Peripherie einer Ellipse sind zwei Punkte (P_1 und P_2) gegeben; man soll in ihr einen dritten (P_3) so bestimmen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ein Maximum oder Minimum wird. — Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß es *zwei* Punkte P_3 gibt, die Berührungspunkte der beiden zu P_1P_2 parallelen Tangenten. Versieht man die Flächeninhalte mit Vorzeichen, so ist das eine der beiden so bestimmten Dreiecke positiv, das andere negativ, daher das eine ein Maximum, das andere ein Minimum. Sieht man von den Vorzeichen ab, so ist jedes der beiden Dreiecke als Maximum für das betreffende Ellipsensegment zu betrachten. — Während die alte Auflage richtig *zwei* Lösungen angibt, zählt die neue, durch eine irrige Deutung des errechneten Wertes für die Abszisse von P_3 verleitet, *vier* Lösungen. Weder in der alten Auflage, noch in der neuen ist entschieden, ob ein Maximum oder ein Minimum erhalten ist.

Einfache geometrische Überlegungen, wie die eben angeführte, gehören zwar nicht zum Plane des Buches, das ja Beispiele für die Rechnungsvorschriften aus der Differentialrechnung geben soll, müßten jedoch zur Beleuchtung der Resultate herangezogen werden. So könnten manche Aufgaben über Maxima und Minima bei Figuren, die der Ellipse (dem Ellipsoide) ein- oder umbeschrieben sind, durch Hinweis auf die Entstehung der Ellipse durch Parallelprojektion des Kreises, oder genauer auf die zwischen der Ellipse (dem Ellipsoide) und dem Kreise (der Kugel) bestehende affine Verwandtschaft ohne nennenswerte Rechnung kurz erledigt werden. Dadurch ließe sich für viele andere interessante Aufgaben Raum gewinnen.

Aufgabe 111 (S. 160). „Es ist die größte Ellipse zu bestimmen, die erhalten werden kann, indem man einen gegebenen geraden Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, welche durch einen gegebenen Punkt des Kegels geht.“ Ist φ der Neigungswinkel der Ebene gegen Basis, so muß $\sin 2\varphi = 2\sin 2\alpha$ sein, wenn α der Winkel der Achse des Kegels gegen die Seite ist.

Zu dieser Lösung, die ebenso bei Frenet „Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal", Nr. 216, steht, ist folgendes zu bemerken:

1) Ist $\sin 2\alpha < \frac{1}{2}$, d. h. $\alpha < 15^0$, so folgen aus der Gleichung $\sin 2\varphi = 2 \sin 2\alpha$ *zwei* spitze Winkel φ_1 und φ_2 für φ, so das $2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 180^0$, $\varphi_2 = 90^0 - \varphi_1$. Ist φ_1 der kleinere, φ_2 der größere, so gibt der *größere* Winkel das Maximum, der *kleinere* das Minimum der Ellipse. Ohne diese Bemerkung kann leicht der kleinere allein in Betracht gezogen und irrtümlich als zum Maximum gehörig genommen werden.

2) $\sin 2\alpha \gtreqless \frac{1}{2}$. Mit $\varphi = 90^0 - \alpha$ beginnend und φ bis Null abnehmen, dann negativ werden lassend, erhält man wachsende Werte der Schnittellipse. Beschränkt man sich auf solche Ellipsen, die innerhalb des begrenzten Kegels liegen, so ist der Basiskreis die größte Ellipse.

Aufgabe 109 (S. 157). „Für welche Ellipsenpunkte ist der Abstand derselben von dem Punkte $x = 0$, $y = -\beta$ der kleinen Achse ein Maximum oder Minimum?" Bei dem vorgeschriebenen Gange der Lösung ist eine Schwierigkeit beseitigt, die ohne den dort angegebenen Kunstgriff für den Anfänger entsteht. Bezeichnet man den Abstand des Punktes $(0, -\beta)$ vom Ellipsenpunkte (x, y) mit u, so ist es natürlich, so zu rechnen:

$$u^2 = x^2 + (y + \beta)^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) + (y + \beta)^2.$$

$$\frac{d(u^2)}{dy} = -\frac{2a^2 y}{b^2} + 2(y + \beta), \qquad \frac{d^2(u^2)}{dy^2} = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

Da $a > b$ angenommen ist, wird demnach für

$$y = \frac{b^2 \beta}{a^2 - b^2} \qquad \text{Max. } (u^2) = a^2\left[1 + \frac{\beta^2}{a^2 - b^2}\right].$$

Es muß aber $y < b$ sein, d. h. $\beta < (a^2 - b^2)/b$. Außerdem ist zu beachten, daß $-b \leqq y \leqq b$ ist.

1) $\beta < (a^2 - b^2)/b$. Man hat Min. $u = b + \beta$, Max. $u = a\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{\beta^2}}$, Minimum $u = \pm(b - \beta)$ — je nachdem $b > \beta$ oder $b < \beta$.

2) $\beta \geqq (a^2 - b^2)/b$. Es ist Max. $u = b + \beta$, Min. $u = \pm(b - \beta)$.

Zur vollständigen Erledigung der Aufgabe auf diesem Wege ist also die Berücksichtigung der Grenzen nötig, innerhalb deren y nach der Stetigkeit sich ändert.

Aufgabe 108 (S. 157). „Die größte Ellipse zu bestimmen, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt." — „Man sehe die betreffende Abhandlung von Gauß, Monatl. Korrespondenz von Zach, Bd. XXII, Seite 112." Es fehlt also an dieser Stelle jede Angabe über den Weg, der zur Lösung führt, und über das Resultat der Untersuchung. Die Aufgabe ist eben zu schwer für einen Anfänger, hätte daher höchstens in einer Anmerkung zu einer anderen erwähnt werden sollen. Außerdem wäre es besser gewesen, auf den leichter zugänglichen Band IV der Gesammelten Werke von Gauß zu verweisen.

Wie in dem eben besprochenen Beispiele hätte ich auch bei der Aufg. 95 (S. 148) über das Minimum der Entfernungssumme von drei gegebenen Punkten statt Bertrand, Journ. de Liouv. VIII, lieber R. Sturm

zitiert gesehen: Journ. für Math. **97** und Archiv der Math. (3) **5**, 15, weil die Überlegungen an diesen Stellen einfacher, die Zeitschriften leichter erhältlich sind. Ebenso ist es nicht einzusehen, weshalb (S. 139) für die Konstruktion eines Kreisvierecks aus den vier Seiten das Lehrbuch der Geometrie von Heis und Eschweiler gerade nachgesehen werden muß. Das Minimum des Inhalts eines Vierecks mit vier gegebenen Seiten ist nicht bestimmt worden.

Hiermit breche ich ab; ich glaube gezeigt zu haben, daß auf den wenigen hier berücksichtigten Seiten manche Verbesserungen angebracht werden können. Im Interesse der studierenden Jugend liegt es, die Aufmerksamkeit von Anfang zu schärfen, damit der junge Mathematiker gewohnt werde, schon bei der Behandlung solcher Übungsbeispiele selbständig zu denken, nicht bloß sich an überlieferte Vorschriften zu klammern. Im übrigen sei das Buch zur ferneren Benutzung mit dem Wunsche empohlen, daß es zu selbständigen Untersuchungen anregen möge.

Berlin. E. Lampe.

Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band: Rechnen und Algebra. VIII u. 332 S., 1902. Zweiter Band: Geometrie. Logarithmen. Ebene. Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. Reihen. Zinseszinsrechnung. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Stereometrie. Analytische Geometrie. Kegelschnitte. Maxima und Minima. VIII u. 496 S., 1903. Leipzig, Veit u. Comp.

Das umfassendste Werk über Geschichte der Mathematik, die Vorlesungen des Hrn. M. Cantor, ist nach Zeitabschnitten eingeteilt und reicht bis 1758. Innerhalb jedes Zeitabschnittes behandelt es die einzelnen Gebiete der Mathematik nach den Autoren dieser Periode und gibt bei dieser Gelegenheit auch die nötigen biographischen und bibliographischen Nachrichten. Wer sich über eine bestimmte Einzelheit unterrichten will, muß daher die drei starken Bände der Reihe nach vornehmen, und besonders in dem letzten Bande, wo die Zeitabschnitte verhältnismäßig kurz bemessen sind, bedarf es immer einiger Mühe, um alles zusammenzutragen, was auf die in Rede stehende Frage Bezug hat. Es fehlte eine systematische Darstellung, in der ein Lehrer einer höheren Schule, der über einen Gegenstand rasch eine historische Aufklärung zu erhalten wünscht, nach den besten Quellen alle über den Gegenstand bekannten Tatsachen knapp — der Verf. sagt: in lexikalischer Kürze — zusammengestellt findet.

Das ist in dem vorliegenden Werke für die Elementarmathematik geschehen. Damit der Leser bei der Durchsicht eines einzelnen Paragraphen inbezug auf die genannten Autoren immer sofort das Notwendigste vor Augen habe, werden stets hinter dem Namen Geburtsjahr, Todesjahr, Hauptaufenthaltsorte während des Lebens, Stellungen angeführt. Dadurch ist das Suchen nach solchen Angaben erspart; die häufige Wiederholung derselben Notizen wirkt allerdings etwas monoton, und es wäre zu überlegen, ob nicht eine alphabetische Zusammenstellung der im Werke genannten Mathematiker, wie in Finks Geschichte der Elementar-Mathematik, vorzuziehen wäre. Eine überreiche Anzahl fortlaufend bezifferter Fußnoten — 1233 im ersten,

1836 im zweiten Bande — verweist auf das Quellenmaterial. Im Anhange des ersten Bandes ist auf drei Seiten eine Zeittafel zur Geschichte der algebraischen Zeichenschrift gegeben. Danach sind Orginalbeispiele aus mathematischen Schriften der verschiedenen Perioden zusammengestellt.

Das recht vollständige Personen- und Sachregister, das am Schlusse des zweiten Bandes für das ganze Werk gegeben ist, und mit dessen Hilfe jeder gesuchte Gegenstand leicht gefunden werden kann, hat sich bei zahlreichen Stichproben als recht zweckmäßig, durchaus zuverlässig und schnell zum Ziele führend erwiesen. Dadurch war es möglich geworden, die Grenzen zu erkennen, bis zu denen die Darstellung reicht. Bei einer solchen Prüfung wird wohl jeder, wie Ref., einige Enttäuschungen erfahren, indem manche der gesuchten Dinge gar nicht aufgenommen sind oder nur in ganz kurzen Notizen, die nicht befriedigende Auskunft geben, erwähnt werden. Das liegt natürlich an der nicht hinreichend begrenzten Bedeutung des Begriffes „Elementarmathematik“. Manches wird jetzt in den Schulen gelehrt, was vor hundert Jahren in Universitätsvorlesungen vorgetragen und damals als Bestandteil der „höheren Mathematik“ angesehen wurde.

Die Zweckmäßigkeit des ganzen Planes ist einleuchtend, und die Durchführung ist eine so gute, daß das Werk viel Anerkennung gefunden hat. Wenn ein Historiker der Mathematik von peinlichster Genauigkeit, wie Hr. Eneström, in der Bibliotheca Mathematica (**3**, 213—216 u. 404—413) den hohen Grad der Zuverlässigkeit dieser Schrift rühmt, wenn er hervorhebt, daß das Werk, weil zum Teil auf Quellenstudien beruhend, auch dem Fachmann hier und da etwas Neues bringt, so ist damit ausgesprochen, daß die Geschichte der Elementarmathematik des Hrn. Tropfke als eine nützliche und notwendige Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Elementarmathematik jeder Lehrerbibliothek nicht nur der höheren Schulen, sondern auch der Volksschulen einverleibt zu werden verdient. Wie vor vierzig Jahren Baltzers Elemente der Mathematik in bescheidener Weise die nötigsten historischen Notizen neben dem Lehrgange boten, so hat der jetzige Oberlehrer neben der neu entstehenden Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber und Wellstein die Geschichte der von ihm zu lehrenden Gebiete in dem vorliegenden Werke ausführlich und recht vollständig zusammen.

Wenn zu Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik immerfort Berichtigungen und Ergänzungen durch die Untersuchungen neuerer Forscher nötig werden, so wird auch Hr. Tropfke fortwährend die bessernde Hand an seine Geschichte der Elementarmathematik legen müssen. Er hat ja auch schon im zweiten Bande eine Reihe von Nachträgen zum ersten bringen müssen. Ref. hat in seinen beiden ausführlicheren Anzeigen in der Naturwissenschaftlichen Rundschau **18**, 179 u. **19**, 152 eine Anzahl von Punkten bezeichnet, wo Verbesserungen anzubringen sind, und Hr. Eneström hat in den erwähnten Besprechungen mit gewohnter Gründlichkeit ein großes Verzeichnis von Berichtigungen gebracht. Das ist kein Vorwurf für ein so umfassendes Werk, sondern solche Änderungen sind durch die Fortschritte in der Forschung bedingt. Wir verzichten darauf, derartige Einzelheiten hier zur Sprache zu bringen, schließen vielmehr mit dem Wunsche, daß diese verdienstvolle Arbeit die Freude an der historischen

Digitized by Google

Forschung unter den Mathematikern wecken und sie zu mathematisch-historischen Untersuchungen anregen möge.

Berlin. E. Lampe.

Ch. Cellérier, Cours de mécanique. Paris 1892 Gauthier-Villars. 617 S. 8⁰.

Obwohl das vorliegende Werk erst drei Jahre nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht wurde, so ist es doch in vollem Umfang sein Eigentum, indem das fertige Manuskript ohne Änderungen zum Abdruck gekommen ist.

Auswahl, Einteilung und Darstellung des behandelten Stoffes sind ganz in dem Sinne durchgeführt, wie wir es in den Lehrbüchern von Poisson, Duhamel und Broch gewöhnt sind.

Das Werk steht durchaus in dem Bannkreis der alten Schule, auf die heute die jüngeren Vertreter der Mechanik etwas geringschätzend zurückblicken, die aber dessen ungeachtet eine bleibende historische Bedeutung für die Unterrichtsentwicklung unserer Wissenschaft besitzt, indem sie in bewußter Reaktion gegen das starre System der Mécanique analytique Lagranges einen naiven Aufbau versuchte, der den verschiedenartig umgrenzten Interessen des Mathematikers, des Physikers und des Technikers gerecht werden sollte.

Dementsprechend bringt der Verfasser die Statik sogleich in Verbindung mit den Anwendungen auf einfache Baukonstruktionen. An die darauffolgende Darstellung der Kinematik schließt er die elementare Theorie der Verzahnung und behandelt in den Abschnitten über Dynamik namentlich Fragen der Stabilität und der Lehre vom Stoß. Wir treffen eine Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen auf die Wirkung der Erdbeben, die durch ihre eigenartige Durchführung Beachtung verdient und einen Abriß der Mechanik fester elastischer und flüssiger Systeme, dem mancherlei schöne Anwendungen eingefügt sind.

Karlsruhe. K. Heun.

H. Lorenz. Lehrbuch der technischen Physik, zweiter Band: **Technische Wärmelehre.** München und Berlin 1904, Oldenbourg. 544 S. 8⁰.

Ursprünglich war vom Verfasser die Mechanik des deformierbaren Körpers als unmittelbare Fortsetzung der Mechanik starrer Systeme (Bd. I) vorgesehen. Die Umstellung der Reihenfolge ist jedoch für das Werk als Ganzes belanglos, da hierdurch die Elastizitätstheorie und die Hydraulik mit Einschluß der betreffenden Partien aus der vorliegenden Wärmelehre behandelt werden können.

Der reichhaltige und umfangreiche Stoff des zweiten Bandes ist in sieben Abschnitten behandelt.

In den beiden ersten Teilen werden die allgemeinen Grundlagen der mechanischen Wärmelehre entwickelt und die nächstliegenden Folgerungen aus dem ersten Hauptsatze gezogen. Der dritte Abschnitt bringt das Entropieprinzip und damit den zweiten Hauptsatz, an welchen die Theorie der nicht umkehrbaren Zustandsänderungen und insbesondere die thermischen Vorgänge bei den Naßdampfmaschinen angeschlossen sind.

Digitized by Google

Das Verhalten der überhitzten Dämpfe hat im vierten Abschnitt eine sehr eingehende Bearbeitung erfahren. Hier tritt der spezifisch technische Charakter der Darstellung am stärksten hervor. Die Kältemaschinen, die Kompressions-Kaltdampfmaschinen und die Heißdampfmaschinen werden in leichtverständlicher Form und mit Heranziehung der zahlreichen physikalisch-technischen Experimentalforschungen eingehend behandelt. Auch für den Nicht-Fachmann, welchem die Wärmetheorie als solche bekannt ist, bietet dieses Kapitel und das folgende eine anregende Einführung in die technischen Anwendungen derselben.

Die Grundzüge der thermochemischen Prozesse, welche den Inhalt des fünften Kapitels bilden, sind auf das für die Technik Wichtigste beschränkt. Eine weitere Berücksichtigung des umfangreichen Stoffes würde auch wieder die Heranziehung von Hilfsmitteln verlangt haben, die den elementaren Charakter des ganzen Buches notwendigerweise beeinträchtigt hätten. Aber selbst innerhalb dieser Beschränkung ist es dem Verfasser gelungen, eine befriedigende Theorie der Generator- und Dowsongasprozesse und der Verbrennungsgasmotoren (Dieselmotor) zu geben.

Über Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung gibt der vorletzte Abschnitt des Buches einen Abriß, in dem auch die neuesten physikalischen Resultate herangezogen sind.

Eine kurze Übersicht der historischen Entwicklung der Wärmelehre und ihrer technischen Anwendungen beschließt den inhaltreichen Band. Hier skizziert auch der Verfasser die spezifisch kinetische Behandlung der Wärmelehre, welche für den Physiker von hervorragendem Interesse ist, aber zur Zeit doch noch nicht soweit durchgebildet ist, daß ein technischer Leserkreis, wie er für das vorliegende Lehrbuch vorausgesetzt werden kann, jetzt schon Neigung für das Studium derartiger mechanisch-physikalischer Methoden zeigen wird.

Karlsruhe. K. Heun.

H. Sicard, Traité de cinématique théorique mit Zusätzen von A. Labrousse. Paris 1902 Gauthier-Villars. 8⁰. 185 S.

Das vorliegende Werk muß als eine ganz vortreffliche Einführung in das Studium der Kinematik angesehen werden. Die Einteilung des Stoffes schließt sich an die umfassende Darstellung der Kinematik von Königs (Paris 1897) an. Das Buch behandelt also nach einer Einleitung in die Vektorrechnung die Bewegung des einzelnen Punktes und entwickelt dann die kinematischen Grundbegriffe am starren System in geometrischer und analytischer Form. In Anbetracht des geringen Umfanges (185 S.) ist der Inhalt ein sehr reicher, indem überall die Beschränkung auf das für den Anhänger Wesentliche scharf im Auge behalten ist. Je nach den Bedürfnissen der Studierenden wird dabei das Gebotene überhaupt ausreichen, um mit Erfolg das Studium der Dynamik zu ermöglichen, oder es wird dem Weiterstrebenden eine gründliche Vorbereitung für eine eingehende Beschäftigung mit dem Königsschen Werke gewähren.

Karlsruhe. K. Heun.

Digitized by Google

Annuaire pour l'an 1904, publié par le bureau des longitudes. Paris 1904, Gauthier-Villars. fr. 1,50.

Soehen ist, wie jedes Jahr, das Annuaire des Bureau des Longitudes für das Jahr 1904 erschienen Der kleine Band enthält auf 732 Seiten wieder eine Fülle von Tabellen und Notizen, welche der Techniker, Physiker wie Mathematiker stets zur Hand haben muß. Unter den beigegebenen Abhandlungen ist besonders hervorzuheben: P. Hatt, Explication élémentaire des Marées.

Berlin, Ende 1903. E. Jahnke.

Gauß, C. F. Werke. Neunter Band. Her. v. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen. 528 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 26 *M*.

Der neunte Band der Gaußschen Werke bildet die Fortsetzung zum vierten Bande und enthält, von der ersten Abhandlung (Bestimmung des Breitennnterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenitsektor) abgesehen, nur nachgelassene Arbeiten, Notizen und Rechnungen aus dem Gebiet der Geodäsie. Für den Mathematiker von Interesse sind die aus dem Nachlaß zusammengestellten Notizen über das Erdellipsoid und die geodätische Linie auf dem Sphäroid, über die konforme Doppelprojektion des Sphäroids auf die Kugel und die Ebene, über die konforme Übertragung des Sphäroids auf den Kegelmantel, über die konforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene u. a. m.

Was aber die Bewunderung aller erzwingt, ist die aus dem vorliegenden Bande mit besonderer Deutlichkeit hervortretende Tatsache, daß Gauß, der princeps mathematicorum, Gelegenheit gesucht und Zeit gefunden hat zur Lösung rein technischer Aufgaben. So erfand Gauß für die Zwecke der Hannoverschen Triangulation, die eine recht mühsame und zeitraubende Arbeit war, den unter dem Namen Heliotrop bekannten Apparat, der den Zweck hatte, in dem von einem sehr kleinen Planspiegel reflektierten Sonnenlicht einen zweckmäßigen Zielpunkt abzugeben, und zwar noch in den größten Entfernungen, die bei Triangulationen auftreten können.

Berlin. E. Jahnke.

Alexandroff, I. Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von M. Schuster. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 123 S.

Der vor vier Jahren erschienenen französischen Übersetzung der ausgezeichneten Aufgabensammlung ist nunmehr auch eine deutsche Übertragung gefolgt. Das Hauptinteresse bietet der zweite Abschnitt: Konstruktionsaufgaben und Lösungsmethoden. Er enthält 618 Aufgaben und Lehrsätze, die mit großem Geschick nach den Methoden der geometrischen Örter, der Ähnlichkeit, der Umkehrung, der Symmetrie, der Verschiebung, der Drehung um eine Achse, der Drehung um einen Punkt und der Inversion geordnet sind. Ein dritter Abschnitt enthält noch 138 Aufgaben zur Anwendung der Algebra auf Geometrie und ein letzter Abschnitt 160 vermischte Aufgaben, die allerdings in der Mehrzahl zu rein geometrischen Lösungen führen.

Digitized by Google

Das Werk kann den Fachkollegen aufs angelegentlichste empfohlen werden. Auch wäre es ein durchaus passendes Geschenk für Schüler der oberen Klassen.

Berlin. E. Jahnke.

Snyder, V. and **Hutchinson, I. Differential and integral calculus.** New York 1903, American Book Company. 320 S.

Das Buch bietet eine recht geeignete Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Eine Fülle von Beispielen dient zur Erläuterung des Textes und zur Einübung der Methoden. Die Anwendungen sind der Kurven- und Flächentheorie entnommen. Bemerkenswert sind die zahlreichen Kurvendiskussionen (nebst Figuren), wo das Wesen singulärer Punkte an ebenen Kurven dargelegt wird.

Berlin. E. Jahnke.

Astronomischer Kalender. Für 1905 herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. Wien 1905, Karl Gerolds Sohn. geb. 2,40 *M*.

Neben einer Reihe andersartiger Angaben bietet der Kalender folgendes Astronomische: Kalendarium mit fortlaufenden Angaben über Sonne, Mond und die Planeten, vorher als Einleitung eine populäre Erläuterung der bezüglichen Begriffe, weitere astronomische Tabellen auch über Fixsterne, eine tabellarische Übersicht über das Sonnensystem, ein Verzeichnis geographischer Positionen für eine große Zahl wichtiger Orte. Angefügt sind dann noch Aufsätze über die Theorie der Planetenfiguren, über die Sonnenfinsternis am 30. August 1905 und über neue Planeten und Kometen.

Die Ausstattung ist eine sehr gute. Die Benutzung des Kalenders erfordert weniger wissenschaftliche Kenntnisse als etwa die des nautischen Jahrbuches.

Berlin. E. Kullrich.

Bork-Nath. Mathematische Hauptsätze. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. Zweiter Teil. Pensum der Oberstufe (bis zur Reifeprüfung). Erste Abteilung: Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie, Kegelschnitte. Nach der zweiten, vom Verfasser besorgten Auflage durchgesehene, teilweise umgearbeitete und den Preußischen Lehrplänen von 1901 angepaßte Ausgabe. Leipzig 1905, Dürr. *M* 3,60.

Nath hat die Ausgabe von Borks Mathematischen Hauptsätzen für Realgymnasien und Oberrealschulen mit dem vorliegenden Buch vollendet. Der erste Teil wurde im Archiv III. R. VIII. Bd. S 247 besprochen. Wie dieser kann auch der zweite Teil als recht brauchbar empfohlen werden.

Die Stoffauswahl zeigt im Vergleich mit der Ausgabe von 1896 für Gymnasien neben zahlreichen kleineren Einschaltungen und Erweiterungen solche Veränderungen, wie sie sich für Realanstalten den neuen Lehrplänen zufolge als notwendig ergaben. So sind hinzugefügt: § 13 (Rückblick auf das System der Arithmetik), § 19 (Wahrscheinlichkeitslehre), §§ 33—35 (Gleichungen vierten Grades, diophantische Gleichungen, angenäherte Lösung numerischer Gleichungen), §§ 65—68 (Anwendung der Stereometrie auf

Digitized by Google

die mathematische Erd- und Himmelskunde), §§ 84—86 (die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung). Die Darbietung des Stoffes ist sachgemäß und klar, dabei zum Teil gegen früher vereinfacht. So ist in dem Abschnitt über Transversalen mit Recht die steife Gliederung in Voraussetzung und Beweis fallen gelassen. Das für die elementar-synthetische Behandlung der wichtigsten Sätze über Kegelschnitte Gebotene dürfte nicht ausreichen. Diese Unzulänglichkeit hängt wohl mit der Stoffanordnung zusammen. Nath überschreibt seinen fünften Abschnitt „Die Kegelschnitte“ und teilt ihn ein in einen stereometrischen, einen analytischen und einen elementar-synthetischen Unterabschnitt, wobei der zweite dieser Unterabschnitte die „analytische Geometrie der Ebene“ heißt. Abgesehen von Bedenken bezüglich der Art des Disponierens erscheint die gewählte Reihenfolge weniger empfehlenswert als die der amtlichen Lehrpläne, wo S. 56 die analytische Geometrie der Ebene zuletzt genannt wird. Lasse man doch die Schüler der Realanstalten in die Schönheiten der Lehre von den Kegelschnitten zunächst synthetisch hineinblicken! Dann erst folge die analytische Geometrie! Bei solchem Verfahren dürfte die elementar-synthetische Behandlung der Kegelschnitte zu ganz anderer Bedeutung gelangen, als wenn man sie gleichsam als Zugabe der analytischen Geometrie folgen läßt.

An Einzelwünschen seien die folgenden geäußert: Bei den schiefwinkligen Koordinaten würde S. 268 besser hinzugefügt, daß Parallelen zu den Achsen zu ziehen sind, falls nicht die Angabe S. 267 für rechtwinklige Koordinaten entsprechend abgeändert wird. Bei den S. 300 und S. 319 abgeleiteten Sätzen, daß die Haupt- und Nebenachsen von Ellipsen und Hyperbeln konjugiert sind, ist der Hinweis hinzuzufügen, daß dies der Gleichungsform nach aus Symmetriegründen evident ist. Bei Lehrsatz I. S. 347 und I S. 356 ist der erweiterte Geltungsbereich zu erwähnen. Die Einführung der unendlich fernen Punkte der Kegelschnitte, die S. 320 bei den Asymptoten benutzt wird, geschieht besser ausführlicher und früher. Das S. 352 benutzte räumliche Projizieren hätte mehr benutzt werden sollen. In der Arithmetik dürfte sich in Lehrsatz 6 § 11 am Schluß empfehlen genauer zu sagen, daß die Reihe der Näherungswerte einen konstanten Grenzwert hat, und daß dies der Wert der Wurzel sein soll. Einige Stellen in der Reihenlehre sind noch schärfer zu gestalten. Bei dem S. 142 behandelten Newtonschen Verfahren für die angenäherte Lösung numerischer Gleichungen ist hervorzuheben, daß sich in störender Weise außenliegende Punkte statt der Zwischenpunkte ergeben könnten.

Druck, Papier und äußere Ausstattung sind vortrefflich bis auf eine Reihe mangelhafter Figuren. Hier tut Abhilfe not. Die Figuren müssen doch zum mindesten so gezeichnet sein, daß nicht Ungenauigkeiten durch einfachste Messungen und Konstruktionen leicht nachweisbar sind. Diese Mindestforderung ist leider vielfach, besonders gegen das Ende des Buches nicht erfüllt. Referent will auf diesen in den Berichten für das Archiv bei den Lehrbüchern immer wieder zu rügenden Mangel im Zusammenhange an anderer Stelle ausführlicher zurückkommen.

Berlin. E. Kullrich.

Digitized by Google

C. Rohrbach. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für den Gebrauch an höheren Schulen. IV. Auflage. Gotha 1904, E. F. Thienemann. 8⁰. 36. S. *M.* 0.80 geh. —

Daß von den sehr empfehlenswerten Rohrbachschen Tafeln nun schon die vierte Auflage erscheinen konnte, zeugt davon, daß erfreulicherweise immer weitere Kreise, soweit dies angängig ist, vierstellige Logarithmen benutzen.

Schöneberg. E. Kullrich.

Scheiner, I. Der Bau des Weltalls. 2. Aufl. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Preis geh. 1,25 *M.*

Weber, L. Wind und Wetter. ebenda 1904. Preis geh. 1,25 *M.* (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 24 u. 55.)

Diese geschmackvoll ausgestatteten Werkchen enthalten bei erstaunlich billigem Preise eine Fülle von zuverlässigem wissenschaftlichem Material in einer auch weiten Kreisen zugänglichen Darstellung. Das erste zeichnet sich vor allem durch eine vom Kirchhoffschen Satze ausgehende Besprechung der wohlgesicherten Ergebnisse der Spektralanalyse aus, bei denen die Himmelskörper als „reine Temperaturstrahler" angesehen werden, und der vorläufig nicht trennbare Anteil, den die Fluoreszenz an der Strahlung hat, beiseite gelassen wird. Die mathematische Grundlage der Spektralanalyse ist, ausgehend von der Planckschen Gleichung und dem Kirchhoffschen Satze, in einem Anhange zweckentsprechend gegeben. Der äußere Bau des sichtbaren Weltalls, wie ihn neben den Eichungen und den Ergebnissen der Spektralanalyse Analogieschlüsse lehren, wird als der eines Spiralnebels wahrscheinlich gemacht.

Das zweite Werkchen zeichnet „die Grundlagen und wichtigeren Aufgaben der Meteorologie" in gemeinverständlicher Sprache. Ausführlicher als in anderen Büchern sind die Drachen- und Ballonbeobachtungen behandelt. Insbesondere erfährt die Mechanik des Drachenfluges eine interessante graphische Darstellung, und diese sowie die Bilanzaufstellung über die atmosphärische Energie im 4. Vortrag seien hiermit besonders den Physiklehrern zur Verwertung im Unterrichte bestens empfohlen. Die Zeitschrift des Vereins zur Förderung der Luftschiffahrt erscheint seit 1882 die angegebene Jahreszahl ist zu ändern.

Charlottenburg. H. Samter.

Perry. Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der British Association in Leeds, übersetzt von Prof. Aug. Walzel in Brünn. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Preis 2,50 *M.*

Der durch hervorragende Publikationen auf dem Gebiete der Ingenieurmechanik und Mathematik wohlbekannte Verfasser hat in seinem bereits 1890 veröffentlichten Vortrage „Spinning tops" ein Muster populärer Darstellung geliefert, das sich bekannten andern vorzüglichen Büchern seiner Landsleute Tyndall, Airy usw. würdig anreiht. Insbesondere mußten wir bei der Lektüre des Buches an des letzteren „Gravitation" denken, ein Buch, in dem ein an sich schwer zugänglicher Stoff ohne die Zuhilfenahme der Mathematik bis zu einer erstaunlichen Tiefe durchdrungen wird. Auch das

Kreiselproblem, dem so viele große Mathematiker ihre Kraft gewidmet haben, läßt diese, wenn nicht in allen Punkten auf den Grund gehende, doch den Haupterscheinungen gerecht werdende Darstellung zu. Mit ihm im Zusammenhange aber stehen die astronomischen Erscheinungen der Präzession und Nutation sowie die Bewegung der Mondknoten, auf die eingegangen wird. Auch auf die Frage, ob das Erdinnere fest sein müsse, um die vergleichsweise geringe Präzession zu erklären, wird diskutiert. Wir finden hier eine Anzahl noch wenig bekannter sehr einfacher Experimente, die im Unterrichte Beachtung verdienen. Den Schluß bildet ein Exkurs ins Gebiet des Magnetismus — ist doch der Magnet einer Honigwabe gleich, in deren Zellen Gyroskope spielen — und in die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Die Abbildungen sind gut, die Übersetzung fast völlig korrekt. Wir sagen: ein Schiff schlingert (engl.: rolls). Warum der längstverstorbene Green „Herr G." genannt wird, und warum man zu elektrischen Messungen eines gerade 65 cm langen Lineals bedarf, ist uns nicht klar.

Charlottenburg. H. Samter.

Classen, Fr. J. Mathematische Optik. Leipzig 1901, Göschensche Buchhandlung.

Das kurzgefaßte Lehrbuch kann als ein brauchbares Hilfsmittel denjenigen empfohlen werden, die sich über die mathematische Begründung des sogen. Huygensschen Prinzips und die daraus folgende Beugungstheorie einen Überblick verschaffen wollen. Gerade dieses Kapitel der Optik bietet dem Anfänger besondere Schwierigkeiten. Die Darstellung von Classen kann sehr wohl als Einleitung zu den Entwicklungen von Kirchhoff und v. Helmholtz über denselben Gegenstand dienen. Daß der Verfasser die Polarisation und Doppelbrechung in einem „mathematische Optik" genannten Lehrbuche garnicht berührt, kann der Referent nicht billigen. Wenn aus den im ersten Kapitel aufgestellten fünf Erfahrungssätzen sich keine Doppelbrechung folgern läßt, so hätte der Autor entweder die Prämissen vermehren oder für das Buch einen anderen Titel wählen müssen. Die wellentheoretischen Entwicklungen sind durch einige Kapitel geometrischer Optik unterbrochen, die einen ausgesprochenen Jenenser Einfluß bekunden. Bei der Kürze der Darstellung wird allerdings der Leser kaum eine rechte Vorstellung von der Bedeutung der dort entwickelten Lehren erhalten. Die sphärische Aberration und die Bildfeldkrümmung ist garnicht behandelt, Verzeichnung und Astigmatismus nur sehr kurz dargestellt. Zwischen den verschiedenen Graden der Strahlenvereinigung im Meridional- und Sagittalschnitt ist nicht genügend unterschieden, was sich auch beim Beweise der Sinusbedingung bemerkbar macht. Die allgemeinen Eigenschaften des Sturmschen Bündels sind zwar angegeben, aber ihr Gültigkeitsbereich ist nicht umgrenzt; bekanntlich tritt schon bei der Brechung eines unendlich dünnen Bündels an einer Ebene oder einer Kugelfläche eine unendlich kleine Brennstrecke auf, die mit der allgemeinen Darstellung von Sturm in Widerspruch steht.

Der letzte Teil des Buches, der die speziellen Beugungserscheinungen abhandelt, zeichnet sich vor anderen Darstellungen durch große Klarheit der Beweisführung aus.

Berlin. A. Gleichen

Musil, A. **Bau der Dampfturbinen.** Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Den rühmlichst bekannten Büchern des Verfassers über die verschiedenen Arten von Wärmekraftmaschinen schließt sich das vorliegende Buch über Dampfturbinen in würdiger Weise an. Bei der gerade über diesen Gegenstand vorhandenen bereits sehr umfangreichen Literatur war es natürlich nicht gut möglich, viel grundsätzlich Neues zu bringen. Trotzdem kann man dem Verfasser dankbar sein, daß er es verstanden hat, aus den umfangreichen Veröffentlichungen und Versuchen von Stodola, Lewicki, Gutermuth und anderen das Wesentliche herauszuschälen und in seiner bekannten, übersichtlichen und leichtfaßlichen Form vorzutragen. Auf eine kurze, das Hauptsächliche hervorhebende Beschreibung des Wesens der Dampfturbine und der verschiedenen Dampfturbinenarten folgt eine knappe, übersichtliche Besprechung der Theorie des ausströmenden Dampfes, insbesondere die Theorie der Laval-Düse, worauf dann die sechs wichtigsten Arten von Dampfturbinen (Laval, Parsons, Zoelly, Riedler-Stumpf, Curtis, Rateau) anhand vorzüglicher belehrender Skizzen und Mitteilung von Versuchsergebnissen eingehend geschildert werden. — Jedem, der sich über den Bau und die Wirkungsweise dieser hauptsächlichsten Dampfturbinenarten schnell und eingehend unterrichten will, sei das vorzügliche Buch angelegentlichst empfohlen.

Berlin. R. Vater.

Walther, K. und **Röttinger, M.** **Technische Wärmelehre (Thermodynamik).** Leipzig 1905, Sammlung Göschen.

Es erscheint auf den ersten Blick etwas gewagt, eine technische Wärmelehre in einem Bändchen von dem Umfange der kleinen Bücher aus der Sammlung Göschen mit einiger Aussicht auf Erfolg zu behandeln. Es muß jedoch den Verfassern zugestanden werden, daß sie es verstanden haben, aus dem umfangreichen Gebiete das für den Ingenieur Wichtige herauszugreifen und in knapper, dabei aber doch im allgemeinen klarer Form zur Darstellung zu bringen. Das kleine Buch wird sicherlich vielen Ingenieuren um so willkommener sein, als es meines Wissens bisher in der Literatur an einer solch knappen Darstellung der wichtigsten Sätze aus der technischen Wärmelehre fehlte. Einige Kenntnisse der höheren Mathematik werden zwar vorausgesetzt, sie beschränken sich aber fast durchgängig auf die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, die heutzutage wohl jedem wissenschaftlich gebildeten Ingenieur geläufig sind. Die vielen zeichnerischen Darstellungen und mehrfach eingeschalteten Zahlenbeispiele tragen wesentlich zur Erleichterung des Verständnisses bei.

Berlin. R. Vater.

Schubert, H. **Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie.** 48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905 (Festgabe). Leipzig 1905, Spamer.

Die zahlentheoretischen Probleme, in welchen gefordert wird, daß gewisse Elemente einer geometrischen Figur in rationalen Zahlen ausgedrückt werden, haben neben ihrem nicht geringen wissenschaftlichen Interesse auch hohen pädagogischen Wert: mit ihren Lösungen lassen sich geometrische

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

und trigonometrische Sätze an Zahlenbeispielen in absoluter Genauigkeit veranschaulichen und Aufgaben mit ganzzahligen Daten und ganzzahligen Ergebnissen bilden; beides erhöht das Verständnis und das Interesse beim Unterricht. Verfasser hat nun eine Reihe eigener Untersuchungen aus diesem Gebiete zusammengefaßt und in seiner bekannten ansprechenden Weise dargestellt; leider ist die Literaturangabe recht dürftig, weshalb im folgenden einige bibliographische Ergänzungen gegeben werden sollen. Der erste Teil (§ 1—8) ist Figuren gewidmet, die aus heronischen Dreiecken zusammengesetzt sind; dabei zeigt sich die Fruchtbarkeit eines einfachen Verfahrens, das u. a. schon von F. Bessell angegeben worden ist und in seinem Kern auf Vieta, ja auf Diophant zurückgeht. Es beruht darauf, daß in einem heronischen Dreieck die Tangenten der halben Dreieckswinkel (die „Konstituenten" dieser Winkel) rational sind und daß zwischen ihnen eine einfache Beziehung besteht. F. Bessell sagt: „Am einfachsten erledigt sich die Aufgabe, rationale ebene Dreiecke herzustellen, durch die Bemerkung, daß es genügt, zwei Winkel A, B eines ebenen Dreiecks rational zu machen, damit der dritte es auch sei, nämlich $C = (1 - AB) : (A + B)$."[1]) Dieses Verfahren wird nun vom Verfasser auf verschiedene Figuren angewandt. Für die Elemente von Dreiecken mit drei rationalen Winkelhalbierenden (§ 3), die man mit dieser Methode rasch erhält, würden sich ihm dieselben Ausdrücke ergeben haben, welche E. Kummer am Schlusse seiner Vorlesung über Zahlentheorie (z. B. Winter 80/81) auf etwas anderem Wege abzuleiten pflegte; auch die Aufgabe, heronische Sehnenvierecke zu bilden, für deren Elemente Verfasser elegante Ausdrücke ableitet (§ 7), ist von E. Kummer in seiner berühmten Abhandlung[2]) umfassend gelöst. Referent hat vor einer Reihe von Jahren an rationalen Figuren Untersuchungen angestellt, die für heronische Dreiecke, Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden, sowie für heronische Sehnenvierecke im Gedankengang und in den Ergebnissen mit denen des Verfassers übereinstimmen. Für heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie (§ 4. 5), zu deren Auffindung Verfasser früher[3]) einen Weg angab, der zum Schlusse auf ein Probieren hinausläuft, ergab sich dem Referenten damals auf jenem Wege ein rationelles Verfahren.[4]) Durch dasselbe gewinnt man nicht bloß den vom Verfasser jetzt ebenfalls methodisch abgeleiteten Typus (bezeichnet man die Kotangenten der Hälften der nicht durch die Mittellinie geteilten Dreieckswinkel mit α und β, so ist dieser Typus charakterisiert durch $\beta = \frac{\alpha + 2}{2\alpha + 1}$, bezw. $\beta = \frac{2\alpha - 1}{\alpha - 2}$), sondern unzählige andere; es mögen hiervon (abgesehen von den Dreiecken, welche man durch Zerlegung des ursprünglichen Dreiecks, sowie durch deren anderweitige Zusammenlegung erhält) die Fälle herausgegriffen werden, in denen β die Werte hat:

$$\frac{3\alpha}{\alpha^2 - 1}, \qquad \frac{\alpha(2\alpha^4 + 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 7\alpha - 2)}{2\alpha^4 - 7\alpha^3 - 12\alpha^2 - 8\alpha - 2}.$$

1) Arch. (1), 65, 371, 1880. A, B, C bedeuten dabei die „Konstituenten" der „heronischen" („rationalen" bei Bessell) Dreieckswinkel, oder auch diese Winkel selbst.

2) Journ. f. Math. 37, 1 ff., 1848.

3) Unt.-Bl. f. Math. u. Nat. 6, Nr. 4, 70. 71, 1900.

4) Näheres hierüber in einem demnächst erscheinenden Aufsatz.

Digitized by Google

Das Dreieck: $a = 145$, $b = 240$, $c = 209$, $2t_c = 337$ paßt z. B. nicht in den vom Verfasser bezeichneten Typus. Seine Annahme, daß der von ihm angegebene Typus den einzig möglichen darstellt, beruht wohl auf einem Versehen. Da sich auf diese Annahme die These stützt, daß es keine heronischen Dreiecke mit mehr als einer rationalen Mittellinie gebe, so steht auch der Beweis dieser These noch aus. Durch Einschränkungen, welche Verfasser für die Konstituenten macht, erschwert er sich zuweilen die Untersuchung; es wäre ihm sonst, als er heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie und einer rationalen Winkelhalbierenden (§ 6) aufsuchte, wohl auch das merkwürdige Beispiel $a = 250$, $b = 91$, $c = 289$ nicht entgangen, welches kleinere Zahlen hat als die von ihm angeführten, und sogar ein heronisches Dreieck mit einer rationalen Mittellinie t_a und *drei* rationalen Winkelhalbierenden darstellt. Nachdem Verfasser noch (§ 8) dem Verfahren eine interessante Ausdehnung auf heronische Sehnenpolygone gegeben hat, wendet er sich der Bildung von Dreiecken mit zwei (§ 9) und drei (§ 10) rationalen Mittellinien zu; für die letzteren stellt er durch eine sinnreiche Analyse drei Typen auf. Diese Aufgabe ist bekanntlich schon von Euler[1]) gelöst. — Zum Schluß (§ 11—13) werden Pyramiden mit rationalen Kanten und rationalem Rauminhalt aufgesucht, von denen die Tetraeder weitere Beispiele zu den bekannten Schweringschen hilden. Vor längerer Zeit hat Referent das eingangs erwähnte Verfahren auf die Darstellung von Tetraedern ausgedehnt, in welchen die Kanten, die Inhalte der Begrenzungsdreiecke und der Rauminhalt rational sind.[2])

Das reiche Tabellenmaterial des Büchleins wird gewiß von vielen willkommen geheißen werden und bei dem Unterricht gute Dienste leisten, auch ist zu wünschen, daß die Schrift (welche nach Angabe des Verfassers einen Teil eines später erscheinenden Werkes bilden soll) in weiteren Kreisen zu Untersuchungen auf diesem Gebiete anregt, das in so merkwürdiger Weise die abstrakte Zahlentheorie mit der Geometrie verkettet.

Berlin. R. Güntsche.

Stodola, A. Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. **Die Dampfturbinen** mit einem Anhange über die Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. Zweite Auflage, Berlin 1904, Julius Springer.

Das Studium dieses Werks kann den Mathematikern auf das angelegentlichste empfohlen werden; behandelt doch der Verfasser das aktuellste Thema der modernen Maschinentechnik mit mathematischen Hilfsmitteln, die sich keineswegs bloß auf die ersten Elemente der Differential- und Integralrechnung beschränken. Herr Stodola liefert durch die Tat einen ebenso dankenswerten wie interessanten Beitrag zur Klärung des Verhältnisses von

1) Op. min. II. Comm. ar. 87, p. 488—491: „J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème (vide Comm. 69, T. II, p. 294; 71, ibid, p. 362), sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici, réunit à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité.“

2) Ein Beispiel dieser Art hat Referent Arch. (3), 7, 179, 1904 veröffentlicht, allgemeinere Typen finden sich in einer demnächst erscheinenden Abhandlung desselben.

Digitized by Google

Mathematik und Technik und eröffnet der Mathematik eine reiche Quelle von anregenden Aufgaben, die hoffentlich nicht ungenutzt bleibt.

In erster Linie fesselt den Mathematiker die Theorie der kritischen Umlaufsgeschwindigkeiten schnelllaufender, biegsamer Wellen. Diese von Herrn Stodola nach verschiedenen Richtungen ausgebaute Theorie zeigt nach der mathematischen Seite hin die engste Verwandtschaft mit der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe; es treten hier wie dort lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung auf, die einen Parameter linear enthalten. Die den kritischen Geschwindigkeiten entsprechenden Werte des Parameters werden als Wurzeln einer transzendenten Gleichung in derselben Weise bestimmt wie die Schwingungszahlen eines Stabes nach Poisson. Bei Wellen, die mit Scheibenrädern von veränderlichem Durchmesser belastet sind, kommt man auf ähnliche analytische Fragen wie bei den Schwingungen heterogener Stäbe. Noch andere Eigentümlichkeiten bietet die Theorie der kritischen Geschwindigkeiten zweiter Art dar, die von der Durchbiegung horizontaler Wellen herrühren. Die Stabilität des Bewegungszustandes bei Umlaufszahlen zwischen kritischen Geschwindigkeiten wird mit den von Routh ausgebildeten Methoden der modernen analytischen Mechanik untersucht.

Sodann sind verschiedene theoretisch interessante Fragen aus der Dynamik flüssiger und gasförmiger Körper zu erwähnen. Der Riemannsche Verdichtungsstoß wird bei der Bewegung des strömenden Dampfes diskutiert. Zu einem interessanten Integrationsproblem, bei dem Herr Hirsch den Verfasser unterstützt hat, führt die Frage nach der Druckverteilung in einem expandierenden Wasser- oder Dampfstrahl.

Aus der Elastizitätstheorie seien die Untersuchungen über die Deformation und Festigkeit schnelllaufender Räder unter der Wirkung ihrer Zentrifugalkräfte sowie über die Größe und den Einfluß der Durchbiegung großer horizontaler Scheiben erwähnt.

Sehr wichtig für die technischen und ökonomischen Fragen sind natürlich die Erörterungen aus der Thermodynamik. Ein Anhang unseres Werks enthält eine klare Auseinandersetzung über die Grundlagen dieser Disziplin, insbesondere über den zweiten Hauptsatz; daran schließt sich eine Übersicht über die verschiedenen Wärmekraftmaschinen und ihre Aussichten. Interessant ist dabei, mit wie großem Nachdruck der Verfasser die Erfinder davor warnt, die theoretischen Grundlagen der Thermodynamik zu ignorieren.

Über den eigentlich technischen Inhalt des Werks zu urteilen oder auch nur zu berichten, liegt außerhalb der Kompetenz des Referenten; es sei nur bemerkt, daß auch der nicht technisch gebildete Leser in den technischen Teilen des Werks eine Fülle von anregendem Stoff findet.

A. Kneser.

Weber, Eduard von. Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1900, B. G. Teubner. XI u. 622 S. gr. 8°, (B. G. Teubners Sammlung, Band II.)

Der Fachgelehrte, dem das vorliegende Buch zur Anzeige übergeben worden war, hat nach mehrjährigem Aufschube seinen Auftrag unerledigt gelassen und das Werk der Redaktion zurückgegeben. Um den Lesern des

Digitized by Google

Archivs die Kenntnis des Inhaltes nicht länger vorzuenthalten, hat sich der Unterzeichnete veranlaßt gesehen, mit Herrn v. Weber selbst in Verbindung zu treten, und hat mit Benutzung der von diesem gelieferten Angaben die folgende referierend gehaltene Besprechung geschrieben.

Vermöge seiner langjährigen erfolgreichen Forschungen auf dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen war Herr v. Weber der gegebene Mathematiker zur Bearbeitung des Themas. Zum Bearbeiter des Abschnittes „Partielle Differentialgleichungen" in Bd. II, S. 294—399, der Enzyklopädie war er wegen seiner umfassenden literarischen Kenntnisse und seiner schöpferischen eigenen Gedanken von den Leitern dieses großen Unternehmens gewählt worden, und somit kann die vorliegende Schrift als die eingehende und genaue Durchführung desjenigen Teiles des Artikels in der Enzyklopädie bezeichnet werden, der sich auf das Pfaffsche Problem bezieht. Das Buch entspricht also dem Plane, den die Teubnersche Verlagsbuchhandlung mit der Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschuß ihrer Anwendungen verfolgt.

Die historische Entwicklung des Pfaffschen Problems nimmt ihren Ausgangspunkt von Pfaffs grundlegender Idee, die Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als Integraläquivalente einer gewissen totalen („Pfaffschen") Gleichnng zu deuten und dadurch die vollständige Integration der ersteren Gleichung, sowie die Herstellung einer „reduzierten Form" für die letztere als äquivalente Probleme zu erweisen. Während Graßmann die zweite dieser Aufgaben und damit die Theorie der Pfaffschen Gleichung zu einem vorläufigen Abschluß brachte, gaben Jacobi und nach ihm Donkin und Bour eine Lösung des ersten Problems, welche auf der Bestimmung je eines Integrals sukzessiver vollständiger Systeme beruht. Aber obwohl es Natani und Clebsch gelang, diese Methode auf das Pfaffsche Problem zu übertragen, und Frobenius durch Aufdeckung der algebraischen Grundlage dieses Verfahrens das Problem, einen Pfaffschen Ausdruck auf seine kanonische Form zu reduzieren, vollständig erledigte, blieb es doch erst Lie vorbehalten, durch Zurückgreifen auf Pfaffs ursprünglichen Ansatz und die damit verbundene Schaffung der Begriffe Flächenelement, Elementverein, Berührungstransformation jene beiden Probleme wieder zu vereinigen und ihrer gemeinsamen endgültigen Lösung zuzuführen.

Das vorliegende Buch macht es sich nun zur Aufgabe, diesen verschiedenen Entwicklungsphasen der Theorie in gleicher Weise gerecht zu werden und dieselben nicht nur nach ihrer historischen Entwicklung, sondern vor allem in ihrem inneren Zusammenhange erschöpfend darzustellen. Der erste, dem Pfaffschen Problem im engeren Sinne gewidmete Teil des Buchs beginnt mit der Definition der „Klasse" eines Pfaffschen Ausdrucks und der Formulierung des Äquivalenzproblems (Kap. III). Die älteren Methoden von Pfaff und Graßmann führen sodann zur Herstellung einer Normalform des Pfaffschen Ausdrucks und damit zu einem ersten Beweis des „Fundamentaltheorems", welches den Zusammenhang zwischen der Klasse und der Normalform ausspricht (Kap. IV). An die Untersuchung der mit dem Pfaffschen Ausdruck invariant verknüpften vollständigen Systeme (Kap. V) schließt sich dann sofort eine zweite Herleitung des Fundamentaltheorems auf Grund des von Natani, Clebsch und Lie ausgestalteten Jacobischen

Reduktionsschemas (Kap. VI). Aus der Betrachtung der Integraläquivalente einer Pfaffschen Gleichung fließen die Begriffe „Elementverein“ (Kap. VII) und „Berührungstransformation“, welche dann rückwärts wiederum für das Pfaffsche Problem verwertet werden, insbesondere zur allgemeinen Erledigung des Äquivalenzproblems dienen (Kap. VIII). Die Wiederaufnahme der Entwickelungen von Kap. VI führt den Verf. zur Methode von Frobenius und ihrer Verallgemeinerung (Kap. IX), ferner zu dem Lieschen Begriff der mit dem Pfaffschen Ausdruck invariant verknüpften infinitesimalen Transformationen und damit zu einer dritten, invariantentheoretischen Grundlegung der Pfaffschen Theorie, weiterhin zu dem Begriff der infinitesimalen Berührungstransformation (Kap. X). Die Definitionsgleichungen der endlichen Berührungstransformationen (Kap. XI) liefern noch eine vierte Methode, die Fundamentalsätze der Theorie zu begründen, und bilden zugleich den Übergang zu dem zweiten Hauptteil des Werks, der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Voranstellung des Lieschen Integralbegriffs ermöglicht es, alle Hauptsätze dieser Theorie durch einfache begriffliche Umdeutung der bisherigen Ergebnisse abzuleiten, worauf die älteren Methoden, insbesondere die Cauchysche Charakteristikentheorie und ihre Übertragung auf Involutionssysteme, sowie die sogenannte Hamilton-Jacobische Theorie der dynamischen Differentialgleichungen durch geeignete Spezialisierung dem allgemeinen Schema eingeordnet werden (Kap. XII u. XIII). Auch Lies Funktionengruppe, sowie Bäcklunds Erweiterung der Lieschen Integrationstheorie erweisen sich als Spezialfälle der allgemeinen Theorie des Pfaffschen Problems (Kap. XIV).

Außer zahlreichen neuen Einzelheiten in der Darstellung der verschiedenen Theorien und ihres Zusammenhanges, sowie in der Durchführung der Beweise sind von eigenen Untersuchungen des Verf. hervorzuheben: die Sätze über die analytische Beschaffenheit der Normalform (Kap. VI, § 3), die Verallgemeinerung der Frobeniusschen Methode (Kap. IX, § 4) und ihre Verwertung für die Bäcklundsche Theorie (Kap. XIV, § 5), endlich ein Teil der Sätze über infinitesimale Transformationen eines Pfaffschen Ausdrucks (Kap. X).

Die beiden einleitenden Kapitel des Werks enthalten die Ableitung der im folgenden benutzten Determinantensätze, insbesondere die Theorie der Matrizen, der linearen Gleichungen und der schiefsymmetrischen Determinanten (Kap. I), ferner eine ausführliche Darstellung der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und der Systeme solcher Gleichungen, sowie der Systeme unbeschränkt integrabler totaler Differentialgleichungen.

Am Ende des Bandes findet man eine historische Übersicht, ein Wort- und Sachregister, endlich ein Literaturverzeichnis.

Berlin. E. Lampe.

Marcolongo, R. Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici. XIV u. 366 S. Milano 1904, Ulrico Hoepli.

Als eines der beliebten Manuali Hoepli veröffentlicht, behandelt das Buch in möglichst elementarer Weise die mathematische Theorie der

Elastizität. Um die nötigen Hilfsmittel dem Leser bereitzustellen, schieht der auf dem Gebiete der mathematischen Physik rühmlich bekannte Verf. einige einleitende Kapitel voraus, welche die Lehre von den harmonischen und polyharmonischen Funktionen, die Hauptsätze über die Newtonschen Potentialfunktionen und die Prinzipien der Mechanik kontinuierlicher Körper in knappen Umrissen vorführen. Wegen der Grenzen, die in dem Manuale innezuhalten sind, werden dann nur die Fragen erörtert, welche sich auf das Gleichgewicht der elastischen Körper von drei Dimensionen beziehen, natürlich auch hier nur solche, die keine höheren Hilfsmittel der Analysis zu ihrer Bewältigung verlangen. Als ein klar geschriebenes Lehrbuch wird das Werkchen für Studierende zur ersten Einführung recht nützlich sein.

Berlin. E. Lampe.

Pascal, Ernst. Repertorium der höheren Mathematik. II. Teil. **Die Geometrie.** Ausorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals. Von A. Schepp. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 8°. 9 u. 712 S. Preis geb. ℳ 12.

Als ich kurz nach Empfang dieses Buches einige Kapitel genauer durchgesehen hatte, beabsichtigte ich, ihm eine eingehendere Besprechung zu widmen, wurde aber durch das unvorhersehbare Zusammentreffen verschiedener Umstände gezwungen, die Ausführung meiner Absicht immer weiter hinauszuschieben. Nun befindet sich das Buch schon in vieler Händen; es genügt daher wohl, eine kurze Kennzeichnung von ihm zu geben.

Wie in der Vorrede zum ersten Bande erwähnt wird, soll das Buch eine Art „Taschenbuch“ für Studierende der Mathematik bilden, worin sie, kurz zusammengefaßt, alle jene Begriffe und Resultate wiederfinden, die sie sich während ihrer Studienzeit nach und nach aneignen sollen. Jedenfalls hat damit der Verfasser aus Bescheidenheit seinem Buche eine zu enge Bestimmung vorgeschrieben. Solche Idealstudenten, die auch nur den größeren Teil der in dem vorliegenden Bande enthaltenen Kapitel einigermaßen beherrschen, dürfte es wenige geben. Das Buch wird sicherlich einem viel weiteren Leserkreise mit großem Nutzen dienen. Es sind in ihm wohl ziemlich alle Teile der Geometrie berücksichtigt; nur der kinematischen Geometrie, einer heutzutage viel behandelten Disziplin, ist kaum Erwähnung getan. Anwendungsgebiete wie darstellende Geometrie, Graphostatik etc. wurden grundsätzlich nicht berücksichtigt. Jeder Kenner eines Spezialgebietes wird natürlich in dem entsprechenden Kapitel dieses Repertoriums vieles vermissen; auch Ungenauigkeiten in der Formulierung von Sätzen, in den Literaturverweisungen u. dgl. sind unschwer herauszufinden. Trotzdem wird jeder Geometer sicherlich mit Nutzen das Buch zur Hand nehmen, sobald er in einem ihm nicht durch Spezialforschung bekannten Gebiete einen Überblick über die wichtigsten Sätze und die Hauptwerke der Literatur gewinnen will. Ja selbst, wenn der III. Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften abgeschlossen sein wird, dürfte dieses Repertorium diesbezüglich seine Rolle noch nicht ausgespielt haben. Wie eine Vergleichung mit den bis jetzt erschienenen Heften des Bandes III zeigt, finden sich eben in dem Repertorium elementarere Dinge noch erwähnt, die in der Enzyklopädie keine Stelle mehr fanden.

Digitized by Google

Auf die Anführung von Ungenauigkeiten, die mir aufgefallen, verzichte ich; denn es ist ja selbstverständlich, daß eine solch gewaltige Arbeit, wie sie hier ein einzelner geleistet hat, mit Fehlern behaftet ist.

Möge das Buch zur Verbreitung der Kenntnis des *Gesamtgebietes* der Geometrie und damit zur Bekämpfung des zu weit gehenden Spezialistentums beitragen!

Wien, im Februar 1905. E. Müller.

Abraham, M. Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von A. Föppl. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von M. Abraham. XVIII u. 443 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Mit vorliegendem Werke wird dem Physiker eine von M. Abraham besorgte zweite Auflage der bekannten Föpplschen Einführung in die Maxwellsche Theorie geboten.

Wenn das Föpplsche Werk mehr als ein anderes Buch zur Verbreitung der Kenntnisse der Elektrizitätslehre beigetragen hatte, so verdankte es dies in erster Linie der ungewöhnlichen pädagogischen Begabung des Verfassers, seiner Gabe, die wesentlichen Züge der Maxwellschen Theorie bestimmt hervortreten zu lassen und die Details in so natürlicher Weise anzugliedern, daß der Studierende ein vorzügliches Gesamtbild erhielt. Um ein derartiges Resultat zu erzielen, bediente sich Föppl einer ungemein klaren, an konkrete Bilder anknüpfenden, zuweilen ins Breite gehenden Sprache. Aus einem solchen Werke, welches im übrigen durchaus den Stempel selbständigen Denkens an sich trug, konnte der Leser fast mühelos tiefgehende Kenntnisse von der Maxwellschen Theorie sich aneignen.

Nehmen wir die Abrahamsche Bearbeitung des Föpplschen Werkes zur Hand, so empfinden wir anfangs eine Enttäuschung. Ziel und Zweck des Föpplschen Werkes scheinen verschoben. An Stelle der gekennzeichneten Föpplschen Darstellungsweise ist eine knappe, abstraktere analytische getreten, und es ist bald ersichtlich, daß das Abrahamsche Werk sich an einen ganz anderen Leserkreis wendet, nämlich an einen Leserkreis, dem die Grundzüge der Maxwellschen Theorie bereits bekannt sind.

Haben wir uns aber einmal mit dieser Tatsache abgefunden, dann dürfen wir auch der Abrahamschen Bearbeitung unsere Anerkennung nicht versagen. Gründlichkeit und Präzision sind seine Hauptvorzüge.

Der Inhalt des Werkes zerfällt in folgende Hauptabschnitte: 1) Eine Einleitung in die Vektoranalysis, 2) Das elektrische Feld, 3) Das elektromagnetische Feld, 4) Weiterer Ausbau der Theorie. Diese Hauptabschnitte sind wieder in Kapitel eingeteilt. Bei dieser Einteilung fällt auf, daß der elektrische Strom als Unterabteilung des Abschnitts elektrisches Feld erörtert wird, während der Magnetismus später unter dem Hauptabschnitt elektromagnetisches Feld behandelt wird.

Wenden wir uns zunächst zu der Abrahamschen Einführung in die Vektoranalysis. Im großen und ganzen hat der Verfasser die Bezeichnungsweise der mathematischen Enzyklopädie adoptiert. Daß die skalaren Produkte im allgemeinen nicht durch Einschließung in runde Klammern gekennzeichnet werden, daß diese Einschließung vielmehr nur da angewandt wird, wo eine

Auseinanderhaltung der Faktoren eines komplizierteren Produkts wünschenswert erscheint, ist ein bestimmter Vorzug. Eine weitere Abweichung von der Bezeichnungsweise der Enzyklopädie wäre aber noch zu empfehlen, nämlich eine konsequent durchgeführte Kennzeichnung der Absolutwerte eines Vektors durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben. Abraham schreibt die Absolutwerte der Komponenten eines Vektors mit gotischen Buchstaben, trotzdem letztere nur für Vektoren bestimmt sind. — Auf Seite 10 ist nicht unterschieden zwischen Komponenten eines Vektors und den Absolutwerten dieser Komponenten. Auf S. 11 Fig. 4 stimmen die Bezeichnungen nicht mit dem Text überein. — Bei der Ableitung der vektoranalytischen Formeln verfährt Abraham oft so, daß er die vorkommenden Vektoren zuerst in ihre Komponenten nach den Richtungen der zunehmenden x, y, z eines Koordinatensystems zerlegt, den gesuchten Ausdruck für eine einzelne Komponente ableitet und dann verallgemeinert. Ein solches Verfahren begibt sich des bedeutsamen, charakteristischen Vorteils der Vektoralgebra, nämlich ihrer Unabhängigkeit von einem Koordinatensystem, ihrer Invarianz. Semikartesische Beweise sind Nothehelfe und sollten ganz aus der Vektoranalysis ausgemerzt werden. — Einen unverhältnismäßig großen Raum nimmt bei Abraham die Behandlung der Vektorfelder ein. Obwohl dieser Gegenstand wichtig ist und nicht ohne Geschick behandelt wird, so gehört doch eine so ausführliche Behandlung nicht in das vorliegende Werk. Werfen wir nunmehr einen Blick auf die Behandlung der Elektrostatik, so bemerken wir zunächst, daß die gewählten Maßeinheiten abweichend von den in der mathematischen Enzyklopädie zur Anwendung kommenden sich an die Coulombschen Messungen anschließen. Und zwar mit Recht! Nachdem nämlich durch die neuere bedeutsame Entwicklung der Elektronentheorie die elektrischen Quanten wieder in den Vordergrund getreten sind, und dadurch die Notwendigkeit gegeben ist, für die zwischen ihnen wirkenden Kräfte die einfachsten mathematischen Ausdrücke zu wählen, mußten die 4π aus den Gleichungen für die Elektronen verschwinden und dafür in den Feldgleichungen auftreten. Im übrigen ist die Behandlung der Elektrostatik elegant und instruktiv.

Entsprechend seiner Wichtigkeit nimmt der Abschnitt über das elektromagnetische Feld den größten Raum ein. Man findet hier außer der allgemeineren Theorie des Feldes, welche exakt und eingehend erörtert wird, wichtige Kapitel über Schwingungen gekoppelter Systeme und über elektrische Resonanz, welche in der drahtlosen Telegraphie eine so eminente praktische Bedeutung gewonnen haben. Ferner hat Abraham in diesem Abschnitt die Theorie der Reflexion der Wärmestrahlen durch Metalle behandelt, eine Theorie, welche Drude bekanntlich zuerst aus den Maxwellschen Gleichungen gewonnen hatte und welche durch die Versuche von Hagen und Rubens so schön bestätigt worden sind. Erwähnung verdient auch die Behandlung der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs Drähten und Kabeln.

Im letzten Abschnitt, betitelt: weiterer Ausbau der Theorie, treten die eignen theoretischen Ansichten des Verfassers mehr als anderswo in den Vordergrund und zwar besonders bei der Erörterung der Eigenschaften ferromagnetischer Körper, speziell des remanenten Magnetismus und ferner bei der Behandlung der unipolaren Induktion und der Frage der Relativbewegung und der absoluten Bewegung. Was letztere Frage betrifft, so scheint Refe-

renten eine Lösung dieses schwierigen, viele Rätsel bietenden Problems noch in weiter Ferne. Es fehlt sogar einstweilen noch an einer klaren eindeutigen Fragestellung.

Nur die weitere Ansammlung wertvollen Beobachtungsmaterials kann hier Licht verbreiten.

Zum Schlusse wünschen wir dem Abrahamschen Werke eine recht weite Verbreitung. Wenn es auch manchem Leser etwas Mühe machen wird, sich in das Werk hineinzuarbeiten, so wird er für diese Mühe doch reichlich belohnt durch die Gewinnung neuer, interessanter Gesichtspunkte, durch die Vertiefung seiner Kenntnisse vom Elektromagnetismus und nicht zum mindesten durch den ästhetischen Genuß, welchen eine in gewandter Sprache abgefaßte, knappe und exakte Darstellung der Elektrizitätslehre bereiten muß.

Bonn, Physikal. Institut im August 1905. A. H. Bucherer.

Thomae. Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Die Gründe, die den Herrn Verfasser bewogen haben, das in der Überschrift genannte Werk herauszugeben, sind in der Einleitung genannt.

Eine Sammlung von Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Funktionen ist von Herrn Schwarz herausgegeben worden. Dieselbe baut sich im wesentlichen auf die Weierstraßischen Grundfunktionen $\sigma(u)$ und $\wp(u)$ auf und hat eine weitgehende Verbreitung gefunden. Nun hat es sich gezeigt, daß für eine Reihe von Problemen die Weierstraßischen Funktionen weniger geeignet sind als die Jacobischen. Der Herr Verfasser nennt mit Recht die Probleme, die zu wirklichen Rechnungen führen, und hat sich infolgedessen entschlossen, eine ähnliche Formelsammlung auf Grund der Jacobischen Funktionen herauszugeben.

Der Herr Verfasser kann sicher sein, daß sein Vorgehen von solchen, die sich mit Anwendungen beschäftigen, dankbar begrüßt werden wird.

Die Sammlung bietet auf dem kurzen Raume von 26 Seiten eine übergroße Anzahl wichtiger Formeln aus den verschiedenen Teilen der elliptischen Funktionen dar. Es werden die Thetafunktionen, die gewöhnlichen elliptischen Funktionen — und zwar neben der Sinus-, Kosinus-, Deltaamplitude insbesondere die Tangensamplitude und der Quotient der Sinus- und Deltaamplitude — die Zeta-, die Omegafunktionen und endlich die verschiedenen Arten der elliptischen Integrale in Betracht gezogen.

Freilich will es Referenten erscheinen, als wenn die Darstellung bisweilen eine zu gedrängte wäre und eine etwas breitere Ausführung an einigen Stellen die praktische Brauchbarkeit des Buches wesentlich erhöhen würde. So fehlt z. B. die für die Anwendungen so ungemein wichtige Tabelle für die Substitution halber Perioden bei den Thetafunktionen. Die allgemeine Substitutionsformel, die der Herr Verfasser pag. 2 unter III gibt, bietet denn doch zu wenig, und auch die Formeln 4 unter III dürften nicht allen Lesern genügen. Die trigonometrischen Reihen der elliptischen drei fundamentalen Funktionen finden sich nicht vor. Am Schlusse sind

Digitized by Google

zwar die entsprechenden Reihen für die Logarithmen der Funktionen gegehen, indessen hahen doch auch die Darstellungen der Funktionen selbst ihre Bedeutung.

Die lineare Transformation der Thetafunktionen ist nur ganz kurz skizziert, die lineare Transformation der elliptischen Funktionen im wesentlichen nur für die Quadrate derselben durchgeführt, ebenso ist nur ein Teil der Formeln der quadratischen Transformation angegehen.

Da in der Vorrede die Aufgabe der Berechnung der elliptischen Transzendenten in den Vordergrund gerückt wird, so würde eine Hinzufügung von Tahellen, wie sie sich in einigen neneren Lehrbüchern finden, sicherlich von einer Anzahl von Lesern dankbar begrüßt werden.

Die Bezeichnungen, die der Herr Verfasser hraucht, sind zum Teil eigenartig. So definiert er die Funktion $\vartheta(z)$ durch die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau mm + 2mz}$$

oder auch:

$$1 + 2q \cos zi + 2q^4 \cos 2zi + \ldots$$

Es entspricht hiernach einem reellen Argumente der Thetafunktionen ein rein imaginäres der Kosinusfunktion, was im allgemeinen nicht üblich ist; daneben wird $\vartheta(z)$ gesetzt, wo Jacobi $\vartheta_3(z)$ setzt.

Ferner werden die drei Jacobischen Grundfunktionen durch

$$\text{sa}\, u, \ \text{ca}\, u, \ \text{da}\, u$$

bezeichnet. Die Gründe hierfür sind Seite 24 angedentet und in dem Werke des Herrn Verfassers „Elementare Theorie der analytischen Funktionen“ pag. 124 etwas näher ausgeführt.

Referent hat nicht die Absicht, die Zweckmäßigkeit der Thomaeschen Bezeichnungen zur Diskussion zu ziehen, möchte aber bei dieser Gelegenheit den Wunsch aussprechen, daß es, wie auf anderen Gebieten, so auch auf dem der elliptischen und höheren Transzendenten gelingen möchte, allgemein geltende einheitliche Bezeichnungsweisen einzuführen und damit dem heutigen Zustand der Vieldeutigkeit der Bezeichnungen ein Ende zu machen.

Um die Brauchbarkeit der Formeln und Sätze darzutun, ist eine größere Reihe interessanter Anwendungen hinzugefügt, die sich auf verschiedene, teils geometrische, teils mechanische Aufgaben beziehen und um so freudiger zu begrüßen sind, als die deutschen Lehrbücher nach dieser Richtung bin nicht gerade reich ausgestattet sind. Freilich sind die Probleme, wie auch der Herr Verfasser hervorhebt, zum Teil in sehr knapper Form dargestellt, aber auch in der vorliegenden Form sind sie geeignet, ein erhöbtes Interesse für Aufgaben zu erwecken, die an Zahl und Bedeutung ständig zunehmen.

Dresden. M. Krause.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

135. Liegen vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einem Kreise, so besteht zwischen ihnen folgende Beziehung:

$$a_{23}a_{24}a_{34}\cdot A_1 - a_{31}a_{34}a_{14}\cdot A_2 + a_{12}a_{14}a_{24}\cdot A_3 - a_{23}a_{31}a_{12}\cdot A_4 = 0,$$

wo

$$a_{23}a_{24}a_{34} - a_{31}a_{34}a_{14} + a_{12}a_{14}a_{24} - a_{23}a_{31}a_{12} = 0$$

und a_{ik} den Abstand A_iA_k bedeutet.

Berlin. E. Jahnke.

---

136. Man suche die Formeln

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = \varphi(x, y),$$

welche aus irgend einer Kurve (c) eine andere Kurve (c_1) ableiten, so daß die Tangenten in zwei entsprechenden Punkten $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$ auf der Ordinatenachse zwei gegebene projektive Reihen zeichnen; d. h. wenn die Ordinaten der Treffpunkte der Tangenten mit der Achse Oy mit t und t_1 bezeichnet werden, soll man haben

$$att_1 + bt + ct_1 + d = 0.$$

Ähnliche Aufgabe für die entsprechenden Normalen oder für die Normale in M und die Tangente in M_1.

Lüttich. J. Neuberg.

---

137. Jeder Kreis einer Schar berühre eine feste Kurve $\mathfrak{K}_1$ und gehe durch den dem Berührungspunkt zugeordneten Krümmungsmittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$. Alle diese Kreise berühren noch eine zweite Kurve $\mathfrak{K}_2$.

Reduziert sich $\mathfrak{K}_2$ auf einen Punkt, so muß $\mathfrak{K}_1$ ein Kreis oder eine logarithmische Spirale sein.

Wählt man als Kurve $\mathfrak{K}_2$ eine Gerade, so ist die Gestalt von $\mathfrak{K}_1$ mit Hilfe rechtwinkeliger Koordinaten durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x = a\,[\vartheta + \sin\vartheta\,(2 + \cos\vartheta)],$$
$$y = a\,[1 + \cos\vartheta\,(2 + \cos\vartheta)] = 4a\cos^4\frac{\vartheta}{2}.$$

Breslau. M. Peche.

138. Das größte der Kardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ einbeschriebene Rechteck hat die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien der Kurvenspitze mit den Endpunkten einer der beiden kürzern Rechteckseiten die Summe $\frac{1}{3}a(\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{1000})$ haben.

Breslau. O. Gutsche.

---

139. Auf ein horizontal liegendes, ebenes, aus rechteckigen Maschen mit den Seitenlängen a und b bestehendes Gitterwerk wird eine Nadel von der Länge c geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie auf dem Gitterwerk liegen bleibt?

Zur Vereinfachung sollen die Stäbe des Gitterwerks als unendlich dünn, die Nadel als ein unendlich dünner homogen mit Masse belegter Streifen angenommen werden; auch soll die Nadel in dem Augenblick, in dem sie losgelassen wird, eine genaue horizontale Lage haben. Ein Fortgleiten auf dem Netzwerk soll ausgeschlossen sein.

Jede beliebige Lage der Nadel im Verhältnis zum Gitterwerk soll als gleichmöglich angesehen werden; dies wäre in der Praxis etwa realisiert, wenn der Person, welche die Nadel fallen läßt, der Anblick des Gitterwerks entzogen wäre.

Potsdam, 24. August 1905. Otto Meissner.

---

140. Die durch die beiden Eigenschaften

$$\psi(t, 0) = 1, \quad \psi(t, n + 1) = (t + n)\psi(t, n)$$

definierte Funktion der beiden Variabeln t und n wird eine Fakultät genannt, t ist die Basis und n der Exponent (Schlömilchs Kompendium d. höh. Analysis, II. Bd. 3. Aufl. p. 12, 23 sqq.). Ist nun ν eine ganze positive Zahl, so hat man

$$\begin{aligned}\psi(t, \nu) &= (t + \nu - 1)\psi(t, \nu - 1)\\ &= (t + \nu - 1)(t + \nu - 2)\psi(t, \nu - 2)\\ &= (t + \nu - 1)(t + \nu - 2)(t + \nu - 3)\dots(t + 1)\cdot t\psi(t, 0),\end{aligned}$$

oder weil der letzte Faktor $= 1$ ist,

$$(1) \qquad \psi(t, \nu) = t(t + 1)(t + 2)\dots(t + \nu - 1).$$

Ähnlich ist für negative ganze Exponenten

$$(2) \qquad \psi(t, -\nu) = \frac{1}{(t - 1)(t - 2)\dots(t - \nu)}.$$

Entwickelt man sowohl $\psi(t, \nu)$ als auch $\psi(t, -\nu)$ nach fallenden Potenzen von t, wobei im letzteren Falle $t > \nu$ sein muß, so erhält man folgende Reihe:

$$(3) \qquad \psi(t, n) = C_0^n t^n + C_1^n t^{n-1} + C_2^n t^{n-2} + \cdots,$$

welche für $n = +\nu$ endlich ist, für $n = -\nu$ aber ins Unendliche fortgeht. Die hierdurch definierten Zahlen C_0^n, C_1^n, $C_2^n, \dots$ heißen Fakultätenkoeffizienten, und es ist eine evidente Folge dieser Definition, daß $C_0^n = 1$,

$C_0^0 = 1$, $C_\nu^{-1} = 1$, $C_\nu^\nu = 0$, $C_\nu^0 = 0$ ist. Aus (1), (2) und (3) folgt leicht die Eigenschaft

$$C_k^{n+1} = C_k^n + nC_{k-1}^n. \tag{4}$$

Für $n = -\nu$ findet sich bei Schlömilch die endliche Reihe:

$$C_k^{-\nu} = \frac{\binom{\nu}{0}\nu^{\nu+k} - \binom{\nu}{1}(\nu-1)^{\nu+k} + \binom{\nu}{2}(\nu-2)^{\nu+k} - \cdots}{\nu!}, \tag{5}$$

eine Darstellung, die für $n = +\nu$ völlig versagt. Für $n = +\nu$ hat Schlömilch eine recht verwickelte Formel angegeben (a. a. O. p. 28, Nr. 50).

Es soll nun eine Darstellung der Fakultätenkoeffizienten gegeben werden, welche gleichzeitig für $n = +\nu$ und $n = -\nu$ gültig ist, und es ist aus den angegebenen Gleichungen (1 bis 5) zu beweisen, daß

$$C_k^n = (-1)^k \binom{n}{k} D^k \left\{\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^{n-k}\right\}_{(x=0)} \tag{I}$$

und

$$\left\{\begin{aligned}
C_1^n &= \binom{n}{2}\\
C_2^n &= 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}\\
C_3^n &= 6\binom{n}{4} + 20\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}\\
C_4^n &= 24\binom{n}{5} + 130\binom{n}{6} + 210\binom{n}{7} + 105\binom{n}{8}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
C_k^n &= \alpha_k^{(1)}\binom{n}{k+1} + \alpha_k^{(2)}\binom{n}{k+2} + \cdots + \alpha_k^{(k)}\binom{n}{2k},
\end{aligned}\right. \tag{II}$$

worin sich die α_k leicht aus den α_{k-1} herleiten lassen.

Aussig, Böhmen. A. Krug.

141. Es ist zu beweisen, daß

$$D^n \left\{\left[\frac{x}{\log(1+x)}\right]^n\right\}_{(x=0)} = B_n,$$

also gleich der $n$ten Bernoullischen Zahl ist. (Bezeichnung nach Cesàro-Kowalewsky, Analysis: $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$ usw.).

Aussig, Böhmen. A. Krug.

142. Von Fibonacci rührt das Beispiel her:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 \pm 5 = \left(\frac{40 \pm 9}{12}\right)^2.$$

Um allgemein solche Beispiele zu erhalten, hat man die Gleichungen

$$x^2 + t = y^2, \quad x^2 - t = z^2,$$

worin t unbeschadet der Allgemeinheit als ganze Zahl ohne quadratischen Teiler vorausgesetzt werden darf, für rationale x, y und z zu erfüllen.

Es zeigt sich, daß die beiden Gleichungen nur für solche t möglich sind, welche in das doppelte Produkt der zwei Katheten pythagoreischer Zahlen dividiert, Quadrate von rationalen Zahlen liefern; z. B. nimmt man die drei pythagoreischen Zahlen 9, 40, 41, so muß $\frac{2 \cdot 9 \cdot 40}{t}$ ein vollständiges Quadrat sein, woraus $t = 5$ folgt. — Das pythagoreische Dreieck 3, 4, 5 liefert $t = 6$, usw.

Es entsteht nun die Aufgabe, bei gegebenem t zu erkennen, ob die beiden obigen Gleichungen für x, y, z rational lösbar sind oder nicht, und im Bejahungsfalle die Lösung anzugeben.

Aussig, Böhmen. A. Krug.

B. Lösungen.

Zu 4 (Bd. I, S. 206) (E. Lampe). — Ein Quadrat $ABCD$, dessen Seiten die Länge a haben, hat die Seiten AB und DC vertikal, AD und BC horizontal, AD als obere Seite. Ein schwerer Punkt gleitet reibungslos mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 von A auf AB bis zu einem Punkte P zwischen A und B, von P mit der erlangten Endgeschwindigkeit ohne Verlust an Geschwindigkeit auf der Geraden PC weiter. Wo ist P zu wählen, damit die Zeit für den gebrochenen Weg APC ein Minimum werde? Wie verhält sich diese Minimalzahl zu der Zeit des Abgleitens auf der Diagonale AC?

Es möge $AP = a - x$ sein, dann ist $PB = x$ und $PC = \sqrt{a^2 + x^2}$. Für den Fall von A bis P gelten die Fallgesetze:

$$a - x = \tfrac{1}{2} g t_1^2, \quad v = g \cdot t_1,$$

wo $t_1 = \sqrt{\frac{2(a-x)}{g}}$ die verflossene Zeit und v die erlangte Endgeschwindigkeit bedeuten. Von P an gleitet der Körper die schiefe Gerade PC herab. Sei deren Neigungswinkel α, $PC = s$ und hezeichne t_2 die verflossene Zeit, so ist:

$$s = v t_2 + \tfrac{1}{2} g t_2^2 \sin\alpha$$

oder

$$\sqrt{a^2 + x^2} = g t_1 t_2 + \tfrac{1}{2} g t_2^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Unter Benutzung des für t_1 gefundenen Wertes erhalte ich

$$t_2^2 + 2\,\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{(a-x)(a^2+x^2)}\, t_2 = \frac{2}{g} \cdot \frac{a^2 + x^2}{x}$$

$$t_2 = -\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{(a-x)(a^2+x^2)}}{x} \pm \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(a-x)(a^2+x^2)}{x^2} + \frac{2}{g}\,\frac{a^2+x^2}{x}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{(a-x)(a^2+x^2)}{x}} \pm \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{a(a^2+x^2)}}{x}.$$

Es kann nur der positive Wert der Wurzel in Frage kommen, weil die Zeit t_2 positiv sein muß. Die Gesamtzeit $t = t_1 + t_2$ ergibt sich als

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\sqrt{a - x} - \frac{\sqrt{(a-x)(a^2+x^2)}}{x} + \frac{\sqrt{a(a^2+x^2)}}{x} \right].$$

Nun soll t ein Minimum werden. Die notwendige Bedingung dafür ist $\frac{dt}{dx} = 0$. Wegen

$$\frac{dt}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{x^2\sqrt{a^2+x^2} - 2a^3 + a^2x - x^3 + 2a^2\sqrt{a}\sqrt{a-x}}{2x^2\sqrt{(a-x)(a^2+x^2)}}$$

folgt die Bedingungsgleichung

$$x^2\sqrt{a^2+x^2} + 2a^2\sqrt{a}\sqrt{a-x} = 2a^3 - a^2x + x^3,$$

welche nach einmaliger Quadrierung übergeht in

$$4a^2x^2\sqrt{a} \cdot \sqrt{(a-x)(a^2+x^2)} = a^4x^2 + 4a^3x^3 - 3a^2x^4,$$

woraus durch abermaliges Quadrieren

$$16a^5x^4(a-x)(a^2+x^2) = a^8x^4 + 8a^7x^5 + 16a^6x^6 - 6a^6x^6 - 24a^5x^7 + 9a^4x^8.$$

Wenn ich von der Wurzel $x = 0$ absehe, weil P innerhalb AB liegen soll, erhalte ich die Bestimmungsgleichung

$$16a(a-x)(a^2+x^2) = a^4 + 8a^3x + 16a^2x^2 - 6a^2x^2 - 24ax^3 + 9x^4,$$

oder

$$9x^4 - 8ax^3 - 6a^2x^2 + 24a\,x - 15a^4 = 0.$$

Die biquadratische Gleichung enthält nur eine Wurzel, die der Bedingung $0 < x < a$ genügt. Es ist dies $x = 0{,}80283a$. Ich bilde nun die 2. Ableitung von t nach x. Es ist unter der Voraussetzung, daß die 1. Ableitung gleich 0 ist:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = -\sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}} + 2x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 - 3x^2 - \frac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}}{2x^2\sqrt{(a-x)(a^2+x^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{a^2\sqrt{a}\sqrt{a^2+x^2} + (3x^2-a^2)\sqrt{(a-x)(a^2+x^2)} - x(2a^2+3x^2)\sqrt{a-x}}{2x^2(a-x)(a^2+x^2)}.$$

Man überzeugt sich unmittelbar, daß für $x = 0{,}80283a$ der 2. Differentialquotient > 0 wird, daß also $x = 0{,}80283a$ ein Minimum gibt. Die zugehörige Zeit ist $t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 1{,}3320997\sqrt{a} = 0{,}6015\sqrt{a}$, wobei $g = 9{,}81$ gewählt ist. Der Körper muß also von A bis P um das Stück $0{,}19717a$ fallen, damit die Zeit für den gebrochenen Weg APC ein Minimum wird.

Würde der Körper längs der Diagonale AC abgleiten, so brauchte er hierzu die Zeit

$$t' = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{2a},$$

wie sich leicht ergibt. Die Zeiten verhalten sich demnach wie $1{,}3320997 : 1{,}4142135 = 0{,}94193$.

Berlin, den 25. Juli 1905. Stud. math. Alfred Baruch.

Zu 52 (Bd. III, S. 170) (E. Lampe). — Untersuchung der Gestalt der Kurve $y = \sqrt[x]{x}$; Bestimmung der Zahlwerte der Koordinaten ihrer Wendepunkte auf 5 Stellen.

Bei der Untersuchung der Gestalt der Kurve beschränke ich mich auf die reellen Werte der Veränderlichen. Setze ich für x jeden beliebigen positiven Wert, so ergibt sich für $y > 0$ eine stetige Punktfolge im ersten Quadranten, und das ist die Kurve, deren Wendepunkte zu bestimmen sind. Daneben existieren reelle Werte von $y < 0$ ausschließlich, wenn $x = \frac{2p}{2q+1}$, p und q ganzzahlig vorausgesetzt. Gehe ich zu negativen Werten von x über, so zeigt sich, daß nur an gewissen Stellen reelle Werte von y vorhanden sind; es wird nämlich für

$$x = -\frac{2p+1}{2q}, \quad y > 0; \quad x = -\frac{2p+1}{2q+1}, \quad y < 0.$$

An allen anderen Stellen wird y imaginär. Da also in dem 2., 3. und 4. Quadranten y nicht für jeden Wert von x reell bleibt, entsprechen der vorgelegten Gleichung an den genannten Stellen keine kontinuierlichen Kurvenzweige, sondern nur noch Punktmengen.

Ich untersuche nun die Kurve an den Grenzstellen $x = 0$ und $x = \infty$. An der Stelle $x = +0$ wird wegen

$$\lim_{x=0} \ln y = \lim_{x=0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

die Funktion y gleich 0. An der Stelle $x = +\infty$ wird wegen

$$\lim_{x=+\infty} \ln y = \lim_{x=+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x=+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

die Funktion gleich 1, d. h. die Kurve hat die Gerade $y = 1$ zur Asymptote.

Ich will jetzt die Maxima und Minima der Kurve aufsuchen. Die notwendige Bedingung für das Auftreten derselben ist $\frac{dy}{dx} = 0$. Wegen $\frac{dy}{dx} = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$ erhält man als Bedingungsgleichung $1 - \ln x = 0$, woraus $x = e$.

Für $x = e$ wird die zweite Ableitung von y nach x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[x]{x} \frac{(1 - \ln x)^2 - x[1 + 2(1 - \ln x)]}{x^4}$$

offenbar negativ, also hat die Kurve an dieser Stelle ein Maximum. Der zugehörige Funktionswert ist $y = 1{,}444\,668$. Der erste Differentialquotient würde übrigens noch für $x = \infty$ verschwinden.

Schließlich werde die Kurve auf Wendepunkte untersucht. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten derselben ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} + 0$. Also erhalte ich die Bedingungsgleichung

$$(1 - \ln x)^2 - x[1 + 2(1 - \ln x)] = 0.$$

Digitized by Google

Die Gleichung hat zwei positive Wurzeln, nämlich $x = 0{,}581\,932$, $x = 4{,}367\,769$. Die zugehörigen Funktionswerte sind $y = 0{,}394\,414$ bezw. $y = 1{,}401\,482$.

Dies sind die Zahlwerte der Koordinaten der beiden Wendepunkte der Kurve $\sqrt[x]{x}$. Die Figur der Kurve läßt sich hiernach leicht entwerfen.

Berlin, den 13. August 1905. Stud. math. Alfred Baruch.

Zu **111.** (Cwojdziński.) — Zwischen den 16 Loten α_{ij}, welche von 4 Punkten P_i auf 4 Geraden G_j gefällt werden können, besteht die Relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

(Vergl. dieses Arch. (3) **5**, 118—122.)

Lassen wir P_1 in den Schnittpunkt von G_1 und G_2, ferner P_2 in G_2G_3, P_3 in G_3G_4, P_4 in G_4G_1 fallen, dann sind die Lote α_{11}, α_{12}, α_{22}, α_{23}, α_{33}, α_{34}, α_{44}, α_{41} sämtlich Null. Mithin lautet die oben erwähnte Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder in aufgelöster Form

$$\alpha_{13} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{31} \cdot \alpha_{42} - \alpha_{14} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{43} = 0.$$

Der sich aus dieser Gleichung ergebende Satz dürfte lauten:
Das Produkt von 4 Höhen eines Vierecks ist gleich dem Produkt der 4 übrigen (falls die von den Ecken auf die Seiten gefällten Lote als Höhen bezeichnet, und die Faktoren der Produkte zyklisch ausgewählt werden).

Berlin. K. Cwojdziński.

Zu **118** (Bd. VIII, S. 330) (Ad. Schmidt). — Der Mongesche Punkt des Tetraeders $ABCD$ heiße P, das Zentrum der umbeschriebenen Kugel M, dasjenige der einbeschriebenen O. Die Fußpunkte der von O auf die Seitenflächen gefällten Senkrechten seien $O_1O_2O_3O_4$.

Es werde ferner $BC = a$, $AD = a'$, $MA = MB = MC = MD = r$, $PA = r_1$, $PB = r_2$, $PC = r_3$, $PD = r_4$ gesetzt. Die unmittelbar ersichtliche Tatsache, daß P von der Mitte irgend einer Kante gerade soweit entfernt ist wie M von der Mitte der Gegenkante, drückt sich dann für das Kantenpaar aa' durch jede der beiden Gleichungen

$$r_2^2 + r_3^2 - \frac{a^2}{2} = 2r^2 - \frac{a'^2}{2}, \quad r_1^2 + r_4^2 - \frac{a'^2}{2} = 2r^2 - \frac{a^2}{2}$$

aus, denen zufolge in jedem Tetraeder die Beziehung

$$(1) \qquad r_2^2 + r_3^2 - a^2 = r_1^2 + r_4^2 - a'^2$$

besteht.

Wird andererseits

$A O_2 = A O_3 = A O_4 = p_1$ usw., $A O_2 D = A O_3 D = \mu_1$, $B O_1 C = B O_4 C = \nu_1$ usw.

gesetzt, so gelten die Beziehungen

$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 2\pi$, $\nu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2\pi$, $\mu_1 + \nu_2 + \mu_3 = 2\pi$, $\mu_1 + \mu_2 + \nu_3 = 2\pi$,

aus denen, und zwar ebenfalls für jedes Tetraeder,

$$(2) \qquad \mu_1 = \nu_1, \quad \mu_2 = \nu_2, \quad \mu_3 = \nu_3$$

folgt.

Sind nun O und P identisch, so ist mit ϱ als dem Radius der einbeschriebenen Kugel $r_1^2 = p_1^2 + \varrho^2$, und damit geht (1) in

$$(3) \qquad p_2^2 + p_3^2 - a^2 = p_1^2 + p_4^2 - a'^2,$$

d. h. in

$$2 p_2 p_3 \cos \nu_1 = 2 p_1 p_4 \cos \mu_1$$

über, wofür mit Rücksicht auf (2) einfach $p_2 p_3 = p_1 p_4$ zu setzen ist. Ebenso ist natürlich auch $p_3 p_1 = p_2 p_4$, $p_1 p_2 = p_3 p_4$.

Aus diesen Gleichnngen folgt

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2$$

und damit nach (3) für jedes beliebige Gegenkantenpaar $a = a'$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Anmerkung: Der Mongesche Punkt liegt entweder im Innern des Tetraeders oder in einem der unendlichen Räume, die seine Erweiterung über die Ecken hinaus bilden. Er kann daher niemals mit dem Zentrum einer der Kugeln, die das Tetraeder von außen berühren, zusammenfallen. Die Berücksichtigung dieses Umstandes trägt aus leicht ersichtlichen Gründen sehr wesentlich zur Vereinfachnng des Beweises bei. Sie kommt darin zum Ausdruck, daß O nicht einfach durch die Gleichheit seiner Abstände von den Seitenflächen, sondern mit Hilfe der Relationen (2) definiert wird, die nur für die innere Kugel gültig sind, während für die äußeren

$$\mu_1 + \nu_1 = \pi, \quad \mu_2 + \nu_2 = \pi, \quad \mu_3 + \nu_3 = \pi$$

gilt.

Potsdam. AD. SCHMIDT.

2. Anfragen und Antworten.

27. Jede ungerade Primzahl läßt sich bekanntlich auf die Form $p = 2^s \cdot (2n + 1) - 1$ bringen.

Nun findet sich in H. Schefflers „Die polydimensionalen Größen und die vollkommenen Primzahlen" (Braunschweig 1880) auf S. 91 der Satz,

Digitized by Google

daß sich p als Summe von $s+1$ von Null verschiedenen Quadraten darstellen läßt, z. B. $79 = 2^4$ $5 - 1 = 8^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Der Beweis wird a. a. O. „dem Leser überlassen".

Ist ein Beweis dieses Satzes bekannt?

Aussig, Böhmen. A. Krug.

28. Es scheinen Untersuchungen über *Potentialfelder, deren Niveauflächen Minimalflächen sind*, nicht publiziert worden zu sein. Das Potential $\Phi = z - a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ genügt dieser Forderung. Es wäre interessant, festzustellen, ob es außer diesem Feld noch andere von derselben Eigenschaft gibt. Jedes solche Feld, als Geschwindigkeitspotential einer inkompressiblen Flüssigkeit gedeutet, liefert — wie man leicht berechnet — eine Potentialströmung, bei der das Geschwindigkeitsquadrat entlang jeder einzelnen Stromlinie konstant ist.[1]) Jede der ∞^1 Zusammenfassungen von Stromlinien mit untereinander gleichem Wert des Geschwindigkeitsquadrates liefert eine aus Stromlinien gebildete Fläche konstanten Druckes, d. h. *eine Lösung des Strahlproblems im Raum*, wofür bisher noch kein nichttrivialer Fall bekannt ist. (Das oben angegebene Feld liefert den trivialen Fall eines zylindrischen Strahles mit Zirkulation um die z-Achse.) Für die gesuchten Felder gilt übrigens:

1. Die Stromlinien sind geodätische Linien der Flächen konstanten Druckes. (Diese Aussage ist allgemein für die freie Oberfläche jeder stationären, kräftefreien Potentialströmung richtig.)

2. Jede Stromröhre schneidet aus konsekutiven Potentialflächen flächengleiche Stücke heraus.

Wien, 17. X. 05. P. Ehrenfest.

3. Kleinere Notizen.

Ein neuer Lehrsatz der Geometrie.

Lehrsatz. Zeichnet man acht Kreise, so daß jeder von ihnen einen neunten Kreis und zwei ihn durchschneidende Sekanten berührt, und konstruiert man ein Dreieck durch Verbindung dreier beliebigen Schnittpunkte der zwei Sekanten und des neunten Kreises, so schneiden sich die Berührungssehnen und die Zentrale je zweier in Paaren passenden Kreise von den acht Kreisen in dem Punkt, der von den drei Seiten des Dreiecks gleiche Abstände hat.

Voraussetzung (Fig. 1. u. 2). Es seien ABC der Kreis, $a, a', b, b', c, c', d, d'$, die acht Kreise, AD und BC zwei Sekanten.

Behauptungen: 1) Die Zentrale zweier Kreise a. a' und ihre zwei Berührungssehnen gehen durch den Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

2) Die Zentrale zweier Kreise b, b' und ihre zwei Berührungssehnen gehen durch den Mittelpunkt des zum Dreieckwinkel A gehörigen Ankreises.

3) Die Zentrale zweier Kreise c, c' und ihre zwei Berührungssehnen gehen durch den Mittelpunkt des zum Dreieckwinkel B gehörigen Ankreises.

1) Vgl. einen Satz von Molenbroek Ann. d. Phys. Bd. 42. 1893.

4) Die Zentrale zweier Kreise d, d' und ihre zwei Berührungssehnen gehen durch den Mittelpunkt des zum Dreieckwinkel C gehörigen Ankreises.

Beweis: Es seien K, E und F die drei Berührungspunkte eines beliebigen Kreises von den acht Kreisen, die den Kreis ABC und die beiden Sekanten BC, AD berühren, so hat man, wie bekannt, folgende zwei Eigenschaften: 1) Die Gerade KE geht durch die Mitte M des Bogens BC,

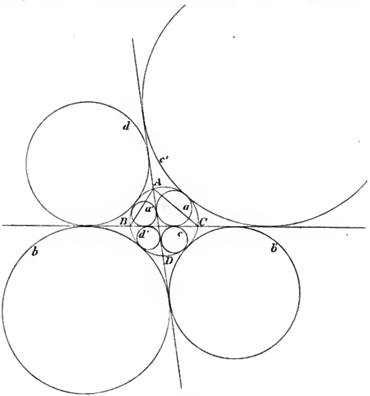


Fig. 1

ebenso geht die Gerade KF durch die Mitte N des Bogens AD. 2) Die beiden Geraden EF und MN sind einander parallel.

Aus der letzten Eigenschaft geht hervor, daß $\sphericalangle EFK = \sphericalangle MNK$, und da die vier Punkte M, N, A und K auf dem Kreise ABC liegen, so ist $\sphericalangle MNK = \sphericalangle MAK$ (Fig. 3 u. 4), oder gleich seinem Supplementwinkel (Fig. 5), also $\sphericalangle EFK = \sphericalangle MAK$ oder gleich seinem Supplementwinkel.

Daher liegen die vier Punkte A, K, F und I (als Schnittpunkt der beiden Geraden EF und AM) auf einem Kreise, folglich: $\sphericalangle AIK = \sphericalangle AFK$ (Fig. 3 u. 5) oder gleich seinem Supplementwinkel (Fig. 4).

Da nun die Gerade AF den Kreis EFK berührt, so ist $\sphericalangle AFK$ oder sein Supplementwinkel $= \sphericalangle FEK$, also $\sphericalangle AIK = \sphericalangle FEK$, daher

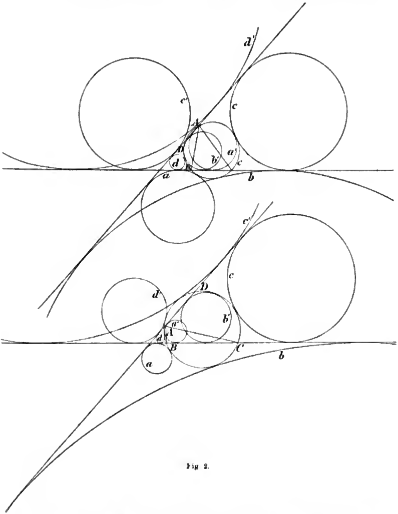


Fig. 2.

sind $\triangle MKI$ und $\triangle MIE$ winkelgleich, und hieraus läßt sich schließen, daß ein durch die drei Punkte I, E und K gehender Kreis die Gerade MI berührt, somit

$$\overline{MI}^2 = MK . ME.$$

Digitized by Google

Andrerseits folgt aus $\widehat{MB} = \widehat{MC}$, daß $\sphericalangle MKB = \sphericalangle MBE$ (in der Figur haben wir die Grade BK ausgelassen). Daher berührt ein durch die drei Punkte B, E und K gehender Kreis die Gerade MB, also

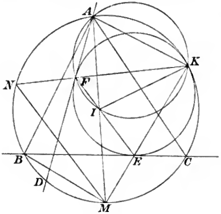


Fig. 3

$$MK \cdot ME = \overline{MB}^2.$$

Demnach ergibt sich

$$\overline{MI}^2 = \overline{MB}^2 \text{ oder } MI = MB.$$

Hieraus läßt sich zeigen, daß I von den drei Seiten des Dreiecks ABC gleiche Abstände hat.

Ferner seien O der Mittelpunkt des Kreises EFK, L der Schnittpunkt von BC und AD, P der Schnittpunkt von EF und OL, Q der andere Schnittpunkt von OI und dem Kreis BIC.

Zieht man eine Gerade durch Q und L (Fig. 6), so ist das Quadrat über der Tangente, welche von dem Mittelpunkt des Kreises BIC an den Kreis EFK gelegt ist, gleich dem Rechteck $MK \cdot ME$, oder gleich dem Quadrat über dem Halbmesser des Kreises BIC. Hieraus läßt sich zeigen, daß die zwei Kreise EFK und BIC einander senkrecht schneiden, mithin ist der Halbmesser OE des Kreises EFK gleich der von dem Punkt O zu dem Kreis BIC gezogenen Tangente, und

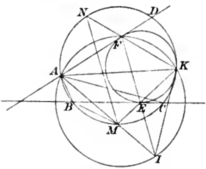


Fig. 4.

$$\overline{OE}^2 = OQ \cdot OI.$$

Und da im rechtwinkligen Dreieck OLE ist

$$\overline{OE}^2 = OL \cdot OP,$$

so folgt

$$OQ \cdot OI = OL \cdot OP,$$

daher liegen die vier Punkte I, P, L und Q auf einem Kreise. Wenn man bemerkt, daß der Winkel IPL ein Rechter ist, und die Winkel IQL und IPL einander gleich sind, oder jeder von beiden das Supplement des andern ist, so hat man

$$\sphericalangle IQL = R.$$

Daher geht die Gerade QL durch einen Punkt I', der von den drei Seiten des Dreiecks ABC gleiche Abstände hat. (I' ist nichts anders als der andere

Endpunkt des durch I gehenden Durchmessers des Kreises BIC). Also schneidet die Gerade OI die bestimmte Gerade $I'L$ in dem bestimmten Punkt Q derselben Geraden senkrecht. Ebenso liegen der Mittelpunkt eines andern Kreises, dessen Berührungssehne durch den Punkt I geht, und der Punkt I in der Geraden, welche die bestimmte Gerade $I'L$ in dem bestimmten Punkt Q derselben Geraden senkrecht schneidet. Daher liegen die Mittelpunkte der zwei Kreise, deren Berührungssehnen durch I gehen, und der Punkt I in einer und derselben Geraden.

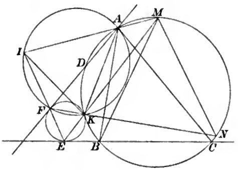


Fig. 5.

Zusätze. 1) Der Schnittpunkt (aber nicht I) des Kreises BIC und der Geraden EF in den Figuren ist einer von den Punkten, die von den drei Seiten des Dreiecks DBC gleiche Abstände haben. Der eine von den beiden Schnittpunkten zwischen der Geraden EF und dem Kreise, der um N mit NA als Halbmesser beschrieben ist, hat von den drei Seiten des Dreiecks BAD gleiche Abstände, ebenso verhält sich der andere Schnittpunkt zu den drei Seiten des Dreiecks CAD.

2) In den Figuren 1 und 2 bilden die acht Berührungspunkte, in denen die acht Kreise eine der beiden Sekanten berühren, eine Involution; der Zentralpunkt der Involution ist der Schnittpunkt L der beiden Sekanten, und die Potenz der Involution ist gleich der Potenz des Punktes L in bezug auf den Kreis ABC.

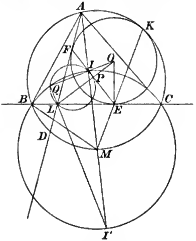


Fig. 6.

Beweis: Nimmt man den Schnittpunkt L der beiden Sekanten AD und BC als das Zentrum der Inversion und die Potenz des Punktes L in bezug auf den Kreis ABC für die Potenz der Inversion, dann mögen in den Figuren 3, 4 und 5, E, F und K, sowie E', F' und K' einander invers entsprechen. Da die zwei Sekanten BC, AD und der Kreis ABC sich selbst invers entsprechen, so berührt der inverse Kreis $E'F'K'$ des Kreises EFK die Sekanten BC und AD, sowie den Kreis ABC.

3) Wenn AD und BC auf einander senkrecht stehen, so liegen die Mittelpunkte der vier Kreise a, b, a' und b' auf einem Kreise, und ebenso liegen die Mittelpunkte von a, b, c und d, die von a', b', c' und d', sowie auch die von c, d, c' und d' auf einem Kreis.

Tokio, 27. Mai 1905. Y. Sawayama.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abraham, H. et Langevin, P., Les quantités élémentaires d'électricité Ions, Electrons, Corpuscules, mémoires réunis et publiés. 2 fascicules. Paris 1905, Gauthier-Villars. XVI u. 1138 S. Fr. 35.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. Zweiter Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 404 S. ℳ 10.

Albrecht, Th., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. Berlin 1905, Stankiewicz. 174 S. ℳ 2,—.

Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Herausgegeben von G. von Neumayer. In zwei Bänden. Dritte Auflage. Band I. Bogen 8—20. Hannover 1905, M. Jänecke.

Annaes scientificos da academia polytechnica do Porto publicados soba direcção de F. Gomes Teixeira. Volume 1, No. 1. Coimbra 1905, imprensa da universidade.

Appell, P., Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. Conforme au programme du 27 juillet 1904. 2e édition. Paris 1905, Gauthier-Villars. Fr. 12.

Ball, Rouse, Histoire des Mathématiques. Traduite sur la 3me édition anglaise par L. Freund. Tome premier: Les Mathématiques dans l'Antiquité. — Les Mathématiques au moyen-âge et pendant la renaissance — Les Mathématiques modernes de Descartes à Huygens. — Notes complémentaires. Paris 1906, A. Hermann. 422 S.

Bianchi, L., Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Roma 1905, Tipografia della R. Accad. dei Lincei. 74 S.

Blau, Ernst, Die Mechanik fester Körper. Lehrbuch in elementarer Darstellung für höhere technische Fachschulen und zum Selbstunterricht nebst einer Sammlung von 250 aufgelösten Beispielen. Hannover 1905, M. Jänecke. 263 S. ℳ 6.

Biermann, O., Verlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. IX u. 226 S.

Bouasse, H., Essais des matériaux: notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. Paris 1905, Gauthier-Villars (Bibliothèque de l'élève ingénieur). 150 S. Fr. 5.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Dritter Band: Die Lehre von der Wärme. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. 988 S.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par Baillaud et Bourget. Tome II (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894). Paris 1905, Gauthier-Villars. VI u. 457 S. Fr. 16.

Danneel, H., Elektrochemie I. Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Leipzig 1905, Göschen (Sammlung Göschen, Nr. 252). ℳ —,80.

Dietzschold, C., Die Hemmungen der Uhren, ihre Entwicklung, Konstruktion, Reparatur und Behandlung vor der Reglage. Krems a. Donau 1905, R. Dietzschold.

Dressel, S. J. Ludwig, Elementares Lehrbuch der Physik nach den neuesten Anschauungen. Dritte vermehrte und umgearbeitete Auflage. 2 Bde. Freiburg i. B. 1905, Herder. XV u. 519 und X u. 544 S. ℳ 16.

Duhem, P., Les origines de la statique. Tome premier. Paris 1905, A. Hermann. 360 S. Fr. 10.

Ebstein, E., Aus G. C. Lichtenbergs Correspondenz. Stuttgart 1906, F. Enke. 107 S.

Eichler, K., Beitrag zur Graßmannschen Punktrechnung. Festschrift der 48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner. Hamburg 1905. 23 S.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band V_1, Heft 2: E. W. Hobson und H. Diesselhorst: Wärmeleitung. — M. Schröter und L. Prandtl: Technische Thermodynamik. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Dritter Band: Festigkeitslehre. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 434 S.

Frick, J., Physikalische Technik oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. Siebente Auflage von O. Lehmann. In zwei Bänden. Erster Band. Zweite Abteilung. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. XX u. 1000 S. ℳ 24.

Glinzer, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. Erster Teil: Planimetrie. Neunte verbesserte Auflage. Leipzig 1906, L. Degener. 120 S. ℳ 1,80.

Guichard, C., Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes tripleorthogonaux. Paris 1905, Gauthier-Villars. 95 S. (Scientia No. 25.) Fr. 2,—.

Hamburger, A., Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Inaug. Diss. Berlin 1905. 58 S.

Heffter, L. und Koehler, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 526 S. ℳ 14,—.

Hermite, Charles, Oeuvres publiées par Emile Picard. Tome I. Paris 1905, Gauthier-Villars. XL u. 498 S.

Hertwig, O., Das Bildungsbedürfnis und seine Befriedigung durch deutsche Universitäten. Rede zur Gedächtnisfeier des Stifters der Berliner Universität. Jena 1905, G. Fischer. 30 S.

Herz, N., Lehrbuch der mathematischen Geographie. Wien 1906, C. Fromme. 359 S. ℳ 12,—.

Huntington, E. V., The continuum as a type of order: An exposition of the modern theory. With an appendix on the transfinite numbers. Repr. from the Ann. of Math. (2) **6**, **7**, 1905.

Jessen, K. und Girndt, M., Leitfaden der Baustofflehre für Baugewerkschulen. Leipzig 1905, B. G. Teubner 84 S.

Koebe, J., Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Inaug. Diss. Berlin 1905. 32 S.

Leher, E., Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe. Leipzig 1905. Göschen. 124 S. (Sammlung Göschen Nr. 261). ℳ —.80.

Lobatschewsky, N. J., Pangéométrie ou Précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Réimpression facsimilé conforme à l'édition originale. Paris 1905, A. Hermann. 62 S. Fr. 5.

Loisel, J., Le baromètre anéroïde. Paris 1905, Gauthier-Villars. 24 S. Fr. 1.

Marchis, M. L., Thermodynamique: Introduction à l'Etude des machines thermiques. Paris 1905, Gauthier-Villars (Bibliothèque de l'élève ingénieur). 255 S. Fr. 5.

Mevius, W., Rechnen und Raumlehre. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 144 S.

Müller, H. und Plath, J., Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrerprüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 236 S.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie in vier Bänden. Zehnte Auflage. Erster Band: Mechanik und Akustik von L. Pfaundler. Erste Abteilung. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. ℳ 7.

Digitized by Google

Newest, Th., Gegen die Wahnvorstellung vom heißen Erdinnern. Wien 1906, C. Konegen. 90 S.
Riebesell, P., Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers (Ein Beitrag zur Theorie der Dynamomaschine): Inaug. Diss. Kiel 1905.
Rogel, Fr., Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 38 S.
Rohr, M. v., Die optischen Instrumente. Aus Natur und Geisteswelt. Nr. 88. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 130 S. ℳ 1,25.
Rühlmann, Logarithmische Tafeln. 13. Aufl. Leipzig 1905, J. Klinkhardt. XL u. 326 S. ℳ 2,50
Russell, J. W., An elementary treatise on pure geometry with numerous examples. New edition. Oxford 1905, Clarendon Press. 366 S. S. 9.
Rutherford, E., Radioactivity. Second edition. Cambridge physical series. Cambridge 1905, University Press 580 S.
Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). Zweiter Band. Zweite Abteilung. Herausgeg. im Auftrag der Deutschen Math.-Ver. von Eugen Müller. Leipzig 1905, B. G. Teubner.
Schröter, R., Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 131 S. ℳ 1,60.
Schmehl, Chr., Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Gießen 1905, E. Roth. 110 S. ℳ 1,60
Schmid, B., Philosophisches Lesebuch. Leigzig 1905, B. G. Teubner 166. S.
Schubert, H., Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. 48. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner. Hamburg 1905. 57 S.
Schulze, Ed. und Pahl, F., Mathematische Aufgaben. Ausgabe für Gymnasien. Erster Teil: Aufgaben aus der Planimetrie und Arithmetik für die Unterstufe. Leipzig 1905, Dürr. ℳ 2,40
Schütte, F., Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 42 S.
Staude, O., Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 447 S.
Stolz, O. und Gmeiner, J. A., Einleitung in die Funktionentheorie, II. Abteilung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. VIII u. 355 S.
Teixeira, F. Gomes, Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia di ciencias exactas de Madrid. Madrid 1905, Gaceta de Madrid. 632 S.
Weber, H., und Wellstein, J., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. II: Elementare Geometrie. XII u. 604 S.
Wieleitner, Heinrich. Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. Leipzig 1905, Göschen. 58 S.
Wieleitner, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Leipzig 1905. Göschen (Sammlung Schubert XLIII). 313 S. ℳ 10,—.
Wien, W., Über Elektronen. Vortrag gehalten auf der Naturforscherversammlung in Meran. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 28 S.
Wilson, C., On the traversing of geometrical figures. Oxford 1905, Clarendon Press. 153 S.
Wilson, J. C., On the traversing of geometrical figures. Addendum to the Note upon the most general form of the construction of reciprocal figures. Oxford 1905, Clarendon Press. 17 S.
Zenneck, J., Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Stuttgart 1905, T. Enke. 1019 S. ℳ 25,—.

Digitized by Google

Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen.

Von Clemens Schaefer in Breslau.

Den Gipfelpunkt der alten Elektrodynamik bildet das Webersche Gesetz, welches die Kräfte zwischen zwei Elektrizitätsmengen regelt. Nach demselben ist die ponderomotorische Kraft zwischen den elektrischen Quanten nicht nur — wie es das Coulombsche Gesetz fordert — von ihrer Entfernung, sondern auch von ihrer relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig.

Die Frage, ob das Webersche Gesetz richtig oder nicht richtig ist, ob es, wie Helmholtz glaubte, dem Energieprinzip widerspricht, oder ob dies, wie Webers Anhänger behaupteten, nicht der Fall sei, kann hier unerörtert bleiben, da unsere modernen Anschauungen den Glauben an die primäre Existenz eines Grundgesetzes von der Art des Weberschen ins Wanken gebracht haben.

Von Interesse für uns ist aber die dem Weberschen Gesetze zugrunde liegende Anschauungsweise. Weber dachte sich *positive* und *negative* kleine Elektrizitätsmengen in entgegengesetzter Richtung in den metallischen Leitungen fließend und die von ihnen ausgehenden Kräfte *übersprangen zeitlos* den Raum. Webers Theorie ist also eine *Fernwirkungstheorie* und gleichzeitig eine *atomistische* Theorie der Elektrizität. Als drittes Charakteristikum kann zu diesen noch hinzugefügt werden, daß den *Ausgangspunkt* der alten Elektrodynamik *hypothetische Elektrizitätsmengen* bilden, während die *Kräfte*, die doch in Wirklickkeit beobachtet werden, als *abgeleitete* Begriffe auftreten.

In schroffstem Gegensatz hierzu steht die *Faraday-Maxwellsche* Anschauung. Schon der Ausgangspunkt ist genau der umgekehrte; Faraday betrachtet als *Primäres* die elektrischen und magnetischen Kräfte, ohne sich irgendwelche Gedanken über die Existenz oder Nichtexistenz von Elektrizitätsmengen zu machen, welche nach der alten Auffassung die Kräfte bedingen sollten, auf deren Existenz aber durch kein anderes Mittel geschlossen werden konnte als eben durch das Auftreten dieser *Kraftwirkungen*. Faraday betrachtet die real vorhandenen, in den Kraftlinien gewissermaßen mit den Händen zu greifenden Kräfte *ganz un-*

abhängig von irgendwelcher Vorstellung über die hypothetische Ursache derselben. Dementsprechend ist der so anschauliche Begriff der Elektrizitätsmenge aus der alten Theorie in der Maxwellschen farblos, so etwa, wie der Begriff der Kraft in der Kirchhoffschen Mechanik.

Der Gegensatz vertieft sich, wenn man auf die Wirkungsweise der Kräfte eingeht. Die Faraday-Maxwellsche Theorie steht auf dem Standpunkte, daß eine „Actio in distans" ein Widerspruch, etwas Unmögliches und Undenkbares sei; die „Feldwirkungen" dieser Theorie sind *Nahewirkungen*, sind Kräfte, die nur am Orte der Kraft selbst wirken, nicht in noch so kleinen Entfernungen. Molekularkräfte z. B., die ja nur in kleine Entfernungen wirken, sind keine Nahekräfte im Sinne Faradays und Maxwells.

Daraus ergibt sich sofort ein weiterer Unterschied zwischen der neuen und alten Anschauung. Da Nahekräfte nicht in Entfernungen wirken, so darf das Medium, in dem sie auftreten, der alles durchdringende Äther, *keine atomistische* Struktur besitzen, sondern muß als *Kontinuum* aufgefaßt werden.

Ein weiterer Unterschied endlich zwischen beiden Auffassungen ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Es wirken z. B. zwischen den Polen zweier Magnete Kräfte; entfernt man den einen von ihnen, so verschwindet nach der alten Anschauung auch sofort das magnetische Feld des andern, während nach der Maxwellschen Theorie das Feld ruhig weiter besteht, unabhängig davon, ob andere Körper vorhanden sind oder nicht.

Die Entdeckung der elektrischen Wellen durch Hertz, der Nachweis ihrer Polarisierbarkeit und Brechbarkeit, die Messungen Boltzmanns über Dielektrizitätskonstanten an Gasen, die Maxwells Gesetz bestätigten, und zahlreiche andere, sich daran anschließende Untersuchungen verhalfen der Maxwellschen Theorie zum Siege.

In vielen anderen Fällen jedoch versagte die Theorie augenfällig; den feineren optischen Verhältnissen stand sie machtlos gegenüber. So z. B. ist es auf den ersten Blick klar, daß das obenerwähnte Gesetz, das Quadrat des Brechungsindex solle der Dielektrizitätskonstante gleich sein, jedenfalls nicht ohne weiteres für die optischen Verhältnisse gilt. Denn im sichtbaren und in einem großen Teile des unsichtbaren Spektrums ist der Brechungsexponent eine Funktion der Wellenlänge, also *variabel*, während die Dielektrizitätskonstante, wie schon der Name besagt, eine wirkliche Körperkonstante ist. Wenn man genauer auf die Verhältnisse eingeht und die Grundlagen der Maxwellschen Theorie prüft, so ist es ohne weiteres klar, daß diese Diskrepanz von vornherein zu erwarten war. Denn die Maxwellsche Theorie

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

charakterisiert *jeden* Körper durch drei Konstanten, die Leitfähigkeit (λ), die Dielektrizitätskonstante (ε) und die Permeabilität (μ), von denen noch die erste bei Beschränkung auf Isolatoren in Fortfall kommt. In dieser Einfachheit liegt die *Stärke* der Theorie — und ihre *Schwäche.* Man braucht nur an ein Linienspektrum, z. B. an das Tausende von Linien zählende Eisenspektrum zu denken, um den Gedanken sofort abzuweisen, als könnte man dieser Mannigfaltigkeit durch 2 Konstanten Herr werden.

Dieser Mangel haftet übrigens nicht nur der elektromagnetischen Theorie allein an, sondern in gleichem Maße der elastischen Lichttheorie. Auch diese charakterisiert alle durchlässigen Medien durch 2 Konstanten, die freilich hier der Natur der Sache nach als *Elastizitätskonstanten* auftreten. Beide Theorien führen ja im Grunde genommen zu denselben Formeln, die sie nur verschieden interpretieren.

Ein Blick auf die Maxwellschen Gleichungen bestätigt die Richtigkeit des Gesagten.

Bedeuten

X, Y, Z die Komponenten der elektrischen,

L, M, N die „ der magnetischen Kraft,

c die Lichtgeschwindigkeit,

so lauten die beiden Gleichungstripel:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ \text{b)} & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \text{c)} & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \frac{\mu}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \text{b)} & \frac{\mu}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \text{c)} & \frac{\mu}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

Dazu treten noch die „solenoidalen" Bedingungen, wenn wir wahren Magnetismus und wahre Ladung im Innern des Dielektrikums ausschließen:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ \text{b)} & \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Durch Differentiation von z. B. (Ia) nach t und Kombination mit (IIb) und (IIc) folgt:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{c}{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\right]$$

oder

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

also, da das letzte Glied nach (IIIa) verschwindet:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \triangle X.$$

Entsprechenden Gleichungen folgen Y, Z, L, M, N.

Der Einfachheit halber nehmen wir jetzt ebene Wellen parallel zur Y-Achse an; dann ist $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0$; also:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}.$$

Ein partikuläres Integral kann in der komplexen Form:

$$X = e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{l}\right)},$$

wo l die Wellenlänge bedeutet, angesetzt werden. Dann folgt daraus die Bedingung:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{1}{T^2} = \frac{1}{l^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{T^2}{l^2}.$$

Da nun aber, wenn v die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium von der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ bedeutet, die Beziehung besteht:

$$v = \frac{l}{T},$$

so folgt:

$$\varepsilon\mu = \frac{c^2}{v^2} = \nu^2,$$

wo ν den absoluten Brechungsindex bedeutet.

Nun ist für so schnelle Schwingungen, wie die Lichtschwingungen und selbst Hertzsche Schwingungen es sind, die Permeabilität μ für alle Substanzen merklich gleich und zwar von 1 kaum verschieden; z. B. für Eisenchloridlösungen, die die größte Abweichung zeigen, ist $\mu = 1{,}0006$. Also folgt:

$$\varepsilon = \nu^2,$$

d. h. *die Dielektrizitätskonstante ist gleich dem Quadrate des Brechungsexponenten.* Dies ist die sogenannte „relation of Maxwell“, die für Gase, wie oben erwähnt, von Boltzmann bestätigt werden konnte. Aus dieser Gleichung geht hervor, daß die elektromagnetische Lichttheorie in der ursprünglichen Form *keine Dispersion* und, wie gleich hinzugefügt werden mag, *keine Absorption* kennt. Letzteres folgt aus dem Umstande, daß die in das Medium von der Permeabilität μ und

der Dielektrizitätskonstante ε aus dem Äther einfallenden Wellen keinen Dämpfungsfaktor haben.[1])

Wie war diesem Mangel der im übrigen so glänzend bestätigten und fruchtbaren Theorie abzuhelfen?

Einen Fingerzeig gibt uns hier die Behandlung des nämlichen Problems in der alten elastischen Lichttheorie, die in ihrer reinen Form ja ebenfalls weder Dispersion noch Absorption liefert. In dieser Theorie faßt man nach dem Vorgange von Sellmeier und Helmholtz die Dispersions- und Absorptionserscheinungen als Resonanzphänomene auf: In die absorbierenden Medien sind Körperchen — Atome oder Subatome — eingelagert, die eine Gleichgewichtslage haben. Durch einen einmaligen äußeren Stoß aus derselben entfernt, werden sie durch Kräfte elastischer Natur wieder in dieselbe zurückgezogen und führen gedämpfte Schwingungen in ihrer Eigenperiode um dieselbe aus. Ist die Störung periodischer Natur — das ist ja bei den Lichtwellen der Fall — so führen diese Teilchen *ungedämpfte* Schwingungen von einer *andern* Periode als bisher aus, und zwar ist ihre jetzige Schwingungszahl gleich derjenigen der äußeren Störung, also der des auffallenden Lichtes. Die Lichtschwingungen beeinflussen also die Schwingungen der kleinen Teilchen in doppelter Weise: Einmal wird die Dämpfung derselben aufgehoben, und zweitens wird ihre ursprüngliche Periode in Übereinstimmung gebracht mit der des einfallenden Lichtes selbst.

Die Amplitude dieser *erzwungenen* Schwingungen ist im allgemeinen bei geringem Dämpfungsglied klein; nur in dem Falle, daß zufällig die Eigenperiode der schwingenden Teilchen der Periode der Störungskraft, also des auffallenden Lichtes, nahe kommt, wird sie relativ groß. Das durch die erzwungene Schwingung repräsentierte Energiequantum wird also in diesem Falle von der Größenordnung der Energie des einfallenden Lichtes. Die Energie der erzwungenen Schwingung wird aber geliefert von den Lichtwellen auf Kosten ihrer *eigenen* Energie, die also *vermindert* wird: Das ist die Erklärung der selektiven Absorption.

Nicht so durchsichtig ist der Grund, weshalb gleichzeitig damit auch *Dispersion* auftritt; in bezug auf diesen Punkt sei auf die später unten zu entwickelnde Theorie verwiesen.

---

1) *Für Leiter* liefert freilich die elektromagnetische Theorie Dispersion und Absorption, die von der in die Gleichungen eingehenden Leitfähigkeit λ herrühren; aber die Formeln stimmen im *sichtbaren Gebiet* mit der Erfahrung nicht überein; wie die Verhältnisse im Gebiete des *ultraroten* Spektrums liegen, wird nachher zu erörtern sein.

Digitized by Google

Wie ist etwas Analoges in der elektromagnetischen Theorie zu erreichen?

Offenbar durch die Annahme, daß in das Dielektrikum Teilchen eingebettet sind, die statt *elastischer Schwingungen elektromagnetischer* Oszillationen fähig sind. Wie man sich das im einzelnen vorstellen will, ist für die Sache gleichgültig. Man kann z. B. auf die Erfahrungen der Elektrolyse zurückgreifen, nach denen ein neutrales Molekül aus einem positiven und einem negativ geladenen Atom besteht, also einen elektrischen *Dipol* bildet, nnd man kann annehmen, daß das dielektrische Moment dieses Dipols, d. h. der Abstand der beiden Ladungen, durch die einfallenden elektromagnetischen Schwingungen periodisch verändert wird. Oder man kann sich auf die dieser verwandten Anschauung stützen, die durch das Zeemansche Phänomen nahegelegt wird. Danach zerfällt das Atom in zwei ungleiche Teile: einen großen positiv geladenen und einen etwa zweitausendmal kleineren negativ geladenen, oder, wie wir uns jetzt ausdrücken, in ein positives *Atomion* und ein negatives *Elektron*, welch letzteres Schwingungen — im allgemeinen elliptische — um das erstere vollführt, ein Planetensystem im kleinen darstellend.

Jedenfalls erhellt aus diesen Darlegungen, daß die Annahme elektrischer Eigenschwingungen in den Dielektricis nichts Unannehmbares besitzt, vielmehr mit anderen Erfahrungen gut zusammenpaßt.

Nach der orthodoxen Maxwellschen Theorie sind alle Dielektrika einander gleichwertig, der Lichtäther eingeschlossen; auch dieser ist durch zwei Konstanten, nämlich $\varepsilon = \mu = 1$ charakterisiert. Durch unsere obige Annahme statuieren wir aber einen Unterschied zwischen diesem und den übrigen dielektrischen Medien.

Im Äther gibt es weder Dispersion noch Absorption, weder Moleküle noch Atome; er ist wirklich ein Kontinuum, für ihn gilt die einfache Maxwellsche Theorie unverändert weiter; er ist das *einzige Dielektrikum* im Sinne derselben. Alle anderen Dielektrika bestehen aus einem homogenen Medium, in das aber eine große Anzahl dieser oben charakterisierten schwingungsfähigen Gebilde eingelagert ist. Für sie ist der Begriff der Dielektrizitätskonstanten streng genommen nicht mehr definiert; denn wenn man den Maßstab genügend klein nimmt, so ist das Dielektrikum ja in seinen Eigenschaften variabel, es verhält sich in den Zwischenräumen zwischen den eingelagerten Gebilden anders, wie in denselben; der Begriff der Dielektrizitätskonstanten ist nur noch im Sinne eines *Mittelwertes* gerechtfertigt, d. h. nur dann, wenn der Maßstab genügend groß genommen wird.

Geschieht dies aber, betrachtet man das Dielektrikum „*makro-*

skopisch", gehen im Dielektrikum periodische Prozesse vor sich, deren Wellenlänge *groß* ist gegen die Mikrostruktur desselben, so wird es sich für *diese* Vorgänge verhalten wie ein *Maxwellscher Isolator*; für diese Prozesse wird also die reine Maxwellsche Theorie noch immer maßgebend und ausreichend sein, die für Vorgänge von der Größenordnung der Lichtwellen bereits versagt.

Die Grenze zwischen beiden Gebieten ist nicht scharf und wird von Material zu Material wechseln; sie ist in jedem Fall durch den Versuch festzustellen. Für die Metalle, für die ähnliche Betrachtungen gelten, folgt z. B. aus den Beobachtungen von Hagen und Rubens, daß bis zu Wellen von ca. 10/1000 mm Länge die einfache Maxwellsche Theorie ausreichend ist. Vergl. dazu die Anmerkung auf Seite 117.[1])

Wir wollen nun annehmen, in ein Dielektrikum sei ein schwingungsfähiges Gebilde von der Ladung (e) und der Masse (m) eingelagert, das der Gleichung gehorcht:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\varrho\frac{\partial\xi}{\partial t}+p\xi=0. \tag{1}$$

Diese Gleichung stellt die Eigenschwingung dar, deren Frequenz wir $N_0=\frac{1}{T_0}$ nennen wollen. Wenn wir ϱ, *wie immer im folgenden*, klein annehmen, so ist bekanntlich

$$\frac{p}{m}=N_0^2=\frac{1}{T_0^2}\,. \tag{2}$$

Falls nun die äußere Kraft X wirkt, so ist die Gleichung abzuändern in

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\varrho\frac{\partial\xi}{\partial t}+p\xi=eX, \tag{3}$$

wo der nach der Zeit periodische Teil von X von der Form $e^{\frac{it}{T}}$ ist. Nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen läßt sich dann ξ darstellen in der Form:

$$\xi=Be^{i\left(\frac{t}{T}-\varphi\right)}=Be^{i(Nt-\varphi)},$$

wo φ eine Phasendifferenz und N die Freqnenz der Störungskraft bedeutet. Die Amplitude B erreicht nur dann beträchtliche Werte, wenn N_0 in der Nachbarschaft von N liegt.

Die Gleichung (3) ist nun zu kombinieren mit den Maxwellschen Formeln; dies kann in folgender Weise geschehen:

1) Vergl. auch den Aufsatz von W. Westphal, diese Zeitsch. 9, 36; 1905.

Die linke Seite der Gleichung (Ia) enthält das Glied $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t}$, das von **Maxwell** als *„Verschiebungsstrom"* (multipliziert mit 4π) bezeichnet wird; im *homogenen* Dielektrikum ruft er *allein* das Magnetfeld (LMN) hervor; im *Leiter* tritt auf der linken Seite noch additiv der *Leitungsstrom* (multipliziert mit 4π) hinzu. In *unserem* (d. h. mit einem schwingungsfähigen Gebilde ausgestatteten) Dielektrikum geht — analog den Leitungsströmen — noch ein *Konvektionsstrom* vor sich, der von der Bewegung des schwingenden Teilchens herrührt. Seine Größe ist gleich dem Produkt aus der Ladung und der Geschwindigkeit, also gleich $e\frac{\partial \xi}{\partial t}$; also ist in Gleichung (I'a) zu schreiben:

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}.$$

Dabei bedeutet ε_0 *nicht* die durch *statische Versuche* gefundene Dielektrizitätskonstante, sondern diejenige, *welche das Dielektrikum haben würde, wenn es im Maxwellschen Sinne homogen wäre.*

Infolge der Periodizität von ξ und X bestehen die Beziehungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{i}{T}\xi, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{i}{T}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{T^2}\xi;$$

ebenso für X.

Dies in Gleichung (3) eingesetzt liefert:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\left\{\frac{mi}{T} + \varrho + \frac{pT}{i}\right\} = \frac{eT}{i}\frac{\partial X}{\partial t},$$

oder

$$e\frac{\partial \xi}{\partial t}\left\{-\frac{m}{T^2} + \frac{\varrho}{T}i + p\right\} = e^2\frac{\partial X}{\partial t}, \qquad e\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{e^2}{p + \frac{\varrho i}{T} - \frac{m}{T^2}}\frac{\partial X}{\partial t}.$$

Eingesetzt in Gleichung (Ia) ergibt:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{\varepsilon_0 + \frac{4\pi e^2\frac{c}{p}}{1 + \frac{\varrho i}{pT} - \frac{m}{p}\frac{1}{T^2}}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}.$$

Setzt man $4\pi e^2\frac{c}{p} = \varepsilon'$, $\frac{\varrho}{p} = a$, $\frac{m}{p} = b$, so folgt:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{1 + \frac{a}{T}i - \frac{b}{T^2}}\right\} = \frac{\varepsilon(T)}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}.$$

Infolge der Kombination ist an Stelle von ε_0 die Größe $\varepsilon(T)$, d. h. eine von der Schwingungsdauer oder *der Wellenlänge abhängige Dielektrizitätskonstante*, getreten. Damit ist bereits ausgesprochen, daß

in diesen Gleichungen Dispersion enthalten ist. Ebenso erhält man statt der bisherigen Gleichung $\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$ jetzt die folgende:

$$\frac{\varepsilon(T)}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}.$$

Setzen wir $X = e^{i\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\alpha}\right)}$, so folgt durch Einsetzen: $\frac{\varepsilon(T)}{c^2}\frac{1}{T^2} = \frac{1}{\alpha^2}$, woraus

(4) $$\varepsilon(T) = \frac{c^2 T^2}{\alpha^2} = \nu^2,$$

wo ν^2 als *komplexe Größe* auftritt. Was ist nun die Bedeutung des komplexen ν^2? Das reelle ν bedeutet, wie wir vorher sahen, den Brechungsindex. Um diese Frage zu entscheiden, setzen wir $\nu = n - ik$; dann erhält man:

$$X = e^{i\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\alpha}\right)} = e^{i\left(\frac{t}{T} - \frac{y\nu}{cT}\right)} = e^{\frac{i}{T}\left(t - \frac{y(n - ik)}{c}\right)}$$

oder

$$X = e^{i\left(\frac{t}{T} - \frac{yn}{Tc}\right) - \frac{yk}{cT}} = e^{-\frac{ky}{cT}} e^{\frac{i}{T}\left(t - \frac{yn}{c}\right)}$$

oder

$$X = e^{-\frac{ky}{l}} e^{\frac{i}{T}\left(t - \frac{yn}{c}\right)}.$$

Nun ist aber in dem zweiten Faktor rechter Hand der Koeffizient von y der reziproke Wert der Lichtgeschwindigkeit v in dem betreffenden Medium; also $\frac{n}{c} = \frac{1}{v}$ oder $n = \frac{c}{v}$: d. h. n bedeutet den Brechungsexponenten und k den Absorptionskoeffizienten.

Durch Zerfallen von (4) ergibt sich:

$$n^2 - k^2 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'\left(1 - \frac{b}{T^2}\right)}{\left(1 - \frac{b}{T^2}\right)^2 + \frac{a^2}{T^2}},$$

$$2nk = \frac{\varepsilon'\frac{a}{T}}{\left(1 - \frac{b}{T^2}\right)^2 + \frac{a^2}{T^2}}.$$

Nach unserer Voraussetzung muß infolge der Kleinheit von ϱ auch $\frac{a}{T}$ klein gegen 1 sein; infolgedessen ist auch k als klein anzunehmen. Dann gewinnt b folgende Bedeutung:

Die freie Schwingung genügt bei Kleinheit von ϱ der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + p\xi = 0,$$

wo $\xi = e^{\nu t}$ gesetzt werden kann, wenn ν der Gleichung genügt: $m\nu^2 + p = 0$; oder $\nu^2 + \frac{1}{b} = 0$; also ist mit Rücksicht auf (2) $b = T_0^2$: daher

$$n^2 - k^2 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'\left(1 - \frac{T_0^2}{T^2}\right)}{\left(1 - \frac{T_0^2}{T^2}\right)^2 + \frac{a^2}{T^2}}, \qquad 2nk = \frac{\varepsilon' \frac{a}{T}}{\left(1 - \frac{T_0^2}{T^2}\right)^2 + \frac{a^2}{T^2}}.$$

Da $\frac{a}{T}$ sehr klein ist, so verschwindet k, wofern nicht $T = T_0$, in welchem Falle der Ausdruck unendlich würde, also folgt:

$$n^2 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{1 - \frac{T_0^2}{T^2}}.$$

Es ist aber festzuhalten, daß diese Annäherung nur zu brauchen ist, wenn $T \neq T_0$; unter dieser Voraussetzung ist die Absorption verschwindend klein.

Untersuchen wir den Verlauf von n^2 unter Ausschluß des Gebietes $T = T_0$. Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden.

1) $T_0 < T$; dann kann man setzen $\frac{T_0^2}{T^2} = 1 - \delta < 1$; also

$$n_1^2 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{\delta};$$

2) $T_0 > T$; dann kann gesetzt werden $\frac{T_0^2}{T^2} = 1 + \delta > 1$; also

$$n_2^2 = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon'}{\delta};$$

also $n_1^2 > n_2^2$; aber in beiden Fällen nimmt n mit wachsendem T oder wachsender Wellenlänge ab. (*Normale Dispersion.*)

Zu untersuchen bleibt noch der vorhin ausgeschlossene Fall $T = T_0$; hier ist es nicht mehr gestattet, die Größen $\frac{a}{T}$ und $\frac{a^2}{T^2}$ zu vernachlässigen, da sonst für $T = T_0$, wie schon oben hervorgehoben, k unendlich groß würde.

Für diesen Fall gehen die Formeln über in:

$$n^2 - k^2 = \varepsilon_0, \qquad 2nk = \frac{\varepsilon' T}{a},$$

also:

$$n = \frac{\varepsilon' T}{2ak}, \qquad \frac{\varepsilon'^2 T^2}{4a^2k^2} - k^2 = \varepsilon_0;$$

woraus

$$k = \sqrt{-\frac{\varepsilon_0}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{4} + \frac{\varepsilon'^2 T^2}{4a^2}}};$$

oder *für kleines a:*

$$n = k = \sqrt{\frac{\varepsilon' T}{2a}},$$

d. h. *beträchtliche Absorption und mit der Wellenlänge wachsender Brechungsindex.*

Man erhält also folgende Kurve für (n) und (k):

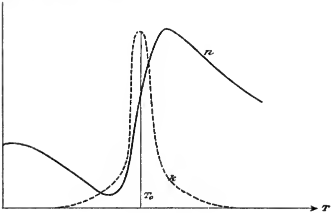


Fig. 1.

Das Gebiet des Absorptionsstreifens, in dem der Brechungsexponent mit der Wellenlänge wächst, heißt das Gebiet der *anomalen Dispersion;* die außerhalb liegenden Gebiete links und rechts vom Absorptionsstreifen zeigen die *normale* Abhängigkeit, nämlich Abnahme des Brechungsexponenten mit zunehmender Wellenlänge.

Der dargelegte Gedankengang ist allen brauchbaren Dispersionstheorien gemeinsam; die obige Darstellung schließt sich im wesentlichen an Drude[1]) an.

Die aus der Formel für n sich ergebenden Dispersionsformeln sind im sichtbaren Spektrum vielfach geprüft und bestätigt worden, jedoch meistens im Gebiet der „normalen Dispersion". Im Bereiche der anomalen Dispersion hat zuerst A. Pflüger[2]) Messungen angestellt; seine Kurven für n als Funktion der Wellenlänge zeigen in der Tat den oben typisch wiedergegebenen Verlauf; nach ihm hat R. W. Wood[3]) im wesentlichen übereinstimmende Resultate erhalten und eine hübsche

1) P. Drude, Physik des Äthers.

2) A. Pflüger, Wied. Ann. 56, 412; 1895. 65, 173; 1898.

3) R. W Wood, Phil. Mag. (5) 46, 380; 1901.

snbjektive Beobachtungsmethode der Dispersionskurven nach dem Prinzip der gekreuzten Prismen angegeben.

Was ergibt sich nun aus den Formeln für *statische* oder sehr langsame periodische Vorgänge? Um das zu finden, hat man in der Formel $n^2 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{1 - \frac{T_0^2}{T^2}}$ zu setzen $T = \infty$. Dann ergibt sich

$$n^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Durch die Anwesenheit des schwingungsfähigen Gebildes ist zu der „ursprünglichen" Dielektrizitätskonstante ε_0 der Betrag ε' hinzugekommen; diese Summe haben wir als *Dielektrizitätskonstante unseres inhomogenen Mediums* (im Sinne eines Mittelwertes) anzusehen. Die Formel ergibt, daß für Wellen von großer Wellenlänge, d. h. langer Schwingungsdauer — die Erfahrung zeigt, daß selbst die schnellsten elektrischen Wellen von 3 mm Länge hierher gehören — *keine Absorption und Dispersion* auftritt.

Hier besteht also die Maxwellsche Beziehung zu Recht; der „elektrische" Brechungsexponent, d. h. der für elektrische Wellen im engeren Sinne gemessene Brechungsindex ist gleich der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante. Damit stimmen sämtliche Beobachtungsresultate überein.

Entsprechend findet auch der Maxwellsche Satz, *daß alle Isolatoren durchsichtig sein müssen*, der im Gebiet der sichtbaren Wellen eklatante Ausnahmen, z. B. bei Paraffin und Hartgummi, erleidet, für elektrische Wellen vollkommene Bestätigung.

Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob es nicht durch Anwendung geeigneter Mittel gelingen wird, Absorption und Dispersion auch für elektrische Wellen zu erzielen.

In der Tat ist dies möglich, und die Mittel dazu ergeben sich an Hand der oben dargestellten Theorie. Wenn es gelingt, das Dielektrikum, das für diese langen Wellen wirklich wie ein Maxwellsches Dielektrikum sich verhält, mit schwingungsfähigen Gebilden zu versehen, so muß in der Tat ein solcher mit „künstlichen Molekülen" durchsetzter Isolator sich verhalten wie ein dispergierendes Medium mit Absorptionsstreifen.

Der erste, der diesen Nachweis erbrachte, war Garbasso.[1]) Er zeigte, daß, wenn man zwischen Empfänger und Sender Leiter von solchen Dimensionen anordnet, daß ihre Eigenschwingungen mit der Periode des Senders, oder richtiger gesagt, des Empfängers[2]), übereinstimmt, daß dann diese Schwingungskreise lebhafte elektrische Os-

1) A Garbasso, Atti Acc. di Torino, 28, 1893.

2) Wegen der multiplen Resonanz; siehe weiter unten S. 127.

zillationen ausführen auf Kosten der Energie des Senders. Der Empfänger zeigt also eine geringere Energie an, als wenn die Schwingungskreise nicht im Strahlengange befindlich gewesen wären. Er zeigt also eine „Absorption" an. Diese Intensitätsverringerung ist gleich der in den Schwingungskreisen steckenden Energie der erzwungenen Schwingungen, welche znm Teil in Joulesche Wärme nmgesetzt, znm Teil auch reflektiert wird. Gegen das sichtbare Gebiet zeigt sich nun hier insofern ein Unterschied, als der bei weitem kleinere Teil absorbiert wird und der größere als reflektierte Strahlung zurückgeht. Deshalb ist die Intensitätsverminderung, die der Empfänger anzeigt, größtenteils auf Kosten der selektiven Reflexion zu setzen. Der Einfachheit halber werden wir aber im folgenden diese Intensitätsverminderung als Absorption bezeichnen.

Die Versuche Garbassos sind aus dem Grunde verdienstvoll, weil sie das Prinzip ergeben haben, nach dem derartige Versuche anzustellen sind; sie sind aber nnr qualitativer Natur. Mit nnseren neneren Mitteln ist es jedoch möglich, diese Experimente auch quantitativ zu gestalten.

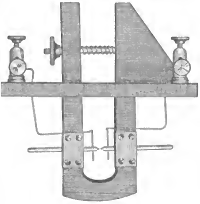


Fig. 2.

Man kann sich zn dem Zweck eines ähnlichen Instrumentariums bedienen, wie es von H. Rubens[1]) vor einiger Zeit beschrieben worden ist. Da ich an demselben einige Änderungen angebracht habe, beschreibe ich gleich meine Anordnung.

Als Wellenerreger (Sender) dienen zwei horizontal liegende Nensilberzylinder von je 5 cm Länge nnd 5 mm Dicke. In die einander zugekehrten Enden derselben sind zwei dünne Aluminiumstifte von 1 mm Dicke eingesetzt, die etwa $^1/_2$ bis 1 mm vorstehen. Zwischen ihnen springen die Funken in Petroleum über. Diese Anordnung wurde aus dem Grunde gewählt, weil es sich herausstellte, daß die Aluminiumstifte am wenigsten durch die Funken korrodiert werden; sie sind noch günstiger wie die von Himstedt empfohlenen Zinkstifte. Die Neusilberzylinder sind in zwei kräftigen vertikalen Hartgummistäben befestigt und können

1) H. Rubens, Ztschrft. f. phys. u. chem. Unterricht. 10, 239; 1897.

Digitized by Google

durcb eine passend angebracbte Schraube bis auf eine sehr kleine Strecke einander genähert werden (ca. $^1/_{10}$ mm). So erreicbt man vollständige Stabilität und Unveränderlichkeit der Funkenstrecke, die zu quantitativen Messungen die notwendige Vorbedingung ist. Die genauere Anordnung ist aus der Figur 2 ersichtlicb.

Als Empfänger dient ein Thermoelement nach Klemenčič, von dem die linke Hälfte in der Figur 3 gezeichnet ist; die rechte Seite ist symmetrisch zn ergänzen.

An zwei borizontal liegende Hohlzylinder ans Messing (je 1,5 cm lang, innere Weite 2—3 mm) sind zwei Drähte verschiedenen Materials angelötet, links z. B. Eisen-, recbts Konstantandrabt von 1/50 mm Dicke. Diese Drähte sind in der bekannten Weise verschlungen, und ibre freien Enden führen zu einem Panzergalvanometer. Die als Resonatoren dienenden Hohlzylinder können durch eingesteckte Messingstifte verlängert und so das Thermoelement auf verschiedene Wellenlängen abgestimmt werden.

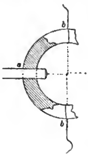


Fig. 3.

Als Resonatoren verwendet man Stanniolstreifen von einigen mm Breite und der gewünschten Länge z. B. 5 cm; ein solcher linearer Resonator scbwingt wie eine Saite, d. h. als halbe Wellenlänge: An seinen Enden befinden sicb die Knoten der Strömnng und der damit proportionalen magnetiscben Kraft, sowie die Bäuche der elektrischen Kraft. Ein solcber Resonator würde also z. B. durcb auffallende Wellen von 10 cm Länge in vollkommene Resonanz versetzt werden. Derartige Resonatoren werden nun in großer Anzahl in parallelen Reiben entweder auf Fäden an einem Holzrahmen befestigt oder einfacb auf Hartgummiplatten aufgeklebt. Ein solches Gebilde wollen wir künftig als „Resonatorengitter“ bezeichnen.

Wenn man nun die Versuche so macben will, wie sie in der Optik angestellt werden, so muß man einen bestimmten Wellenlängenbereich, sagen wir von 2 bis 20 cm Länge, zur Verfügung haben und für jede dieser Wellenlängen die „Absorption“ des Gitters bestimmen. Diese Absorption ist im allgemeinen gering, und sie erreicht nur dann erhebliche Werte, wenn die auffallende Strahlung dieselbe Wellenlänge hat, welche die Eigenperiode des Resonators besitzt; in unserem Beispiele wären dies Wellen von 10 cm Länge.[1])

Wenn man nun als Abszissen die Wellenlängen und als Ordinaten

1) Dabei ist stillschweigend vorauszusetzen, daß die einzelnen Resonatoren des Gitters sich gegenseitig nicht beeinflussen, was indessen doch der Fall ist. Darauf wird später ausführlich eingegangen werden.

Digitized by Google

die prozentischen Intensitätsverlnste, die durch das Gitter hervorgebracht werden, aufträgt, so erhält man eine znsammenhängende Kurve, die ein spitzes Maximum aufweist, welches eben der Eigenperiode des Resonatorengitters entspricht. Diese Kurve können wir als Absorptionsstreifen bezeichnen.

Wie erhält man nun aber den nötigen Wellenlängenbereich von 2 bis 20 cm? Auf den ersten Blick erscheint es notwendig, ebenso viele Sender von verschiedener Länge zu besitzen, als man verschiedene Wellen haben will. Indessen ist dies nicht notwendig. Der Sender nämlich sendet eine Welle von bestimmter Periode ans, die aber **stark gedämpft ist.** Eine gedämpfte Schwingung läßt sich stets darstellen als ein Integral über eine ungedämpfte Schwingung. Der physikalische Sinn dieses mathematischen Satzes ist der, daß man auch sagen kann, der Sender liefert statt einer gedämpften Welle von bestimmter Länge ungedämpfte Wellen, deren Wellenlänge von Null bis ∞ variiert. Von diesem Wellenkomplex sncht sich nun das Thermoelement, dessen Resonator in der oben beschriebenen Weise verändert werden kann, gerade die Wellenlänge aus, auf die es abgestimmt ist[1]), und der Vorgang vollzieht sich so, als ob nur diese eine Welle vorhanden wäre. Streng genommen wirken zwar auch alle die übrigen Wellen auf das Thermoelement. Da indessen ihre Perioden nicht übereinstimmen mit der Eigenperiode des Thermoelements, so ist die Amplitude der erzwnngenen Schwingung verschwindend klein und kann ignoriert werden. Man erhält also den gewünschten Wellenlängenbereich, indem man einfach die Länge des Thermoelements in den entsprechenden Grenzen variiert. Auf diese Weise lassen sich nun in der Tat die oben beschriebenen Absorptionskurven von Resonatorengittern aufnehmen. Einige Beispiele von solchen Kurven geben die weiter unten folgenden Figuren.

Damit ist nun die Analogie mit den optischen Verhältnissen noch keineswegs erschöpft; sie geht vielmehr bis ins kleinste Detail. Man kann sogar Verhältnisse, die im sichtbaren Gebiet nicht rein auftreten, durch Versuche mit solchen Resonatorengittern aufklären. Ein Beispiel dafür ist die sogenannte „**Kundtsche** Regel".[2])

Löst man eine Substanz, welche das Licht innerhalb eines eng begrenzten Spektralgebietes stark absorbiert, in verschiedenen farblosen Flüssigkeiten, so variiert die Lage dieses Absortionsstreifens nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit, die eben in der **Kundtschen** Regel ihren Ansdruck findet. Dieselbe sagt aus, daß das Absorptionsgebiet nm so

1) Vergl. Anm. 2 auf Seite 124.

2) E. **Aschkinaß** u. Cl. **Schaefer**, Ann. d. Phys. **5**, 485; 1901.

weiter nach dem roten Ende des Spektrums verschoben wird, je größer das Brechnngs- und Dispersionsvermögen des Lösungsmittels ist. Als Brechungs- und Dispersionsvermögen bezeichnet Knndt die Konstanten a und b in der Formel

$$n = a + \frac{b}{l^2},$$

worin n den Brechungsexponenten, l die Wellenlänge bedentet. Nicht selten steht die Kundtsche Regel in Widerspruch mit den Tatsachen, so daß ihr erst kürzlich jede Bedentung und Berechtigung abgesprochen wurde. Wie mir scheint, mit Unrecht; denn beim Vorgang der Lösung bleibt das Molekül in den weitaus meisten Fällen nicht ungeändert, was offenbar die Vorbedingung für die Anwendung der Regel ist. Gelänge es also diese störenden, mit dem Vorgang der Lösung verknüpften Erscheinungen zn eliminieren, so würde man experimentell über Gültigkeit oder Ungültigkeit dieser Gesetzmäßigkeit entscheiden können. Das Analoge zu diesem Versuche aus der Optik ist mit unserem Resonatorengitter der folgende Versuch. Man müßte die Absorptionskurve eines Resonatorengitters, dessen Resonatoren durch Fäden an einem Holzrahmen frei in der Luft befindlich aufgehängt wären, aufnehmen, dann das Gitter in ein flüssiges Dielektrikum eintauchen und nun wieder die Absorptionskurve aufnehmen. Besteht die Kundtsche Regel zu Recht, so muß sich in diesem letzteren Falle das Absorptionsmaximum nach der Seite der längeren Wellen verschoben haben.

Eine theoretische Überlegung läßt nun ein derartiges Verhalten erwarten, denn bezeichnen wir die Schwingungsdauer eines Resonators, der sich in Luft befindet, mit T_0, seine Selbstinduktion mit L, seine Kapazität mit C_0, so besteht folgende Beziehung[1]):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{L C_0}.$$

Tauchen wir diesen Resonator nun in ein Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstante E ein, so multipliziert sich seine Kapazität mit eben der Dielektrizitätskonstante. Infolgedessen wird seine neue Schwingungsdauer

$$T_1 = 2u \sqrt{L C_0 \varepsilon}.$$

Es ist also T_1 stets größer als T_0; das *Absorptionsmaximum verschiebt sich also im Einklange mit der Kundtschen Regel nach größeren Wellenlängen.*

1) Streng genommen gilt diese Formel nur für Schwingungskreise, deren Länge klein ist gegen die Wellenlänge, was hier nicht mehr der Fall ist; diese Darstellung ist nur der Einfachheit halber gewählt.

Digitized by Google

Der Versuch, den **Aschkinaß** und ich anstellten, ergab die vollkommene Richtigkeit dieser Überlegung. Als Dielektrika benutzten wir Benzol, Äther und Aceton. Für jedes dieser drei Dielektrika erhielten wir eine Absorptionskurve, die nm so weiter nach größeren Wellenlängen verschoben war, je größer die Dielektrizitätskonstante war; die Kurven der Figur 4 stellen unsere Beobachtungen dar; sie sind scheinbar im *umgekehrten* Sinne verschoben; aber die Abszissen stellen nicht die Wellenlängen, sondern die reziproken Werte dar.

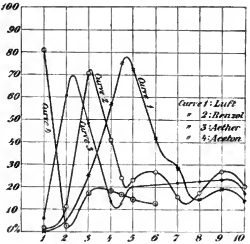


Fig. 4.

Gleichzeitig kann man auch diese Messungen quantitativ zur Bestätigung der **Kundtschen** Regel verwenden. Denn, die exakte Gültigkeit derselben vorausgesetzt, müssen sich die Ordinaten der Maxima verhalten wie die elektrischen Brechungsexponenten, d. h. wie die Wurzeln aus den Dielektrizitätskonstanten. Die folgende Tabelle zeigt, wie gut die nach dieser Methode bestimmten Brechungsexponenten mit den von anderen bestimmten Werten übereinstimmen.

	nach **Drude** und **Nernst**	nach **Aschkinaß** und **Schaefer**
Benzol ...	1,52	1,52
Äther	2,04	2,07
Aceton ...	4,7	4,6

Die Quadrate dieser Zahlen ergeben die Dielektrizitätskonstante.

Aus unseren Versuchen geht also die Gültigkeit der **Kundtschen** Regel hervor. Voraussetzung ist dabei nur, daß man reine Verhältnisse vor sich hat.

Die Analogie mit den optischen Verhältnissen geht aber noch viel weiter.

Vor kurzem hat **Planck**[1]) eine Theorie der Dispersion und Ab-

1) Sitzungsber. der Berl. Akad. d. Wissensch. I. 470, 1902; I, 440, 1903.

Digitized by Google

sorption auf elektromagnetischer Grundlage entwickelt, in der unter anderem die Abhängigkeit der Absorption von der Anzahl der absorbierenden Resonatoren in der Volumeinheit untersucht wird. Diese Untersuchung hat zu einer ganz bestimmten Lösung dieser Frage geführt, die sich leider aus Mangel an experimentellem Material nur in recht unvollkommener Weise hat prüfen lassen. Dies legte mir den Gedanken nahe, zu untersuchen[1]), wie die selektiven Eigenschaften von solchen Resonatorengittern sich ändern, wenn sowohl die Anordnung als auch die Dichte der Resonatoren variiert wird; im besondern legte ich mir die Frage vor, ob sich Anordnungen realisieren lassen, die analoge Erscheinungen darbieten, wie sie von der Planckschen Theorie verlangt werden.

In der Tat haben sich solche Ähnlichkeiten in dem Verhalten der Gitter gezeigt; allein auch — was in Anbetracht der vielen einschränkenden Voraussetzungen der Planckschen Theorie nicht unerwartet kommen konnte — abweichende Ergebnisse.

Wenn man in den Strahlengang ein Gitter mit sehr wenigen Resonatoren (6—10) brachte, so erhielt man eine vollkommen symmetrische Absorptionskurve, die sich bei Zunahme der Resonatoren in bescheidenem Maße erhöbte, ohne daß sich das Maximum der Absorption jedoch verschob. Dieser Fall entspricht dem Planckschen Typus II von Absorptionskurven. Da dieser Fall schon häufig bei Gittern beobachtet worden ist, so verzichte ich darauf, ihn durch Beispiele und Kurven zu belegen.

Bei weitem interessanter ist nun der Fall, den Planck als Typus III bezeichnet, und der aus dem Typus II sich entwickelt, wenn die Dichte der Resonatoren gesteigert wird. Ich legte demgemäß besonderen Wert darauf, die Erscheinungen zu verfolgen, die sich bei immer größerer Zunahme der Resonatorenanzahl ergaben.

Wenn man nun, von einem Gitter A mit relativ großer Resonatorenzahl (20—70) ausgehend, zu einem andern B übergeht, das aus A dadurch entstanden ist, daß die sämtlichen Entfernungen zwischen den Resonatoren im nämlichen Verhältnisse verkleinert werden, so erhält man bei Vergleichung der Absorptionskurven A und B zwar im allgemeinen das Resultat, daß die Maximalabsorptionen gegeneinander verschoben sind; aber während die Plancksche Theorie eine Verschiebung des Maximums nach größeren Wellenlängen (nach rechts) mit zunehmender Resonatorendichte fordert, ergibt sich hier je nach den Umständen eine Verschiebung nach rechts oder links; ja, es lassen

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 16, 106; 1905.

sich Fälle realisieren, in denen überhaupt keine Verschiebung zu konstatieren ist, obwohl die Absorption beträchtlich ist, der Plancksche Typus II also nicht mehr vorliegt.

Man wird dadurch zu dem Schlusse gedrängt, daß bei Verringerung des Abstandes zwischen den Resonatoren zwei entgegengesetzt gerichtete Wirkungen, eine nach rechts, eine nach links verschiebende, tätig sind, die bei geeigneter Anordnung sich gegenseitig kompensieren können. In der Tat läßt sich dies leicht durch folgende Überlegung zeigen, wenn wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung von zwei Resonatoren beschränken.

Bezeichnet w_1 den Widerstand, L_{11} den Koeffizienten der Selbstinduktion, L_{12} den der wechselseitigen Induktion, C die Kapazität jedes der beiden vollkommen identischen Resonatoren, i_1 und i_2 die Stromstärke zur Zeit t, so bestehen die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 i_1}{d t^2} + \frac{w_1}{L_{11}} \frac{d i_1}{d t} + \frac{i_1}{L_{11} C} = - \frac{L_{12}}{L_{11}} \frac{d^2 i_2}{d t^2}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2 i_2}{d t^2} + \frac{w_1}{L_{11}} \frac{d i_2}{d t} + \frac{i_2}{L_{11} C} = - \frac{L_{12}}{L_{11}} \frac{d^2 i_1}{d t^2}. \tag{6}$$

Durch Elimination, z. B. von i_2, aus Gleichung (5), erhält man eine Differentialgleichung vierter Ordnung für i_1 sowohl wie für i_2. Wenn man die Glieder mit w_1 vernachlässigt, so erhält man das allgemeine Integral in der Form:

$$i_1 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} + \delta_1\right) + B \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_2} + \delta_2\right),$$

$$i_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} + \delta_1\right) - B \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_2} + \delta_2\right),$$

wo A, B, δ_1, δ_2 Integrationskonstanten sind und

$$T_1 = 2\pi \sqrt{(L_{11} + L_{12})\, C}, \qquad T_2 = 2\pi \sqrt{(L_{11} - L_{12})\, C}$$

ist. Da nun die beiden Resonatoren vollkommen identisch sind und auch die Anfangsbedingungen gleich sind, so ist ferner $i_1 = i_2$; d. h. $B = 0$. Also erhält man das Resultat:

$$i_1 = i_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} + \delta_1\right).$$

Statt der Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi \sqrt{L_{11} C_0}$, wo C_0 die Kapazität eines einzelnen Resonators bedeutet, führen die beiden zusammen jeder eine Schwingung von der Periode T_1 aus, die den angegebenen Wert hat. Bei der Beurteilung des Unterschiedes zwischen T_1 und T_2 darf nicht übersehen werden, daß sich durch Annäherung des zweiten Resonators auch die Kapazität C_0 verändert hat. Man kann nun folgende zwei einfache Fälle unterscheiden:

Digitized by Google

1. Die Resonatoren liegen horizontal nebeneinander:

Dann kehren sie sich die ungleichnamig geladenen Enden zu; die Kapazität eines Resonators C_1 ist also jetzt größer als seine ursprüngliche C_0; also ist die Periode $T_1 = 2\pi\sqrt{(L_{11} + L_{12})\,C_1} > T_0$.

Je näher die beiden Resonatoren aneinander rücken, desto größer werden L_{12} und C; d. h. das Maximum der Absorption verschiebt sich bei Verringerung des horizontalen Abstandes nach größeren Wellenlängen, *entsprechend der Forderung der Planckschen Theorie.*

2. Die Resonatoren liegen vertikal untereinander:

In diesem Falle ist, wie aus der Figur sofort ersichtlich, die Kapazität $C_2 < C_0$; da aber andererseits an Stelle von L_{11} die Summe $(L_{11} + L_{12})$ getreten ist, so kann man, ohne die Induktionskoeffizienten zu kennen, nichts darüber aussagen, ob T_2 größer als T_0 oder kleiner als T_0 ist. Läßt man die Resonatoren aneinander rücken, so vergrößert sich L_{12} und verkleinert sich C_2, so daß man auch hier a priori nicht in der Lage ist, etwas über den Sinn der Veränderung der Periode anzugeben. Indessen habe ich bei der experimentellen Untersuchung in allen Fällen gefunden (ich habe ungefähr 20 Gitter untersucht), daß der kapazitätsvermindernde Einfluß denjenigen der Vergrößerung der wechselseitigen Induktion überwiegt, daß also $T_2 < T_0$. Das Absorptionsmaximum verschiebt sich nach *kleineren* Wellenlängen.

Natürlich will ich damit nicht die Möglichkeit leugnen, daß es unter Umständen auch anders sein könne; aber da ich eine derartige Umkehrung nicht gefunden habe, werde ich mir erlauben, folgende Vereinfachung eintreten zu lassen: Im Falle 1. ist L_{12} sehr klein und wirkt außerdem im nämlichen Sinne wie C_1; die Veränderung der Periode ist also in diesem Falle sicher in überwiegendem Maße der Vergrößerung der Kapazität zuzuschreiben. Im Falle 2. ist L_{12} größer als im Falle 1. und wirkt der Wirkung einer Änderung von C_2 entgegen; doch ist dem Sinne nach die beobachtete Veränderung von T_2 so, als ob $L_{12} = 0$ wäre und C_2 allein sich änderte. Wir können also zusammenfassend sagen:

Man kann in den beobachteten Fällen, wenn man nur die Richtung der Verschiebung ins Auge faßt, zur Vereinfachung $L_{12} = 0$ annehmen und die Verschiebung lediglich auf das Konto der Veränderung der Kapazität setzen.

Digitized by Google

Da es mir im folgenden lediglich auf die qualitative Seite ankommt, so werde ich in diesem Sinne L_{12} in beiden Fällen gleich Null annehmen.

Um den zweiten Fall rein zu haben, kann man folgenden Versuch machen: Man stellt sich ein Gitter her aus einer einzigen Vertikalkolumne von Resonatoren, welches an einer bestimmten Stelle sein Absorptionsmaximum hat. Aus diesem Gitter nimmt man dann eine bestimmte Anzahl von Resonatoren fort, z. B. jeden zweiten und dritten, wodurch die Vertikalabstände sich auf ungefähr das Dreifache vergrößern. Dann nimmt der kapazitätsverkleinernde Einfluß ab, das Maximum dieses zweiten Gitters muß gegen das des ersten nach rechts verschoben sein.

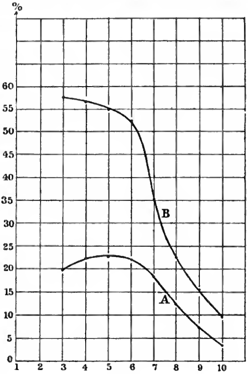


Fig. 5.

Die Konstanten des Gitters, mit dem ich diesen Versuch ausführte, waren folgende: Die Resonatoren hatten die oben angegebenen Dimensionen; für einen einzelnen hätte das Maximum des Mitschwingens ungefähr bei der Empfängerlänge 5 cm ($\lambda = 10$ cm) liegen müssen. Bei dem benutzten Gitter waren 26 Resonatoren vertikal untereinander in Abständen von 1 cm angeordnet; das Resultat war eine solche Verschiebung des Absorptionsmaximums nach links, daß dasselbe bei der Empfängerlänge 3 cm ($\lambda = 6$ cm) bereits überschritten ist, wie Figur 5 Kurve B zeigt.

In der Zeichnung sind als Abszissen die Empfängerlängen ($= \frac{1}{2} \lambda$), als Ordinaten die Absorption in Prozenten der auffallenden Strahlung aufgetragen.

Nun wurde aus diesem Gitter der zweite und dritte Resonator fortgenommen; die Zahl der noch übrig gebliebenen war neun. Die Folge davon ist, daß das Maximum der Absorption jetzt nach $\lambda_2 = 5$ cm gerückt ist, wo auch angenähert das Maximum für einen einzelnen Resonator liegen müßte; der kapazitätsvermindernde Einfluß ist also hier schon fast Null geworden (Fig. 5, Kurve *A*). Das entsprechende Experiment für den Fall 1, wo man also nur eine horizontale Reihe von Resonatoren anzuwenden hätte, läßt sich in dieser einfachen Form nicht gut ausführen, da auf eine Reihe höchstens 3—4 Resonatoren gehen und so die Absorption zu schwach werden würde; aber man kann mehrere in großem vertikalen Abstande befindliche Reihen nehmen, so daß der kapazitätsvermindernde Einfluß des vorherigen Falles verschwindend klein wird.

Ich benutzte zu diesem Versuche folgende Gitter (α und β): Die horizontalen Reihen bestanden aus vier Resonatoren derselben Dimensionen, die bei α eine Distanz von 1 cm, bei β von 0,2 cm hatten. Sechs solcher Reihen befanden sich untereinander in Abständen von 6 cm bei beiden Gittern. Sie unterschieden sich also nur durch die horizontalen Abstände der Vertikalkolumnen. In der Tat zeigt Figur 6 Kurve β eine starke Verschiebung nach rechts gegenüber α.

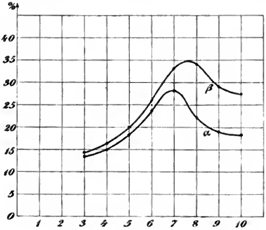


Fig. 6.

Die Kurven α und β zeigen nun die charakteristischen Eigenschaften der Absorptionskurven vom Planckschen Typus III. Die Verschiebung des Maximums nach größeren Wellenlängen ist bereits erwähnt; die Kurven sind unsymmetrisch, nach rechts steiler abfallend als nach links, endlich nach rechts stärker verbreitert als nach links. Da ferner α und β die nämliche Anzahl von Resonatoren haben (24), so zeigt ein Blick auf die Kurven α und β, die an keinem Punkte zusammenfallen, *daß das Beersche Gesetz von der Proportionalität zwischen den Extinktions-*

koeffizienten und der Dichtigkeit keine Gültigkeit für den vorliegenden Fall besitzt.[1])

Da nun die benutzten Resonatorengitter immer aus mehreren Reihen von Resonatoren bestehen, so ist es klar, daß beim Zusammenrücken der einzelnen Resonatoren beide Wirkungen, sowohl die des Falles 1 wie die des Falles 2 gleichzeitig auftreten. Je nach den Umständen überwiegt die eine oder andere von ihnen, oder sie kompensieren sich auch vollständig, wie es oben erwähnt worden ist; die Kurven tragen je nachdem den Charakter der in Figur 5 oder 6 dargestellten, oder sind bei Kompensation der Wirkungen vollkommen symmetrisch. Weil sich dies bei den ca. 40 von mir untersuchten Gittern immer wiederfand, kann ich von der Reproduktion noch weiterer Kurven absehen, da sie nichts Neues zeigen.

Es erhebt sich nun die Frage, woher die Abweichungen von der Planckschen Theorie kommen, die beobachtet wurden. Der Grund liegt darin, daß diese Theorie ziemlich viele einschränkende Voraussetzungen macht, die bei der gewöhnlichen Anordnung der Resonatorengitter nicht erfüllt sind, zum Teil nicht erfüllt sein können. So z. B. soll nach Planck der mittlere Abstand zweier benachbarten Resonatoren groß sein gegen die Lineardimensionen eines Resonators und gleichzeitig die Wellenlänge ebenfalls groß gegen den Abstand der Resonatoren. Diese beiden Bedingungen sind bei Resonatorengittern der angewendeten Konstruktion nicht gleichzeitig erfüllbar, da die Lineardimensionen eines Resonators selbst von der Größenordnung der Wellenlänge sind. Die Abweichungen bedeuten also keinesfalls eine Widerlegung der Theorie.

Es ist vielleicht von Interesse, hervorzuheben, daß in der Natur selbst solche Abweichungen vorkommen unter ähnlichen Bedingungen, unter denen unsere Resonatoren stehen. So wird bei Flüssigkeiten ebensowenig wie bei den untersuchten Gittern der mittlere Abstand zweier benachbarten Resonatoren groß sein gegen die Lineardimensionen derselben. Flüssigkeiten werden daher — so kann man vermuten — ein ähnliches Verhalten zeigen müssen wie die Gitter. So hat z. B. Ångström[2]) gezeigt, daß die Maximalabsorptionen von flüssigem Äther, Benzol, Schwefelkohlenstoff gegenüber denen ihrer Dämpfe nach kleinen

1) Im Gebiete der sichtbaren Strahlen ist meines Wissens noch keine Bestätigung dieses von der Theorie verlangten Ergebnisses vorhanden, wenigstens nicht bei natürlich vorkommenden Medien; kolloidale Goldlösungen in Gelatine zeigen allerdings dasselbe Verhalten. Siehe die Arbeit von F. Kirchner und R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 15, 573; 1904.

2) K. Ångström, Öfversigt af K. Vetensk. Akad. Förhandl. 47, 399; 1890.

Wellenlängen verschoben sind, während nach Aschkinaß[1]) die Banden des Wassers nach rechts verschoben sind. Die Übereinstimmung ist also qualitativ eine vollständige.

Die eine Seite der Frage, nämlich die Erzeugung von Absorption, ist damit erledigt. Es bleiben noch zu besprechen die Versuche, die sich mit der Erzielung von Dispersion befaßt haben. Dies ist bisher nur in einer Arbeit von Garbasso und Aschkinaß[2]) geschehen.

Sie erzielten Dispersion, indem sie eine Anzahl von Resonatorengittern prismenförmig, d. h. dreidimensional anordneten. In der Tat wurden durch dieses Prisma Strahlen von verschiedener Wellenlänge verschieden stark gebrochen. So schätzenswert diese Versuche sind, so sind sie doch nicht ausreichend, denn die Messungen der genannten Physiker beziehen sich nur auf das Gebiet der normalen Dispersion, während das der anomalen noch seiner Erschließung harrt.[3])

Wie schon oben hervorgehoben, besteht zwischen diesen Versuchen und den optischen insofern ein Unterschied, als in der Optik es sich um wirkliche Absorption handelt, während bei den Gittern der größte Teil der nicht durchgelassenen Energie reflektiert wird. Dies führt zu der Frage, ob nicht auch dieser Differenzpunkt noch zu beseitigen wäre.

Auf meine Veranlassung hat deshalb Herr Laugwitz[4]) Versuche mit Gittern unternommen, deren Resonatoren nicht aus Metallen, sondern aus einem elektrolytischen Leiter bestehen. Der Charakter der mit diesen Gittern erhaltenen Absorptionskurven ist insofern ein völlig anderer, als die Kurven kein spitzes Maximum aufzeigen, sondern ganz flach verlaufen. Dies Verhalten läßt sich, wie ich glaube, zwanglos durch den großen Widerstand erklären, den diese Resonatoren im Vergleich mit den metallischen besitzen. Die Absorption wird eine vollständige, wenn diese Resonatoren sehr lang im Verhältnis zur benutzten Wellenlänge sind, d. h. es tritt *Hertzsche Gitterwirkung* ein. In der Tat geht die ganze Strahlung ungehindert durch das Gitter hindurch, falls dasselbe um 90 Grad gedreht wird. Wenn man ein solches Hertzsches Gitter aus einem elektrolytischen Leiter auf sein Reflexionsvermögen untersucht, so zeigt sich, daß es erheblich weniger reflektiert als ein metallisches Gitter, während durch beide gar

1) E. Aschkinaß, Wied. Ann. 55, 401; 1895.

2) Garbasso und Aschkinaß. Wied. Ann. 53, 534; 1894.

3) Diese Aufgabe ist im hiesigen physikalischen Institut nach mehreren Methoden in Angriff genommen.

4) Hr. Laugwitz wird demnächst selbst über seine Versuche ausführlich berichten.

Digitized by Google

keine Energie hindurchgeht. Diese *elektrolytischen Gitter bilden also wirklich das optische Analogon zum Turmalin*, der ja bekanntlich in einer Richtung das Licht vollkommen durchläßt, in der anderen vollkommen absorbiert.

Auf die Bedeutung der Versuche mit elektrolytischen Resonatorengittern für die physiologische Optik soll hier nicht näher eingegangen werden.

Zum Schlusse möchte ich noch auf eine Aufgabe hinweisen, die durch Verwendung von metallischen Resonatorengittern gelöst werden kann. Wenn man die Strahlung eines Senders einmal oder mehrere Male an Resonatorengittern derselben Eigenperiode reflektieren läßt, so sind in dieser reflektierten Strahlung nur noch Wellen von solcher Länge vorhanden, wie sie der Eigenperiode dieser Resonatorengitter entspricht. Macht man also die Resonatoren genügend klein, z. B. $\frac{1}{10}$ mm, so muß man Wellen von doppelter Wellenlänge, also etwa von $\frac{1}{5}$ mm Wellenlänge erhalten. Ob diese Methode sich ausführen läßt, hängt wesentlich davon ab, ob es gelingen wird, die Energie des Senders genügend zu steigern, was aber nach meinen Erfahrungen keine unüberwindliche Schwierigkeit bietet. Dann sind wir imstande, den lückenlosen Anschluß herzustellen zwischen den längsten Wärmestrahlen von ungefähr $\frac{1}{20}$ mm und den kürzesten Strahlen elektrischer Kraft von 3 mm, deren Existenz Lampa nachgewiesen hat.

Breslau, im August 1905.

Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung.

Von H. THIEME in Posen.

Einleitung. — Der Gegensatz, der lange Zeit zwischen der analytischen und der synthetischen Geometrie geherrscht hat, besteht heute nicht mehr. Die Methoden beider Arten, die Eigenschaften der Raumgebilde zu erforschen, sind jetzt so weit ausgebildet, daß die synthetische und die analytische Geometrie einander auf ihren Wegen folgen können, daß es für den Forscher vielfach nur den Wert einer Äußerlichkeit besitzt, ob er die eine oder die andere Methode für seine Arbeit benutzt.

Nur einige wenige Gebiete gibt es, in denen die Annäherung der beiderseitigen Methoden noch nicht zur Vollendung gelangt ist, namentlich einige, in denen die reine Geometrie der rechnenden nicht zu folgen vermag. Diese unvollkommene Ausbildung der Methoden der reinen Geometrie hat für die Gesamtwissenschaft nachteilige Folgen

gehabt. Man weiß, daß projektive geometrische Eigenschaften durch invariante Beziehungen algebraischer Formen dargestellt werden. Die moderne Algebra hat Methoden geschaffen, auf Grund deren sie invariante Beziehungen in unbegrenzter Zahl aufstellen kann. Bisher ist nun die Geometrie noch nicht in der Lage, in jedem Falle anzugeben, welche geometrischen Eigenschaften den invarianten Beziehungen entsprechen, und dadurch verliert wieder die Invariantentheorie an Wert.

Soll die Geometrie der Algebra folgen können, so muß sie vor allem die durch die algebraischen Gleichungen gegebenen Gebilde unabhängig von der Algebra definieren können. Die ebenen Kurven definiert man geometrisch meist als Erzeugnis projektiver Büschel. Es ist das Verdienst von E. Kötter, auf Grund dieser Definition zum ersten Mal eine vollständig durchgeführte rein geometrische Theorie der algebraischen ebenen Kurven gegeben zu haben.[1]) Diese Theorie stellt aber für die Lehre der Kurven ihre Punkte in den Vordergrund, während für die Invariantentheorie mehr die durch die geometrischen Gebilde vermittelten Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und kovarianten Kurven von Bedeutung sind. Außerdem ist diese Erzeugungsweise auf Gebilde von weniger oder mehr Dimensionen (binäre Formen, Flächen usw.) nicht ohne weiteres übertragbar.

Der Verf. hat schon vor längerer Zeit gezeigt[2]), daß man die geometrischen Gebilde noch in einer zweiten Weise rein geometrisch definieren kann, und daß diese Definition, die Definition der geometrischen Gebilde durch Konstruktion ihrer Polarsysteme, eine gleichmäßige rein geometrische Behandlung der Gebilde jeder Dimension und beliebigen Grades ermöglicht.

Grundlage einer derartigen rein geometrischen Behandlung der verschiedenen Gebilde muß hierbei die Theorie der binären Formen sein und unter diesen die der binären Formen 2. Ordnung. Als Erzeugnisse von involutorisch liegenden projektiven Punktreihen sind die binären Formen 2. Ordnung unter der Benennung Punktsysteme, Involutionen von Punktepaaren seit langer Zeit bekannt.[3]) Als selbständige Gebilde hat zuerst H. Wiener[4]) sie einer eingehenden Untersuchung unterzogen.

Die Arbeit von Wiener bedarf in einem wesentlichen Punkte der Vervollständigung. Wiener behandelt einzelne Formen und Büschel

1) Berlin 1887. Rein geometrische Theorie der algebraischen ebenen Kurven.

2) 1879. Schlömilch, Ztschr. f. Math. u. Phys. XXIV. Vergl. Math. Ann. XX, XXIII, XXVIII.

3) Schroeter, Kegelschnitte (2. Aufl.) S. 49 u. f.

4) 1885. Reingeometrische Theorie der Darstellung binärer Formen.

von solchen, nicht aber die Gesamtheit der quadratischen Formen, das Bündel der Formen. Die Hineinziehung dieses Bündels in die Untersuchnng, namentlich die Untersuchung des Gebildes (Kegelschnitts), das aus der Gesamtheit der Formen mit zusammenfallenden Ordnungselementen besteht, wirft auf manche bekannte Beziehungen neues Licht, ist aher vor allem notwendige Vorbedingung für eine genauere Erforschnng der Eigenschaften der binären Formen 3. nnd höherer Ordnung.

Um dem Leser das Verständnis der Arbeit zu erleichtern, beschränkt sich das Folgende nicht auf die Ergänzung dieses einzelnen Punktes der Arbeit von Wiener. Vielmehr gibt der Verf. einen kurzen, aber vollständigen Abriß der ganzen Lehre, behandelt zunächst die einzelne Form, dann das Büschel und schließlich das Bündel von Formen 2. Ordnung. Auch wenn dabei einige Eigenschaften abgeleitet werden, die sich schon bei Wiener finden, so ist die Art der Ableitung doch durchgängig eine selbständige.

1. *Die einzelne binäre Form 2. Ordnung.* — Das durch zwei in involutorischer Lage befindliche projektive Punktreihen erzeugte Gebilde (Punktsystem, Involution von Punktepaaren) soll in folgendem in Übereinstimmung mit der modernen Algebra *binäre Form 2. Ordnung* oder anch *binäre quadratische Form* genannt werden. Einzelne solcher Formen mögen mit A^2, B^2, C^2, ... bezeichnet werden. Der einem Punkte a in der Involution (dem Punktsystem) zugeordnete Punkt b möge in Übereinstimmnng mit der Algebra die Polare des Pols a heißen.

Aus den bekannten Eigenschaften der Involution (des Punktsystems) ergeben sich folgende Sätze:

1. *Die Punkte einer Geraden und ihre Polaren für eine binäre Form 2. Ordnung A^2 bilden zwei projektive Punktreihen.*

2. *Ist b die Polare von a für A^2, so ist a die Polare von b für A^2.*

3. *Eine binäre Form 2. Ordnung ist durch zwei Paare von Pol und Polare bestimmt.*

Es gibt bekanntlich drei Arten von binären Formen 2. Ordnnng, *hyperbolische, elliptische* und *parabolische.* Bei einer hyperbolischen Form gibt es 2 Ordnungspunkte, Punkte, welche mit ihren Polaren zusammen fallen; irgend ein Paar von Pol und Polare liegt zu dem Paar der Ordnungspnnkte harmonisch. Die elliptischen Formen besitzen keine Ordnungspunkte. Bei einer parabolischen Form fallen die beiden Ordnungspunkte in einen znsammen; dieser ist die Polare zu allen Punkten der Geraden, und nmgekehrt hat er jeden Punkt der Geraden zur Polare.[1])

1) Schroeter, Kegelschnitte. S. 51 n. 73.

2. *Das System zweier konjugierten Formen 2. Ordnung.* — Ist A^2 eine binäre Form 2. Ordnung, (a, b) ein Paar, (x, y) ein zweites Paar von Pol und Polare für A^2, so bestimmen die Paare (a, x) und (b, y) eine neue Form 2. Ordnnng, die mit X^2 bezeichnet werden möge. X^2 nennt man eine zu A^2 *konjugierte Form.*[1])

Ist nmgekehrt X^2 die ursprüngliche Form, sind also (a, x) und (b, y) für X^2 Paare von Pol nnd Polare, so bestimmen in analoger Weise die Paare (a, b) und (x, y) eine zn X^2 konjugierte Form, nämlich A^2. Also:

1. *Ist X^2 zu A^2 konjugiert, so ist auch A^2 zu X^2 konjugiert.*

Für eine gegebene Form A^2 kann man nicht nur zn einzelnen Punkten, sondern auch zu Systemen von Punkten die Polaren suchen. Nach **1**, 1 ist das Polargebilde einer Punktreihe eine projektive Punktreihe, das Polargebilde zweier projektiven Punktreihen wieder zwei projektive Punktreihen. Liegen die ersten beiden Punktreihen involutorisch, bilden sie also eine binäre Form 2. Ordnung R^2, so bilden, wie wir sofort zeigen wollen, die polaren Puuktreihen eine nene binäre Form S^2. Ist nämlich (a, b) ein Paar von R^2, entspricht also in den beiden Punktreihen, aus denen R^2 besteht, dem Punkte a derselbe Punkt b der jedesmaligen anderen Punktreihe, sind ferner a' und b' die Polaren von a und b für A^2, so entspricht ebenso in den polaren Punktreihen in beiderlei Sinuc dem Punkte a' der Punkt b'. Also:

2. *Das Polargebilde einer binären Form 2. Ordnung R^2 für eine Form A^2 ist eine dritte Form S^2.*

Im allgemeinen ist das Polargebilde einer Form R^2 eine neue Form S^2. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn R^2 zu A^2 konjugiert ist. Ist nämlich wie oben X^2 eine konjugierte Form von A^2, A^2 durch die Paare (a, b), (x, y) nnd X^2 durch die Paare (a, x), (b, y) bestimmt, so ist das Polargebilde von (a, x) für A^2 das Paar (b, y) und das Polargebilde von (b, y) das Paar (a, x); diese Paare (b, y) nnd (a, x) bestimmen aber dieselbe Form X^2. Also:

3. *Sucht man zu einer Form X^2, welche zu A^2 konjugiert ist, für A^2 das Polargebilde, so erhält man X^2 selbst.*

Sucht man zu den Punkten der Geraden für zwei Formen A^2 und X^2 die Polaren, so erhält man zwei projektive Punktreihen; diese liegen involutorisch, sobald A^2 nnd X^2 konjugiert sind. Es sind nämlich in diesem Falle die Polaren

1) **Rosanes**, Über ein Prinzip der Zuordnung algebraischer Formen. Crelle Bd. 76. Vergl. **Reye**, Crelle 78, und F. **Meyer**, Apolarität und rationale Kurven.

Digitized by Google

von a die Punkte b und x,
„ b „ „ a „ y,
„ x „ „ y „ a,
„ y „ „ x „ b.

Es entspricht also in den beiden neuen Punktreihen dem Punkte a in beiderlei Sinne derselbe Punkt y, ebenso dem Punkte b der Punkt x, womit die Behauptung erwiesen ist. Also:

4. *Die Polaren der Punkte der Geraden für zwei konjugierte Formen bilden zwei involutorisch liegende Punktreihen, eine neue binäre Form 2. Ordnung.*

Nennt man die auf diese Weise durch A^2 und X^2 bestimmte neue Form Y^2, so ist

A^2 bestimmt durch die Paare (a, b) und (x, y),
X^2 „ „ „ „ (a, x) „ (b, y),
Y^2 „ „ „ „ (a, y) „ (b, x).

Die Anordnung der Paare zeigt, daß auch Y^2 zu A^2 und X^2 konjugiert ist. Also:

5. *Sucht man zu den Punkten der Geraden für zwei konjugierte Formen A^2 und X^2 die Polaren, so erhält man die Paare von Pol und Polare für eine Form Y^2, die zu A^2 und zu X^2 konjugiert ist, so daß also jede der drei Formen A^2, X^2, Y^2 zu den beiden anderen konjugiert ist.*

Die Punkte a, b, x, y sind für A^2, X^2, Y^2 nicht von spezieller Bedeutung. Ist nämlich (r, s) ein beliebiges Paar von Pol und Polare für X^2, und sind u und v die Polaren von r und s für A^2, so sind, da X^2 für A^2 sein eigenes Polargebilde ist,

(r, u) und (s, v) Paare von A^2,
(r, s) „ (u, v) „ „ X^2.

Ferner bilden nach 4. die Punkte s und u, die Polaren von r für A^2 und X^2, ein Paar von Y^2, ebenso r und v, die Polaren von s. Also:

6. *Sucht man zu einem Punkte r die Polare u für A^2, zu u die Polare v für X^2, zu v die Polare für Y^2, so fällt letztere wieder mit r zusammen, wenn A^2, X^2, Y^2 drei zu einander konjugierte Formen sind.*

7. *Sucht man für drei zu einander konjugierte Formen A^2, X^2, Y^2 zu einem beliebigen Punkte r die Polaren u, s, v, so sind* (r, u), (s, v) *Paare von A^2,* (r, s), (u, v) *Paare von X^2 und* (r, v), (s, u) *Paare von Y^2.*

Somit gehören zu den drei konjugierten Formen unendlich viele in dieser eigentümlichen Weise verkettete Quadrupel von Punkten;

jeder Punkt der Geraden gehört einem solchen Quadrupel an; eins dieser Quadrupel genügt zur Bestimmung der drei konjugierten Formen.[1])

Besitzt eine Form X^2, die zu A^2 konjugiert ist, in r ein Ordnungselement, ist also (r, r) ein Paar von X^2, so muß (s, s), die Polare von (r, r) für A^2, auch ein Paar von X^2 sein, da X^2 für A^2 sein eigenes Polargebilde ist, mithin muß (s, s) das zweite Ordnungselement von X^2 sein. Also:

8. *Die Ordnungselemente einer Form X^2 bilden ein Paar von Pol und Polare für jede zu X^2 konjugierte Form.*

9. *Ist X^2 eine parabolische Form mit dem Doppelordnungselement x, so ist x ein Ordnungselement jeder zu X^2 konjugierten Form.*

Denn sind (x, r) und (x, s) Paare von X^2, so sind (x, x) und (r, s) Paare der konjugierten Form.

Tripel konjugierter Formen treten öfters bei geometrischen Untersuchungen auf. Z. B. führt die Aufgabe: „Zwei gegebene binäre Formen 2. Ordnung polar in einander zu transformieren", auf ein solches System.[2])

3. *Das Büschel der zu einer Form 2. Ordnung konjugierten Formen 2. Ordnung.* — Zu einer Form A^2 gibt es unendlich viele konjugierte Formen. Halten wir nämlich von den in Nr. 2 willkürlich gewählten Elementen a und x zunächst a und damit auch b fest, während wir x und damit auch y variieren lassen, so liefert jeder Punkt x der Geraden eine neue Form 2. Ordnung; denn die Form X^2, welche durch (a, x) und (b, y) bestimmt ist, ändert sich, sobald a festgehalten wird und x sich ändert.

Es fragt sich nun weiter, ob wir noch mehr zu A^2 konjugierte Formen erhalten, wenn wir auch noch a seine Lage ändern lassen. Es zeigt sich, daß dies nicht der Fall ist.

Denn wählen wir statt a einen beliebigen anderen Punkt p als Ausgangspunkt, so gelangen wir von p aus auch zu der Form X^2, zu der wir von a aus gelangt waren. Ist nämlich q die Polare von p für A^2, u die Polare von p und v die Polare von q für die früher erhaltene Form X^2, so ist (u, v) ein Paar von A^2, da A^2 für X^2 sein eigenes Polargebilde ist. Aus den Paaren (p, q) und (u, v) erhält man aber auch die Form X^2 durch die Zuordnung (p, u) und (q, v). Erhält man so von p aus alle Formen, die man von a aus erhält, so erhält man auch von a aus alle Formen, die man von p aus erhält; die konjugierten Formen einer Form A^2 bilden also eine *einfache Mannigfaltigkeit.* Die

1) Vergl. Schroeter, Kegelschnitte, S. 56.

2) Thieme in Schlömilchs Ztschft. f. Math. u. Phys. 1877.

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Gesamtheit der zu einer binären Form 2. Ordnung konjugierten Formen nennt man *ein Büschel von binären Formen 2. Ordnung.*

Ein Büschel bilden z. B. alle Formen, die ein gemeinsames Paar von Pol und Polare haben; dies Paar bildet die Ordnungselemente der konjugierten Form. Im besonderen bilden ein Büschel alle Formen, welche ein gemeinsames Ordnungselement haben; die konjugierte Form ist die parabolische Form, welche den gemeinsamen Punkt zum Doppelordnungspunkt hat.

Aus unserer Konstruktion des Büschels folgen sofort einige weitere Eigenschaften. Wir haben X^2 durch die Paare (a, x) und (b, y) bestimmt und haben dann x variieren lassen; dabei beschreiben x und y projektive Punktreihen, da y stets die Polare von x für A^2 ist. Also gilt der Satz:

1. *Die Polaren der Punkte a und b für die Formen eines Büschels bilden zwei projektive Punktreihen.*

Auch die Polaren eines beliebigen Punktes r bilden mit den Polaren des Punktes a eine projektive Punktreihe. Ist nämlich u die Polare von r für X^2, sind also (a, x), (b, y), (r, u) Paare von X^2, so behaupten wir, daß u eine mit x und y projektive Punktreihe beschreibt, wenn X^2 das Büschel durchläuft.

Zum Beweise lege man durch die Gerade, welche Träger der binären Gebilde ist, eine Ebene und in dieser durch a, b und r Geraden; es mögen dann die Geraden durch a und b sich in m, durch a und r in n, durch b und r in o schneiden. Da (a, x), (b, y), (r, u) Paare einer Involution sind, so gehen nach den bekannten Eigenschaften des vollständigen Vierseits die Geraden xo, yn, um durch einen Punkt, er heiße z. Durchläuft x die Punktreihe, so beschreiben ox und ny projektive Büschel. Diese erzeugen einen Kegelschnitt, der zunächst durch die Büschelscheitel o und n, dann aber auch durch m geht, weil ob und na entsprechende Strahlen der beiden Büschel sind. Dann ist aber auch das Büschel der Strahlen, welche m mit den Punkten z des Kegelschnitts verbinden, zu den Büscheln mit den Scheiteln o und n projektiv. Diese Strahlen durch m treffen den Träger der binären Gebilde aber gerade in den Punkten u, den Polaren von r für die Formen X^2; d. h. die Punkte x, y, u beschreiben projektive Punktreihen. Daraus folgt dann unmittelbar:

2. *Die Polaren zweier beliebigen Punkte der Geraden für die Elemente eines Büschels von Formen 2. Ordnung bilden zwei projektive Punktreihen.*

Ist A^2 hyperbolisch, so gibt es in dem Büschel konjugierter Formen zwei parabolische; jeder Ordnungspunkt von A^2 ist Doppelordnungspunkt

Digitized by Google

einer solchen Form. Ist A^2 selbst parabolisch, so ist sie ihre eigene konjugierte parabolische Form. Eine elliptische Form besitzt unter ihren konjugierten Formen keine parabolische.

Hat das Büschel zwei parabolische Formen P^2 und Q^2 mit den Doppelpunkten p und q, und sind X^2 und Y^2 zwei Formen des Büschels, die zu einander konjugiert sind, so läßt sich zeigen, daß die Polaren eines beliebigen Punktes für X^2 und Y^2 mit p und q harmonisch liegen. Ist nämlich x die Polare von a für X^2, y die Polare von a für Y^2, so ist b, die Polare von a für A^2, nach 2, 5 gleichzeitig die Polare von x für Y^2 und von y für X^2. Die Polaren

von a für P^2, Q^2, X^2, Y^2 sind demnach p, q, x, y,
„ b „ „ „ „ „ „ „ p, q, y, x.

Es müssen also nach 3, 2 die Doppelverhältnisse $(pqxy)$ und $(pqyx)$ gleich sein. Das ist aber nur möglich, wenn die vier Punkte harmonisch sind. Also:

3. *Besitzt das Büschel von Formen, die zu einer Form A^2 konjugiert sind, zwei parabolische Formen, so trennen diese jedes Paar in dem Büschel enthaltener konjugierten Formen harmonisch.*

4. *Die konjugierte Form zweier Formen 2. Ordnung. Das durch zwei Formen bestimmte Büschel.* — Jetzt seien zwei beliebige Polarsysteme A^2 und B^2 gegeben. Die konjugierten Formen von A^2 bilden nach 3 ein Büschel, ebenso die konjugierten Formen von B^2. Es fragt sich, ob diese beiden Büschel gemeinsame Formen haben.

Ist zu einem Punkte a für A^2 die Polare b, für B^2 die Polare c und ebenso zu x für A^2 die Polare y, für B^2 die Polare z, so bestimmen die Paare

(a, x), (b, y) eine zu A^2 konjugierte Form,
(a, x), (c, z) „ „ B^2 „ „ .

Die beiden Büschel konjugierter Formen werden so oft eine Form gemeinsam haben, als die drei Paare (a, x), (b, y), (c, z) derselben Involution angehören.

Um diese Frage zu entscheiden, benutzen wir wieder die Eigenschaften des vollständigen Vierecks. Wir legen durch a, b, c drei sich schneidende Geraden, und es mögen sich die Geraden durch a und b in m, die durch a und c in n und die durch b und c in o schneiden; ferner verbinden wir o mit x, n mit y, m mit z. Durchläuft x den Träger der binären Gebilde, so beschreiben y und z projektive Punktreihen, die Verbindungslinien mit o, n, m projektive Strahlenbüschel. Je zwei der Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, und diese drei Kegelschnitte gehen durch m, n, o. Z. B. geht der Kegelschnitt, welcher

das Erzeugnis der Büschel mit den Scheiteln n und o ist, außer durch diese Scheitel auch durch m; denn wenn x nach b rückt, geht y nach a, also sind ob und na entsprechende Strahlen beider Büschel, und diese schneiden sich nach Voraussetzung in m. Je zwei dieser Kegelschnitte treffen sich also noch in einem vierten Punkte, und dieser ist zugleich gemeinsamer Punkt aller drei Kegelschnitte; denn wenn y und z in den projektiven Punktreihen demselben Punkte x zugehören, so sind sie auch einander entsprechende Punkte. Es gibt daher stets einen und nur einen Punkt x derart, daß (a, x), (b, y), (c, z) derselben Involution angehören. Also:

1. *Es gibt eine binäre Form 2. Ordnung — sie sei mit J^2 bezeichnet —, welche zu zwei Formen A^2 und B^2 konjugiert ist.*

Man nennt J^2 die *Jacobische Kovariante* von A^2 und B^2.

J^2 kann man, wenn A^2 und B^2 gegeben sind, direkt herstellen. Hat ein Punkt a_1 für A^2 die Polare a_2, für B^2 die Polare b_2, ferner b_2 für A^2 die Polare b_1 und a_2 für B^2 die Polare c_1, und ist i_1 der zu a_1 harmonische zugeordnete Punkt für das Paar b_1, c_1, so bilden die Paare a_1, i_1 eine Involution, wenn a_1 die Gerade durchläuft.[1]) Es läßt sich nun zeigen, daß i_1 die Polare von a_1 für J^2 ist. Ist c_2 der Pol von c_1 für A^2, so durchläuft c_1 eine mit c_2 projektive Punktreihe, wenn beide sich bewegen. Man erhält deshalb ein Paar von Pol und Polare der Form A^2, wenn man zu a_1 für b_1, c_1 einerseits und zu a_2 für b_2, c_2 (die Polaren von a_1, b_1, c_1 für A^2 sind) andererseits den 4. harmonischen Punkt (bezw. i_1 und i_2) sucht. Es entsteht nun aber i_2 aus a_2 in derselben Weise wie i_1 aus a_1; man hat nämlich zu a_2 für A^2 die Polare a_1, für B^2 die Polare c_1, ferner zu a_1 für B^2 die Polare b_2 und zu c_1 für A^2 die Polare c_2 zu suchen und dann zu a_2 den zugeordneten harmonischen Punkt i_2 für das Paar b_2, c_2. Sind aber i_1 und i_2 ein Paar von Pol und Polare von A^2, so ist auch die durch die Paare (a_1, i_1), (a_2, i_2) bestimmte Form J^2 der Form A^2, welche durch die Paare (a_1, a_2), (i_1, i_2) bestimmt ist, konjugiert (2). Ebenso läßt sich zeigen, daß J^2 der Form B^2 konjugiert ist.

Durch J^2 ist nach 3 ein Büschel von Formen bestimmt, die zu J^2 konjugiert sind. Also gilt der Satz:

2. *Ein Büschel von Formen 2. Ordnung ist durch zwei seiner Elemente A^2 und B^2 bestimmt.*

Ein solches Büschel möge mit (A^2, B^2) bezeichnet werden.

3. *Ist eine Form J^2 zu zwei Formen A^2 und B^2 konjugiert, so ist sie zu sämtlichen Formen des Büschels (A^2, B^2) konjugiert.*

1) Schroeter, Oberflächen 2. Grades, § 4.

4. *Eine einzelne Form eines Büschels (A^2, B^2) ist bestimmt, wenn man von ihr einen Pol und die zugehörige Polare kennt.*

Diese Form muß nämlich einerseits zur Jacobischen Kovariante des Büschels konjugiert sein, andererseits zu der Form 2. Ordnung, welche den Pol und die Polare zu Ordnungselementen hat, und zu zwei Formen 2. Ordnung gibt es nach **4**, 1 nur eine konjugierte Form.

Nach **3**, 2 bilden die Polaren zweier Punkte für die Formen eines Büschels zwei projektive Punktreihen; außerdem ist nach **4**, 4 die einzelne Form des Büschels bestimmt, wenn man zu einem Punkte die Polare kennt. Diese Tatsachen geben die Möglichkeit, ein Büschel von Formen 2. Ordnung auf eine Punktreihe oder ein anderes Büschel von Formen 2. Ordnung projektiv zu beziehen.

5. *Man nennt ein Büschel von Formen 2. Ordnung zu einer Punktreihe projektiv, wenn die Punktreihe zu der Punktreihe der Polaren eines Punktes für die Formen des Büschels projektiv ist.*

6. *Man nennt zwei Büschel von Formen 2. Ordnung projektiv zu einander, wenn sie zu projektiven Punktreihen projektiv sind.*

In **3** ist nachgewiesen worden, daß die konjugierten Formen einer Form mit Doppelordnungspunkt sämtlich diesen Punkt als Ordnungspunkt haben, und daß jede Form, welche in jenem Punkte einen Ordnungspunkt besitzt, der Doppelform konjugiert ist. Also:

7. *Die sämtlichen Formen 2. Ordnung, welche einen gemeinsamen Ordnungspunkt haben, bilden ein Büschel.*

Weiter gilt der Satz:

8. *Die Punktreihe der zweiten Ordnungspunkte eines Büschels von Formen mit gemeinsamem Ordnungspunkte ist dem Büschel projektiv.*

Ist nämlich a der gemeinsame Ordnungspunkt, sind b, c, d zweite Ordnungspunkte und x ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist zu zeigen, daß die harmonischen Punkte zu x für die Paare (a, a), (a, b), (a, c), (a, d) mit a, b, c, d eine projektive Reihe bilden. Zum Beweise verbinden wir einen beliebigen Punkt o mit a, b, c, d und schneiden dies Büschel von x aus durch eine Gerade in a', b', c', d'. Man erhält nun den harmonischen Punkt zu x für (a, b), wenn man a mit b' und b mit a' verbindet, den Schnittpunkt der Verbindungslinien wieder mit o verbindet und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinien mit dem Träger der binären Gebilde aufsucht. Beschreibt b die Gerade, so beschreiben ab' und ba' projektive Büschel mit den Scheiteln a und a'. Diese Büschel haben perspektive Lage; rückt nämlich b nach a, so fallen ab' und $a'b$ in aa' zusammen. Der Schnittpunkt von ab' und $a'b$ beschreibt also eine mit b projektive Punktreihe, ebenso dann

die Verbindungslinie von o mit diesem Schnittpunkte ein projektives Strahlenbüschel.

Da die Elemente des Büschels von Formen 2. Ordnung sich projektiv auf die Punkte einer Geraden beziehen lassen, so läßt sich die ganze Geometrie der Geraden auf das Büschel übertragen. Es lassen sich zwischen den Elementen des Büschels wieder projektive Beziehungen herstellen, insbesondere auch involntorische Beziehungen. Zn einer involutorischen Beziehung führt der Begriff konjugierter Formen von selbst.

9. *Die Paare von Formen eines Büschels* (A^2, B^2), *die zu einander konjugiert sind, bilden eine Involution.*

Es folgt dies unmittelbar aus der Bestimmnng konjugierter Formen, wie sie in **2** gegeben ist. Sind (a, b) und (x, y) Paare einer Form, so sind durch die Paare (a, x), (b, y) und (a, y), (b, x) zwei einander konjngierte Formen X^2 und Y^2 des zur gegebenen Form konjugierten Büschels bestimmt. Läßt man x die Gerade durchlaufen, so beschreibt y eine projektive Punktreihe, die zur Reihe der Punkte x involutorisch liegt. Demgemäß ist auch die Reihe der Formen Y^2 zur Reihe der Formen X^2 projektiv und befindet sich ebenso mit ihr in involutorischer Beziehung. Vergl. **3**, 3.

10. *Zwei beliebige Büschel* (R^2, S^2) *und* (U^2, V^2) *haben stets eine Form gemeinsam.*

Ist nämlich A^2 die Jacobische Kovariante von (R^2, S^2), B^2 die Jacobische Kovariante von (U^2, V^2), so gibt es nach **4**, 1 eine Form J^2, welche sowohl zu A^2 als anch zu B^2 konjugiert ist, also sowohl dem Büschel (R^2, S^2) als auch dem Büschel (U^2, V^2) angehört.

5. *Das Bündel der binären Formen 2. Ordnung.* — Jetzt seien drei binäre Formen 2. Ordnung A^2, B^2 und C^2 gegeben. Man konstruiere aus A^2 nnd B^2 das Büschel (A^2, B^2) und verbinde jede Form X^2 aus (A^2, B^2) mit C^2 zu einem Büschel (X^2, C^2). Die Gesamtheit der Formen, welche man auf diese Weise erhält, nennt man das Bündel (A^2, B^2, C^2). Zn diesem Bündel gehören alle Formen 2. Ordnung, die es überhanpt gibt. Ist nämlich Z^2 irgend eine unabhängig von A^2, B^2, C^2 gegebene Form, so bestimmt sie mit C^2 ein Büschel (C^2, Z^2); (C^2, Z^2) hat aber nach **4**, 10 mit (A^2, B^2) eine Form gemeinsam, also läßt sich Z^2 auch aus C^2 und (A^2, B^2) ableiten, gehört mithin auch zu dem Bündel (A^2, B^2, C^2).

Die binären Formen 2. Ordnung bilden demnach eine lineare zweifach-unendliche Mannigfaltigkeit wie die Punkte einer Ebene. *Die projektive Geometrie der Punkte einer Ebene läßt sich daher ohne weiteres auf das Gebiet der Formen 2. Ordnung übertragen.* Ersichtlicherweise

Digitized by Google

entspricht dabei einem Punkte eine binäre Form 2. Ordnung, einer Geraden ein Büschel von Formen 2. Ordnnng, einem Geradenbüschel ein Büschel von Büscheln, d. h. die Gesamtheit der Büschel, die eine gemeinsame Form haben, usw.

In 4, 6 haben wir schon angegeben, wann zwei Büschel projektiv zu nennen sind. Fassen wir das Bündel von Formen 2. Ordnung als Analogon der Ebene auf, so würden zwei Büschel als projektiv zu bezeichnen sein, die zu einander perspektiv sind, deren Elemente durch ein Büschel von Büscheln auf einander bezogen werden. Es fragt sich nun, ob die beiden Definitionen mit einander im Einklang stehen. Wie die nachfolgende Untersuchung zeigt, ist diese Frage zn bejahen.

Es sei (A^2, B^2) ein Büschel, Z^2 eine Form außerhalb (A^2, B^2). Dann bilden (Z^2, A^2), (Z^2, B^2) usw. ein Büschel von Büscheln. Jedes dieser Büschel besitzt eine konjugierte Form A'^2, B'^2 usw. Diese konjugierten Formen bilden wieder ein Büschel, weil sie sämtlich zu Z^2 konjugiert sind. Es läßt sich zunächst zeigen, daß $(A^2, B^2) \hat{=} (A'^2, B'^2)$ ist im Sinne von 4.

Ist nämlich zn einem Punkte p für Z^2 die Polare z,
„ dem „ p „ A^2 „ „ a,
„ „ „ a „ Z^2 „ „ b,
„ „ „ z „ A^2 „ „ c,

so ist der harmonische q zu p für das Paar (b, c) nach 4 der Pol von p für A'^2. Durchläuft A^2 das Büschel (A^2, B^2), so beschreibt a und damit auch b und c je eine zu (A^2, B^2) projektive Pnnktreihe. Es läßt sich zeigen, daß auch q eine zu (A^2, B^2) projektive Punktreihe durchlänft.

Zieht man dnrch p eine Gerade und verbindet einen Punkt m dieser Geraden mit b, einen anderen Punkt r dieser Geraden mit c, so erhält man q, wenn man zu p für (m, r) den harmonischen Punkt sucht und diesen mit dem Schnittpunkte von mb und rc verbindet. Der Punkt q beschreibt mit b und c eine projektive Punktreihe, wenn die Strahlenbüschel mit den Scheiteln m und r perspektiv liegen, ihr Erzeugnis also eine Gerade ist. Dies ist aber der Fall.

Lassen wir A^2 in (A^2, B^2) wandern, so wandert a und damit auch b. Fällt b mit p zusammen, so ist a mit z identisch, also sind a und p Paare von Pol und Polare von A^2 und Z^2; dann ist auch c mit p identisch. Also haben die Punktreihen, die von b und c beschrieben werden, den Punkt p gemeinsam, ebenso die Büschel mit den Scheiteln m und r den Strahl mrp, infolgedessen ist ihr Erzeugnis eine Gerade.

Digitized by Google

Die Punkte q beschreiben mithin eine zu (A^2, B^2) projektive Punktreihe. Das Büschel (A'^2, B'^2) ist aber der Definition gemäß zu der Reihe seiner Polaren für einen beliebigen Punkt p projektiv, mithin ist $(A^2, B^2) \barwedge (A'^2, B'^2)$. Darans folgt unmittelbar der Satz:

2. *Verbindet man eine beliebige Form* Z^2 *mit den Formen eines Büschels* (A^2, B^2) *zu Büscheln und konstruiert zu jedem Büschel* (Z^2, A^2), (Z^2, B^2) *usw. die konjugierte Form* A'^2, B'^2, *so ist das Büschel* (A'^2, B'^2) *der konjugierten Formen zu* (A^2, B^2) *projektiv.*

3. *Zwei Büschel von binären Formen werden durch ein Büschel von Büscheln projektiv auf einander bezogen.*

Denn beide Büschel sind dem Büschel von Formen, die dem Büschel von Büscheln konjugiert sind, projektiv.

4. *Zwei Büschel von Büscheln nennt man projektiv, wenn die Büschel ihrer konjugierten Formen projektiv sind.*

Ans 2. und 4. folgt dann weiter:

5. *Verbindet man zwei Formen* Z^2 *und* U^2 *mit den Formen eines Büschels* (A^2, B^2) *zu Büscheln, so erhält man zwei projektive Büschel von Büscheln.*

Die Sätze 2. bis 5. bieten die Möglichkeit, die projektive Geometrie der Ebene auf das Gebiet der binären Formen 2. Ordnung zu übertragen. Wir wollen hier die abgeleiteten Eigenschaften nur znr Untersuchung der Doppelformen 2. Ordnung benntzen.

Die konjugierten Formen einer Form A^2 bilden ein Büschel (B^2, C^2). Durchläuft A^2 ein Büschel (A^2, Z^2), so beschreibt (B^2, C^2) ein projektives Büschel von Büscheln. Es besteht also zwischen den Formen 2. Ordnung und ihrem konjngierten Büschel eine *reziproke Verwandtschaft.* Diese Verwandtschaft ist außerdem *involutorisch.* Ist nämlich die gemeinsame Form von (A^2, Z^2) und (B^2, C^2) eine Form U^2, so ist U^2 auch eine konjugierte Form von A^2; daher enthält umgekehrt das Büschel von Formen, die zn U^2 konjugiert sind, anch A^2. Die Formen 2. Ordnung sind also auf die Büschel konjugierter Formen projektiv und so bezogen, daß jedes Büschel von Formen mit dem Büschel von Büscheln konjugierter Formen involutorisch liegt. Die reziproke Beziehnng ist also *ein ternäres Polarsystem 2. Ordnung* (Polarsystem einer Knrve 2. Grades oder eines Kegelschnitts).

Was stellt nun die Ordnungskurve des Polarsystems dar, die Gesamtheit der Formen, die sich selbst konjugiert sind?

Eine Form 2. Ordnung ist sich selbst konjugiert, wenn sie zusammenfallende Ordnungselemente besitzt, wenn sie parabolisch ist 2, 9. Also:

6. *Die Gesamtheit der Formen 2. Ordnung mit zusammenfallenden Ordnungselementen bildet eine einfache quadratische Mannigfaltigkeit (Kurve 2. Ordnung).*

Tangenten dieser Kurve 2. Ordnung sind die Büschel von Formen 2. Ordnung, die einen gemeinsamen Ordnungspunkt haben.

Die Kurve läßt sich auch leicht als Erzeugnis zweier projektiven Büschel von Büscheln nachweisen.

Ein Punkt a als erster Ordnungspunkt bestimmt mit sämtlichen Punkten der Geraden als zweiten Ordnungspunkten ein Büschel von Formen; ebenso bestimmt ein Punkt b ein zweites Büschel und zwar nach **4**, 8 ein projektives. Zu einer Form mit den Doppelelementen a und x gibt es ein konjugiertes Büschel, ebenso zu der Form mit den Doppelelementen b und x. Ordnen wir diese Büschel einander zu, so erhalten wir, wenn x die Gerade durchläuft, zwei projektive Büschel von Büscheln. Ihr Erzeugnis ist die Kurve der Formen mit Doppelordnungselementen. Das gemeinsame Element (Schnittpunkt) der Büschel, die zu (a, x) und (b, x) konjugiert sind, ist die Form, welche den Punkt x zum Doppelordnungselement besitzt.

Der Beweis, daß die Formen mit Doppelordnungselementen eine Kurve 2. Ordnung bilden, läßt sich noch in anderer Weise führen, nämlich in genauer Anlehnung an den Nachweis bei ebenen Polarsystemen, wie ihn Schroeter in seinen Kegelschnitten § 57 führt.

Die Lehre von den binären Formen 2. Ordnung hat danach ihr Spiegelbild in der Kegelschnittslehre. Jedem Satze über Kegelschnitte entspricht ein Satz über binäre Formen 2. Ordnung. Insbesondere entspricht der Polarentheorie des Kegelschnitts die Lehre von den konjugierten Formen 2. Ordnung. Einem konjugierten Dreieck des Kegelschnitts entsprechen drei Formen, von denen jede den beiden anderen konjugiert ist, wie wir sie in **2**, 5 kennen gelernt haben.

Posen, im Juli 1903.

Über Beziehungen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihren ersten Ableitungen.

Von Georg Wallenberg in Charlottenburg.

Herr Koenigsberger hat (Math. Ann. **30**, 299—300) den Satz bewiesen: „Die einzige algebraische Beziehung, welche zwischen den Integralen und deren ersten Ableitungen einer irreduktiblen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(A) $$y'' + Py' + Qy = 0$$

mit algebraischen Koeffizienten bestehen kann, ist die bekannte Relation

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = ce^{-\int P dz},$$

falls P die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion ist". Dabei faßt Herr Koenigsberger den Begriff der Irreduktibilität so, daß kein Integral von (A) einer Differentialgleichung erster (oder nullter) Ordnung mit algebraischen Koeffizienten genügen soll.

Wir stellen uns in der folgenden Untersuchung von vorn herein auf einen anderen Standpunkt, indem wir als Rationalitätsbereich den der eindeutigen Funktionen wählen und daher den Begriff der Irreduktibilität im Sinne von Frobenius so fassen, daß kein Integral von (A) einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit eindeutigen Koeffizienten genügen soll, im übrigen aber auch die Reduktibilität der vorgelegten Differentialgleichung zulassen. Die Wahl des Rationalitätsbereiches hängt eben von dem Zweck der Untersuchung ab: Herrn Koenigsberger kommt es darauf an, die algebraischen Beziehungen zwischen gewissen transzendenten Funktionen zu eruieren, uns dagegen, *die Art der Vieldeutigkeit der Integrale aus gewissen zwischen ihnen und ihren Ableitungen bestehenden Beziehungen zu ermitteln;* er mußte daher die algebraischen, wir die eindeutigen Funktionen dem Rationalitätsbereiche zugrunde legen.

1. Wir gehen aus von der homogenen linearen Differentialgleichung

(A) $$y'' + Py' + Qy = 0,$$

worin P und Q eindeutige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen z sind. Zwischen zwei Fundamentalintegralen y_1 und y_2 besteht die bekannte Relation

(1) $$y_1 y_2' - y_1' y_2 = ce^{-\int P dz}.$$

Digitized by Google

Wir wollen nun voraussetzen, daß außerdem eine von (1) verschiedene Relation besteht:

$$\bar{a}_{0_0} y_1 y_2 + \bar{a}_{0_1} y_1 y_2' + \bar{a}_{1_0} y_1' y_2 + \bar{a}_{1_1} y_1' y_2' = 0^{1)}, \tag{2}$$

worin die Koeffizienten $\bar{a}_{0_0}, \dots \bar{a}_{1_1}$ ebenfalls eindeutige Funktionen von z sind. Die Differentialgleichung (A) läßt sich durch die Transformation

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P dz} u \tag{3}$$

auf die Form bringen

$$u'' = q u, \tag{B}$$

worin auch $q = \frac{1}{2} P' + \frac{1}{4} P^2 - Q$ eine eindeutige Funktion von z ist. Zwischen den entsprechenden Fundamentalintegralen u_1 und u_2 besteht dann ebenfalls eine Relation

$$L \equiv a_{0_0} u_1 u_2 + a_{0_1} u_1 u_2' + a_{1_0} u_1' u_2 + a_{1_1} u_1' u_2' = 0 \tag{C}$$

mit eindeutigen Koeffizienten.[2])

Durch Differentiation erhält man aus (C) unter Berücksichtigung von (B):

$$L' \equiv b_{0_0} u_1 u_2 + b_{0_1} u_1 u_2' + b_{1_0} u_1' u_2 + b_{1_1} u_1' u_2' = 0, \tag{D}$$

worin

$$\begin{cases} b_{0_0} = a_{0_0}' + (a_{0_1} + a_{1_0}) q, & b_{1_1} = a_{0_1} + a_{1_0} + a_{1_1}', \\ b_{0_1} = a_{0_0} + a_{0_1}' + a_{1_1} q, & b_{1_0} = a_{0_0} + a_{1_0}' + a_{1_1} q \end{cases} \tag{4}$$

ist. Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem (D) von (C) unabhängig ist oder nicht.

Wir behandeln zuerst den weniger interessanten Fall, daß (C) und (D) von einander unabhängig sind. In diesem Falle erhalten wir aus

$$a_{0_0} + a_{0_1} \frac{u_2'}{u_2} + a_{1_0} \frac{u_1'}{u_1} + a_{1_1} \frac{u_1'}{u_1} \frac{u_2'}{u_2} = 0, \quad b_{0_0} + b_{0_1} \frac{u_2'}{u_2} + b_{1_0} \frac{u_1'}{u_1} + b_{1_1} \frac{u_1'}{u_1} \frac{u_2'}{u_2} = 0$$

quadratische Gleichungen für $\frac{u_1'}{u_1}$ und $\frac{u_2'}{u_2}$. Es sind nun wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden.

1. Fall: $a_{1_0} = a_{0_1}$, also auch $b_{1_0} = b_{0_1}$.

---

1) Der Fall, daß auf der rechten Seite von (2) nicht 0, sondern $a e^{-\int P dz}$ steht, worin a eine eindeutige Funktion von z bedeutet, kann mittels der Relation (1) sofort auf den oben behandelten Fall zurückgeführt werden.

2) Es ist $a_{0_0} = \bar{a}_{0_0} - \frac{P}{2}(\bar{a}_{0_1} + \bar{a}_{1_0}) + \frac{P^2}{4} \bar{a}_{1_1}$, $a_{0_1} = \bar{a}_{0_1} - \frac{P}{2} \bar{a}_{1_1}$, $a_{1_0} = \bar{a}_{1_0} - \frac{P}{2} \bar{a}_{1_1}$, $a_{1_1} = \bar{a}_{1_1}$.

Dann erhalten wir für $\frac{u_1'}{u_1}$ und $\frac{u_2'}{u_2}$ *dieselbe* quadratische Gleichung; es ergibt sich also:

$$\frac{u_1'}{u_1} = A + \sqrt{B}, \quad \frac{u_2'}{u_2} = A - \sqrt{B},$$

worin A und B eindeutige Funktionen von z sind. Bezeichnen wir zur Abkürzung $v' + v^2$ mit $[v]$, so wird

$$q = \frac{u_1''}{u_1} = \left[\frac{u_1'}{u_1}\right] = A' + \tfrac{1}{2}\frac{B'}{B}\sqrt{B} + A^2 + B + 2A\sqrt{B},$$

und, da q eine eindeutige Funktion von z ist: $A = -\frac{1}{4}\frac{B'}{B}$, also

$$q = -\tfrac{1}{4}\frac{B''}{B} + \tfrac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + B$$

und

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{B}} e^{\int\sqrt{B}dz}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{B}} e^{-\int\sqrt{B}dz}.$$

Es mag besonders hervorgehoben werden, daß die beiden Relationen (C) und (D), bei denen in der ersten ein Koeffizient *willkürlich* vorgeschrieben sein kann, nur zwischen den bis auf eine Konstante *bestimmten* Integralen u_1 nnd u_2 bestehen.

2. Fall: $a_{1_0} \neq a_{0_1}$.

Zunächst ergibt sich wieder

$$\frac{u_1'}{u_1} = -\tfrac{1}{4}\frac{B'}{B} + \sqrt{B}, \quad q = -\tfrac{1}{4}\frac{B''}{B} + \tfrac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + B;$$

ferner

$$\frac{u_2'}{u_2} = -\frac{a_{0_0} + a_{1_0}\frac{u_1'}{u_1}}{a_{0_1} + a_{1_1}\frac{u_1'}{u_1}} = C + D\sqrt{B},$$

worin C nnd D eindeutige Funktionen von z sind; also

$$q = \frac{u_2''}{u_2} = \left[\frac{u_2'}{u_2}\right] = C' + D'\sqrt{B} + \frac{D}{2}\frac{B'}{B}\sqrt{B} + C^2 + D^2B + 2CD\sqrt{B}$$

und daher

$$C = -\tfrac{1}{2}\frac{D'}{D} - \tfrac{1}{4}\frac{B'}{B}.$$

Aus

$$q = -\tfrac{1}{2}\frac{D''}{D} + \tfrac{3}{4}\left(\frac{D'}{D}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\frac{B''}{B} + \tfrac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\frac{D'}{D}\frac{B'}{B} + D^2B$$
$$= -\tfrac{1}{4}\frac{B''}{B} + \tfrac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + B$$

ergibt sich

$$B' - \left(2\frac{D''}{D'} - 3\frac{D'}{D}\right)B + \frac{4D(D^2-1)}{D'}B^2 = 0$$

oder, wenn $B = \frac{1}{v}$ gesetzt wird:

$$v' + \left(2\frac{D''}{D'} - 3\frac{D'}{D}\right)v - \frac{4D(D^2-1)}{D'} = 0,$$

folglich

$$B = \frac{1}{v} = \frac{D'^2}{4D^2(D^2+2cD+1)} \quad (c \text{ willkürliche Konstante}).$$

Wir erhalten daher

$$u_1 = \sqrt{\frac{2D}{D'}}\,\sqrt{D^2+2cD+1}\,e^{\frac{1}{2}\int\frac{D'dz}{D\sqrt{D^2+2cD+1}}}$$

oder (bis auf einen konstanten Faktor)

$$u_1 = \frac{\sqrt[4]{D^2+2cD+1}}{\sqrt{D'}}\sqrt{cD+1-\sqrt{D^2+2cD+1}}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt[4]{D^2+2cD+1}}{\sqrt{D'}}\sqrt{D+c+\sqrt{D^2+2cD+1}}.[1]$$

Wenn man q sowie die Größen $a_{0_0}, \ldots a_{1_1}$ als rationale Funktionen voraussetzt, so ist auch D eine rationale Funktion; in diesem Falle ist daher die Differentialgleichung (B) *algebraisch integrierbar*. — Die unter Fall 1. gemachte Schlußbemerkung greift auch hier Platz.

2. Wir kommen jetzt zu dem interessanteren Falle, wo die Relation (D) von (C) *nicht* unabhängig, d. h. identisch $L' = \lambda L$ oder

(5) $$b_{0_0} = \lambda a_{0_0}, \quad b_{0_1} = \lambda a_{0_1}, \quad b_{1_0} = \lambda a_{1_0}, \quad b_{1_1} = \lambda a_{1_1}$$

ist, worin die Größen $b_{0_0}, \ldots b_{1_1}$ die in (4) stehenden Werte haben und λ eine Funktion von z bedeutet. Auch hier sind wie in I zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $a_{0_1} - a_{1_0}$ von Null verschieden oder gleich Null ist.

1. Fall: $$a_{1_0} \neq a_{0_1}.$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) ergibt sich zunächst $\lambda = \frac{a'_{0_1} - a'_{1_0}}{a_{0_1} - a_{1_0}}$. Wir können nun hier durch Multiplikation mit einer dem Rationalitätsbereich angehörenden Größe bewirken, daß $\lambda = 0$ wird:

1) Ist $c = 1$, so wird (bis auf einen konstanten Faktor)

$$u_2 = \frac{D+1}{\sqrt{D'}}, \quad \bar{u}_1 = -u_2\int\frac{dz}{u_2^2} = \frac{1}{\sqrt{D'}}.$$

multiplizieren wir (C) mit einer noch zu bestimmenden Größe μ, so erhalten wir $\mu L = 0$ und durch Differentiation unter Berücksichtigung von (B) $\mu L' + \mu' L = 0$ oder

$$(\mu \lambda + \mu')L = 0.$$

Wir haben also zu wählen $\mu' + \lambda\mu = 0$, d. h.

$$\mu = ce^{-\int \lambda dz} = \frac{c}{a_{1_0} - a_{0_1}},$$

worin c eine beliebige, aber feste von 0 verschiedene Konstante bedeutet. Multiplizieren wir daher die Relation (C) mit $\frac{c}{a_{1_0} - a_{0_1}}$ und bezeichnen die neuen Koeffizienten durch die entsprechenden großen lateinischen Buchstaben, so erhalten wir

$$\text{(E)} \qquad M \equiv A_{0_0} u_1 u_2 + A_{0_1} u_1 u_2' + A_{1_0} u_1' u_2 + A_{1_1} u_1' u_2' = 0$$

und daraus durch Differentiation unter Berücksichtigung von (B) eine Relation, deren Koeffizienten gleich 0 sind, d. h.

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} A_{0_0}' + (A_{0_1} + A_{1_0})q = 0, & A_{0_0} + A_{0_1}' + A_{1_1} q = 0, \\ A_{0_0} + A_{1_0}' + A_{1_1} q = 0, & A_{0_1} + A_{1_0} + A_{1_1}' = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Gleichungen (6) für *jedes* Integralpaar u_1, u_2 der Differentialgleichung (B)

$$\frac{dM}{dz} = 0, \quad \text{d. h.} \quad M = \text{const.},$$

also u. a. auch für $u_2 = u_1$:

$$A_{0_0} u_1^2 + (A_{0_1} + A_{1_0}) u_1 u_1' + A_{1_1} u_1'^2 = \text{const.}$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (6) ergibt sich nun, wie vorauszusehen, $A_{1_0}' - A_{0_1}' = 0$, also $A_{1_0} - A_{0_1} = c$; ferner aus der vierten Gleichung: $A_{1_1}' = -(2A_{0_1} + c)$; es muß daher A_{0_1} die Ableitung einer eindeutigen Funktion sein: $A_{0_1} = \varrho'$ (ϱ eine eindeutige Funktion von z) und $A_{1_1} = -2\varrho - cz - c_1$.

Aus den beiden ersten Gleichungen (6) ergibt sich dann

$$A_{0_0} = (2\varrho + cz + c_1)q - \varrho'',$$

$$A_{0_0}' = (2\varrho + cz + c_1)q' + (2\varrho' + c)q - \varrho''' = -(2\varrho' + c)q,$$

also zwischen ϱ und q die Differentialgleichung

$$\text{(7)} \qquad q'(2\varrho + cz + c_1) + 2q(2\varrho' + c) - \varrho''' = 0.$$

Diese Gleichung wird für *jedes* q erfüllt durch

$$\varrho = -\tfrac{1}{2}(cz + c_1),$$

Digitized by Google

also für

$$A_{0_0}=0,\quad A_{1_1}=0,\quad A_{0_1}=-\frac{c}{2},\quad A_{1_0}=\frac{c}{2};$$

das ergibt die bekannte Relation

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = \text{const.}$$

Aus der Gleichung (7) erhält man nun, wenn man sie als Differentialgleichung für q betrachtet:

$$q=\frac{c_2-c\varrho'-\varrho'^2+\varrho''(2\varrho+cz+c_1)}{(2\varrho+cz+c_1)^2}$$

oder

$$q=\left[\frac{\varrho'+\frac{c}{2}}{2\varrho+cz+c_1}\right]+\frac{\gamma^2}{(2\varrho+cz+c_1)^2},\quad \left(\gamma^2=c_2+\frac{c^2}{4}\right)$$

und, wenn man $2\varrho+cz+c_1=\sigma$ setzt:

$$q=\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}\right]+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}, \tag{8}$$

worin σ eine beliebige eindeutige Funktion von z ist.

Setzt man in der Differentialgleichung (B) $u=\sqrt{\sigma}\,v$, so erhält man

$$\frac{u''}{u}=\left[\frac{u'}{u}\right]=\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}\right]+\left[\frac{v'}{v}\right]+\frac{\sigma'}{\sigma}\cdot\frac{v'}{v}=\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}\right]+\frac{\gamma^2}{\sigma^2},$$

also für v die Differentialgleichung

$$v''+\frac{\sigma'}{\sigma}v'-\frac{\gamma^2}{\sigma^2}=0,$$

deren Integrale

$$v_1=e^{\gamma\int\frac{dz}{\sigma}},\quad v_2=e^{-\gamma\int\frac{dz}{\sigma}}$$

sind. Es ergibt sich daher

$$U_1=\sqrt{\sigma}e^{\gamma\int\frac{dz}{\sigma}},\quad U_2=\sqrt{\sigma}e^{-\gamma\int\frac{dz}{\sigma}}.$$

Ist $\gamma=0$, so wird $U_1=\sqrt{\sigma}$, $U_2=U_1\int\frac{dz}{U_1^2}=\sqrt{\sigma}\int\frac{dz}{\sigma}$.

Für die Koeffizienten von M ergeben sich unter Berücksichtigung von (8) folgende Werte:

$$A_{0_0}=\frac{\gamma^2}{\sigma}-\frac{1}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma},\quad A_{0_1}=\frac{\sigma'-c}{2},\quad A_{1_0}=\frac{\sigma'+c}{2},\quad A_{1_1}=-\sigma.$$

Es mag noch einmal besonders betont werden, daß hier zwischen zwei *beliebigen* Integralen

$$u_1=\alpha_{1_1}U_1+\alpha_{1_2}U_2,\quad u_2=\alpha_{2_1}U_1+\alpha_{2_2}U_2$$

die Relation $M = \text{const.}$ besteht, aus der dann mittels der Beziehung $u_1 u_2' - u_1' u_2 = \text{const.}$ stets eine Relation $M = 0$ abgeleitet werden kann. Wir haben also das Resultat:

Zwischen zwei ***beliebigen*** *Fundamentalintegralen u_1, u_2 der Differentialgleichung*

$$\frac{u''}{u} = \left[\frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}\right] + \frac{\gamma^2}{\sigma^2}$$

besteht eine Relation

$$M \equiv \left(\frac{\gamma^2}{\sigma} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma}\right) u_1 u_2 + \frac{\sigma' - c}{2} u_1 u_2' + \frac{\sigma' + c}{2} u_1' u_2 - \sigma u_1' u_2' = 0,$$

worin c eine passend gewählte Konstante bedeutet, welche von der Wahl der Integrale u_1, u_2 abhängt, aber für sämtliche Integrale $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, die aus u_1, u_2 durch Umläufe der Variablen z hervorgehen, invariant bleibt.[1])

Man kann die Gleichung (7) auch als Differentialgleichung dritter Ordnung für ϱ bez. σ auffassen:

$$\sigma''' - 4q\sigma' - 2q'\sigma = 0; \tag{7*}$$

die oben durch Auffassung von (7) als Differentialgleichung für q gewonnene Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} = q \tag{8}$$

stellt dann ein Integral erster Ordnung von (7*) dar.

Die Differentialinvariante $a' - b$ der Differentialgleichung

$$\sigma''' - 2a\sigma' - b\sigma = 0 \qquad (a = 2q,\ b = 2q') \tag{7*}$$

hat den Wert Null; ihr allgemeines Integral lautet daher bekanntlich[2])

$$\sigma = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2c_3 u_1 u_2,$$

worin u_1 und u_2 zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (B) bedeuten.[3]) Es muß also, da $A_{1_1} = -\sigma$ war, eine quadratische Form zweier

1) **Anmerkung:** Gleichzeitig nehmen die Ausdrücke

$$A_{0_0} u_k^2 + (A_{0_1} + A_{1_0}) u_k u_k' + A_{1_1} u_k'^2 \qquad (k = 1,\ 2)$$

sowie

$$A_{0_0} u_1 u_2 + A_{1_0} u_1 u_2' + A_{0_1} u_1' u_2 + A_{1_1} u_1' u_2' = M + (A_{1_0} - A_{0_1})(u_1 u_2' - u_1' u_2)$$

konstante Werte an, woraus man direkt erkennt, daß M auch einen konstanten Wert (also für ein passend gewähltes c den Wert 0) annimmt, wenn man u_1 und u_2 durch $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ und $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ ersetzt.

2) Vergl. z. B. des Verf. Arbeit: „Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten etc." Journ. f. die reine u. angew. Math. Bd. **113**, 14—15.

3) **Anmerkung:** Es ist unrichtig zu sagen (wie man es in einigen Abhandlungen ausgedrückt findet), daß (7*) diejenige Differentialgleichung sei, der die

Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (B) eine eindeutige Funktion von z sein; daraus ergeben sich aber leicht die Integrale derselben in der oben (S. 156) angegebenen Form; der Wert $\gamma = 0$ entspricht dem Fall, wo die quadratische Form σ ein vollständiges Quadrat ist.

Wir schreiben die Relation $M = 0$ in der Form:

$$\left(\frac{\gamma^2}{\sigma} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma}\right) u_1 u_2 + \frac{\sigma'}{2}(u_1 u_2' + u_1' u_2) - \sigma u_1' u_2' = \text{const.};$$

Quadrate eines jeden Integrals der Differentialgleichnng (B) genügen; deun setzt man in (7*) $\sigma = u^2$, so erhält man $u(u'' - qu)' + 3u'(u'' - qu) = 0$; der Gleichung (7*) genügen also die Quadrate der Integrale sämtlicher Differentialgleichungen $u'' = qu + \frac{\gamma^2}{u^3}$, wo γ eine beliebige Konstante bedentet; das allgemeine Integral der letzteren hat die Form

$$u = \sqrt{c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2},$$

worin u_1 und u_2 Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (B) und c_1, c_2 willkürliche Konstanten sind, während $c_3 = \sqrt{c_1 c_2 + \gamma^2}$ ist. — Dagegen kann man sagen: „Der Differentialgleichung (7*) genügen sämtliche Produkte je zweier beliebiger Integrale der Differentialgleichung (B).“ Es sei nämlich u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (B), dessen Determinante $u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1$ ist; dnrch dieses kann man sämtliche Integrale von (B) ausdrücken. Setzt man nnn

$$\sigma = (\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2)(\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2) \equiv \eta_1 \eta_2,$$

worin $\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 = 2\gamma$, so wird $\eta_1 \eta_2' - \eta_1' \eta_2 = (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1)(u_1 u_2' - u_1' u_2) = 2\gamma$, und man erhält

$$\frac{\eta_2'}{\eta_2} + \frac{\eta_1'}{\eta_1} = \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \frac{\eta_2'}{\eta_2} - \frac{\eta_1'}{\eta_1} = \frac{2\gamma}{\sigma},$$

also

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{2\gamma}{\sigma}\right), \quad \frac{\eta_2'}{\eta_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{2\gamma}{\sigma}\right);$$

ferner

$$\frac{\sigma''}{\sigma} = 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}\cdot\frac{\eta_2'}{\eta_2} + 2q = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - \frac{4\gamma^2}{\sigma^2}\right] + 2q$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} = q;$$

dies ist aber gerade die Gleichung (8). Das allgemeine Integral derselben lautet somit

$$\sigma = \gamma_1 \delta_1 u_1^2 + \gamma_2 \delta_2 u_2^2 + (\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) u_1 u_2,$$

worin γ_1, δ_1, γ_2, δ_2 beliebige der Bedingung $\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 = 2\gamma$ genügende Konstanten sind; setzt man $\gamma_1 \delta_1 = c_1$, $\gamma_2 \delta_2 = c_2$, so folgt

$$(\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1)^2 = (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1)^2 + 4\gamma_1 \delta_1 \gamma_2 \delta_2 = 4(c_1 c_2 + \gamma^2)$$

also

$$\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1 = 2\sqrt{c_1 c_2 + \gamma^2}.$$

dieselbe bleibt bestehen, wenn man statt u_1, u_2 allgemein $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ setzt; nur die Konstante rechts ändert sich entsprechend. Trägt man in die so verallgemeinerte Relation für σ seinen Wert $\sigma = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2$ ein, so erhält man eine algebraische Identität, welche, wie so häufig, als die wahre Grundlage der vorliegenden transzendenten Untersuchung betrachtet werden muß. Diese Identität läßt sich nun nachträglich leicht verifizieren; sie lautet:

$$\begin{aligned}
&\frac{(c_3^2 - c_1 c_2)(u_1 u_2' - u_2 u_1')^2 - (c_1 u_1 u_1' + c_2 u_2 u_2' + c_3 (u_1 u_2' + u_2 u_1'))^2}{c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2} (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2) \\
&+ (c_1 u_1 u_1' + c_2 u_2 u_2' + c_3 (u_1 u_2' + u_2 u_1'))((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2') + (\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)) \\
&- (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2)(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')(\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2') \\
&= (c_3(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - c_1 \alpha_2 \beta_2 - c_2 \alpha_1 \beta_1)(u_1 u_2' - u_2 u_1')^2 .
\end{aligned}$$

Diese rein algebraische Identität besteht für ganz beliebige Größen u_1, u_1', u_2, u_2', α_1, β_1, α_2, β_2, c_1, c_2, c_3. Betrachtet man u_1, u_2 als Funktionen einer Veränderlichen z, u_1' und u_2' als ihre Ableitungen und läßt u_1, u_2 der Bedingung genügen, daß ihre Determinante $u_1 u_2' - u_1' u_2$ eine Konstante ist (die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden kann) — und dies ist das eigentliche transzendente Element der Untersuchung — so erhält man, wenn man nun weiter u_1 und u_2 als Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auffaßt, die quadratische Form $c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2 = \sigma$ setzt und auf beiden Seiten eine passende Größe subtrahiert, in der Tat die Relation $M = 0$, und man sieht zugleich, in welcher Weise die dort auftretende Konstante c von der Wahl der Fundamentalintegrale, d. h. (da σ, also auch c_1, c_2 und c_3 als feste Größen zu betrachten sind) von α_1, α_2, β_1, β_2 abhängt. Insbesondere erkennt man, daß

$$c = 2 \frac{c_3(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - c_1 \alpha_2 \beta_2 - c_2 \alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

i. a. von Null verschieden ist, sodaß die Koeffizienten A_{0_1} und A_{1_0} in M, also auch a_{0_1} und a_{1_0} in L i. a. von einander verschieden sind, wie wir ursprünglich voraussetzten; nur für diejenigen Integrale, für welche $c_3(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - c_1 \alpha_2 \beta_2 - c_2 \alpha_1 \beta_1 = 0$ ist, sind A_{0_1} und A_{1_0} einander gleich: dieser Fall ist als Grenzfall zu betrachten und berührt sich mit dem Falle, den wir nunmehr untersuchen wollen.

2. Fall. $\qquad a_{0_1} = a_{1_0}.$

Dividiert man beide Seiten der Relation $(C) L = 0$ durch $a_{0_1} = a_{1_0}$ und bezeichnet wieder die neuen Koeffizienten mit den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben, so wird dieselbe:

(F) $\qquad N \equiv A_{0_0} u_1 u_2 + u_1 u_2' + u_1' u_2 + A_{1_1} u_1' u_2' = 0 .$

Da $A_{0_1} = A_{1_0} = 1$ ist, so lauten hier die Gleichungen (5):

$$(5^*) \qquad A'_{0_0} + 2q = \lambda A_{0_0}, \quad A_{0_0} + A_{1_1} q = \lambda, \quad 2 + A'_{1_1} = \lambda A_{1_1}.$$[1]

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man zunächst ans der zweiten derselben den Wert für λ in die beiden anderen einsetzt, sodann die erste differenziert und aus den dadurch sich ergebenden drei Gleichungen A_{1_1} und A'_{1_1} eliminiert:

$$(9) \quad A_{0_0} A''_{0_0} - 2 A'^2_{0_0} - \left(6q + \frac{q'}{q} A_{0_0}\right) A'_{0_0} - 4q^2 + 4q A^2_{0_0} + \frac{q'}{q} A^3_{0_0} = 0.$$

Diese Differentialgleichnng für A_{0_0} gehört zur Klasse der von mir (Journ. für die reine u. angew. Math. **121**, 210—217) behandelten Differentialgleichungen, welche ich in einer in demselben Journal demnächst erscheinenden Arbeit[2]) (vergl. C. R. **137** „Sur l'équation différentielle de Riccati du second ordre") als Riccatische Differentialgleichungen zweiter Ordnung im weiteren Sinne bezeichnet habe; sie geht zunächst, wenn man die l. c. p. 215—216 angegebene Methode anwendet, dnrch die Substitution $A_{0_0} = \frac{1}{\nu}$ über in:

$$(10) \qquad \nu'' - \left(\frac{q'}{q} = 6q\nu\right)\nu' - \frac{q'}{q} - 4q\nu + 4q^2\nu^3 = 0,$$

und diese Differentialgleichung wird durch die weitere Snbstitution

$$(11) \qquad \nu = -\frac{1}{2q}\frac{v'}{v}$$

transformiert in die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnnng

$$(12) \qquad v''' - 3\frac{q'}{q}v'' - \left(4q - 3\left(\frac{q'}{q}\right)^2 + \frac{q''}{q}\right)v' + 2q'v = 0.$$

In der durch $v = qw$ auf die Normalform transformierten Differentialgleichnng

$$(12^*) \qquad w''' + 2aw' + bw = 0,$$

worin

$$a = \frac{q''}{q} - \frac{3}{2}\left(\frac{q'}{q}\right)^2 - 2q, \quad b = \frac{q'''}{q} - \frac{4q'q''}{q^2} + 3\left(\frac{q'}{q}\right)^3 - 2q',$$

---

1) Wir können hier *nicht* wie in Fall 1) (vergl. S. 154) durch Multiplikation mit einer geeigneten Größe λ zum Verschwinden bringen; denn der dazu erforderliche Multiplikator $\mu = ce^{-\int \lambda dx}$ gehört hier im allgemeinen *nicht* dem Rationalitätsbereiche an.

2) Dieselbe ist inzwischen erschienen (**130**, 77—88).

ist die Differentialinvariante $a' - b = 0$. Daher hat das allgemeine Integral der Differentialgleichung (12) die Form:

$$v = c_1\varepsilon_1^2 + c_2\varepsilon_2^2 + 2c_3\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

worin ε_1 und ε_2 Fundamentalintegrale der Differentialgleichung

(13) $$\varepsilon'' - \frac{q'}{q}\varepsilon' - q\varepsilon = 0$$

sind[1]); dies ist aber diejenige Differentialgleichung, der die Ableitungen der Integrale der Differentialgleichung

(B) $$u'' = qu$$

genügen. Es ist also

(14) $$v = c_1u_1'^2 + c_2u_2'^2 + 2c_3u_1'u_2',$$

worin u_1 und u_2 Fundamentalintegrale von (B) sind.

Da $v = \frac{1}{A_{0_0}}$ und q nach Voraussetzung eindeutige Funktionen von z sind, so muß auch $\frac{v'}{v} = -2q\nu$ (Gleichung (11)) eine eindeutige Funktion sein, die wir mit $\varkappa$ bezeichnen wollen. Dann ist

(14*) $$v = c_1u_1'^2 + c_2u_2'^2 + 2c_3u_1'u_2' = e^{\int \varkappa dz} \quad \text{(Const.} = 1 \text{ genommen)}$$

Daraus folgt durch Differentiation unter Berücksichtigung von (B)

$$c_1u_1u_1' + c_2u_2u_2' + c_3(u_1'u_2 + u_1u_2') = \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{q}e^{\int \varkappa dz},$$

und durch nochmalige Differentiation

$$c_1u_1'^2 + c_2u_2'^2 + 2c_3u_1'u_2' + q(c_1u_1^2 + c_2u_2^2 + 2c_3u_1u_2) = \tfrac{1}{2}e^{\int \varkappa dz}\left(\frac{\varkappa^2}{q} + \frac{\varkappa'}{q} - \frac{\varkappa q'}{q^2}\right),$$

also

$$c_1u_1^2 + c_2u_2^2 + 2c_3u_1u_2 = \frac{e^{\int \varkappa dz}}{2q^2}\left(\varkappa^2 + \varkappa' - \varkappa\frac{q'}{q} - 2q\right) = e^{\int \mu dz},$$

worin μ ebenfalls eine eindeutige Funktion von z bedeutet. Setzt man

$$c_1u_1^2 + c_2u_2^2 + 2c_3u_1u_2 = (\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2)(\beta_1u_1 + \beta_2u_2) = \eta_1\eta_2,$$

so ergibt sich aus $\eta_1\eta_2 = e^{\int \mu dz}$ durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} + \frac{\eta_2'}{\eta_2} = \mu;$$

---

1) Man findet dieselbe am einfachsten auf folgendem Wege: das allgemeine Integral von (12*) hat die Form $w = c_1\eta_1^2 + c_2\eta_2^2 + 2c_3\eta_1\eta_2$, wo η_1 und η_2 Fundamentalintegrale der Differentialgleichung $\eta'' + \frac{a}{2}\eta = 0$ sind. Aus dieser letzteren Gleichung geht dann (13) durch die Transformation $\varepsilon = q^{\frac{1}{2}}\eta$ hervor.

ferner ist

$$\eta_1'\eta_2 - \eta_1\eta_2' = 2\gamma \qquad (\gamma \text{ Konstante}),$$

also

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} - \frac{\eta_2'}{\eta_2} = 2\gamma e^{-\int \mu\, dz}$$

und daher z. B.

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} = \frac{1}{2}\left(\mu + 2\gamma e^{-\int \mu\, dz}\right),$$

folglich

$$q = \frac{\eta_1''}{\eta} - \left[\frac{\eta_1'}{\eta_1}\right] = \tfrac{1}{2}\mu' + \tfrac{1}{4}\mu^2 + \gamma^2 e^{-2\int \mu\, dz}.$$

Da q eine eindeutige Funktion von z ist, so muß auch $e^{2\int \mu\, dz}$ eine eindeutige Funktion sein, die wir mit ϱ bezeichnen; es ist also

$$c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2 = e^{\int \mu\, dz} = \sqrt{\varrho},$$

d. h. gleich der Quadratwurzel aus einer eindeutigen Funktion. Ferner erhält in der Differentialgleichung (B) q den Wert

$$(15) \qquad q = \frac{1}{4}\frac{\varrho''}{\varrho} - \frac{3}{16}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\varrho};$$

sie besitzt daher zwei Fundamentalintegrale

$$\bar{u}_1 = \sqrt[4]{\varrho}\, e^{\gamma \int \frac{dz}{\sqrt{\varrho}}}, \quad \bar{u}_2 = \sqrt[4]{\varrho}\, e^{-\gamma \int \frac{dz}{\sqrt{\varrho}}}.$$

Aus den Gleichungen (5*) folgt umgekehrt nur, daß $N' = \lambda N$, also $N = c e^{\int \lambda\, dz}$ ist. D. h. zwischen zwei *beliebigen* Fundamentalintegralen

$$u_1 = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 \quad \text{und} \quad u_2 = \beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 \quad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0)$$

besteht eine Relation

$$N \equiv A_{0_0} u_1 u_2 + u_1 u_2' + u_1' u_2 + A_{1_1} u_1' u_2' = c e^{\int \lambda\, dz},$$

worin der Wert der Konstante c von der Wahl des Fundamentalsystems u_1, u_2 abhängt. — Wir hatten nun die Gleichungskette

$$A_{0_0} = \frac{1}{v}, \quad v = -\frac{1}{2q}\frac{v'}{v}, \quad v = c_1 u_1'^2 + c_2 u_2'^2 + 2 c_3 u_1' u_2',$$

$$c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2 = \sqrt{\varrho};$$

ferner ergibt sich aus den beiden ersten Gleichungen von (5*)

$$A_{1_1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{A_{0_0}'}{A_{0_0}} + \frac{2}{A_{0_0}} - \frac{A_{0_0}}{q}$$

und aus der dritten

$$\lambda = \frac{2}{A_{1_1}} + \frac{A_{1_1}'}{A_{1_1}}.$$

Daraus erhalten wir unter Berücksichtigung des Wertes für q (Gleichung (15)) für A_{0_0}, A_{1_1} und λ folgende Werte:

$$A_{0_0} = \frac{4\gamma^2}{\varrho'} - \frac{1}{4}\frac{\varrho'}{\varrho}, \quad A_{1_1} = -4\frac{\varrho}{\varrho'}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{\varrho''}{\varrho'}, \quad e^{\int \lambda dz} = \frac{\sqrt{\varrho}}{\varrho'}.$$

Also: *Zwischen zwei beliebigen Fundamentalintegralen* u_1, u_2 *der Differentialgleichung*

$$u'' = \left(\frac{1}{4}\frac{\varrho''}{\varrho} - \frac{3}{16}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\varrho}\right)u$$

besteht die Relation

$$(16) \qquad N \equiv \left(\frac{4\gamma^2}{\varrho'} - \frac{1}{4}\frac{\varrho'}{\varrho}\right)u_1 u_2 + u_1 u_2' + u_1' u_2 - \frac{4\varrho}{\varrho'}u_1' u_2' = \frac{c\sqrt{\varrho}}{\varrho'}.\text{[1]}$$

Eine Relation $N = 0$ besteht nur zwischen solchen Fundamentalintegralen u_1, u_2, für welche $c = 0$ ist.

Berücksichtigt man, daß $A_{0_0} = -2q\frac{v}{v'}$, $v = c_1 u_1'^2 + c_2 u_2'^2 + 2c_3 u_1' u_2'$ ist, und daß man in N statt u_1 und u_2 allgemein $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ setzen darf, so erhält man nach Multiplikation mit $c_1 u_1 u_1' + c_2 u_2 u_2' + c_3(u_1 u_2' + u_1' u_2)$ die algebraische Identität:

$$\begin{aligned}(17) \quad & (c_1 u_1'^2 + c_2 u_2'^2 + 2c_3 u_1' u_2')(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2) \\ & + (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2c_3 u_1 u_2)(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')(\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2') \\ & - (c_1 u_1 u_1' + c_2 u_2 u_2' + c_3(u_1 u_2' + u_1' u_2))((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2') \\ & + (\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)) \\ & = (c_2 \alpha_2 \beta_2 + c_2 \alpha_1 \beta_1 - c_3(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1))(u_1 u_2' - u_2 u_1')^2,\end{aligned}$$

welche wieder als die Grundlage der gefundenen transzendenten Relation (16) anzusehen ist. Doch ist die transzendente Untersuchung unerläßlich, da sie erst zeigt, daß diese Identität die allgemeinste ihrer Art ist. — Wählt man gerade $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ als Fundamentalintegrale und setzt $\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 = u_1$, $\beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 = u_2$, so verschwinden in (17) c_1 und c_2, da $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \sqrt{\varrho}$ ist, und man findet, daß die Relation $N = 0$ für alle diejenigen Fundamentalintegrale u_1, u_2 besteht, *für welche* $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 0$ *ist.*

Die algebraische Identität (17) ist übrigens identisch mit der in 1)

---

1) Anmerkung: Da $\sqrt{\varrho}$ i. a. keine eindeutige Funktion von z ist, so kann man hieraus i. a. *nicht* mit Hilfe der Relation $u_1 u_2' - u_1' a_2 = c$ eine Beziehung $M = 0$ mit *eindeutigen* Koeffizienten ableiten. Das ist nur der Fall, wenn $\varrho = \sigma^2$, wo σ eine eindeutige Funktion von z ist; dieser Fall führt auf den in 1) behandelten zurück. (Vergl. S. 151 ff.)

gefundenen, wie man leicht einsieht, wenn man die fernere Identität berücksichtigt:

$$(c_1 u_1 u_1' + c_2 u_2 u_2' + c_3(u_1 u_2' + u_2 u_1'))^2 - (c_3^2 - c_1 c_2)(u_1 u_2' - u_2 u_1')^2$$
$$= (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2)(c_1 u_1'^2 + c_2 u_2'^2 + 2 c_3 u_1' u_2').$$[1]

Wenn wir die spezielleren Fälle den allgemeineren unterordnen, so können wir zum Schluß sagen: *Die allgemeinsten Differentialgleichungen (B), zwischen deren Integralen eine Relation $L = 0$ besteht, sind diejenigen, welche zwei Fundamentalintegrale von der Form*

$$u_1 = \sqrt{\varrho}\, e^{\gamma \int \frac{dz}{\sqrt{\varrho}}}, \quad u_2 = \sqrt{\varrho}\, e^{-\gamma \int \frac{dz}{\sqrt{\varrho}}}$$

besitzen.

Ein Blick auf die vorhergehende Untersuchung lehrt, daß man analoge Resultate wie im zweiten Teile für die allgemeinere Relation

$$a_{1_1} u_1^2 + 2 a_{1_2} u_1 u_2 + a_{2_2} u_2^2 + b_{1_1} u_1 u_1' + b_{1_2} u_1 u_2' + b_{2_1} u_1' u_2 + b_{2_2} u_2 u_2' + c_{1_1} u_1'^2$$
$$+ 2 c_{1_2} u_1' u_2' + c_{2_2} u_2'^2 = 0$$

erhält. — Die vorliegende Untersuchung hat auf ganze rationale Funktionen (Formen) der Integrale und deren Ableitungen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten geführt, welche die Eigenschaft besitzen, durch Differentiation formell in sich selbst, multipliziert mit einem nur von z abhängenden Faktor, überzugehen. Die eingehendere Untersuchung dieser neuen Art von „Differentialinvarianten" behalte ich mir für eine spätere Arbeit vor.

Charlottenburg, den 30. Juni 1904.

---

1) Anmerkung: Das transzendente Äquivalent dieser algebraischen Identität ist die Tatsache, daß in einer linearen homogenen Differentialgleichnng zweiter Ordnung $u'' = qu$ der Koeffizient q sich durch eine quadratische Form $\sigma = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + 2 c_3 u_1 u_2$ zweier Fundamentalintegrale u_1, u_2, deren Determinante $u_1 u_2' - u_2 u_1' = c$ ist, folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$q = \frac{1}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{(c_3^2 - c_1 c_2)c^2}{\sigma^2},$$

sodaß sie nnter Adjunktion von σ durch Quadraturen integrierbar wird (vgl. S. 159); gleichzeitig ergibt sich, daß der auf der rechten Seite von q stehende Ausdruck eine absolute Invariante ist.

Die überzähligen willkürlichen Konstanten in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.

Von Ernst Schultz in Stettin.

In der Abhandlung „Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis etc." stellt Jacobi die Folgerungen zusammen, welche sich aus dem Vorkommen willkürlicher Konstanten in den Integralgleichungen ziehen lassen. In dieser Arbeit soll untersucht werden, unter welcher Bedingung die verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche die Zeit explicite nicht enthält, überzählige Konstanten enthalten können. Eine bemerkenswerte Form nimmt die Bedingung für die Anwesenheit der überzähligen Konstanten in den Integralgleichungen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung an. Zum Schlusse zeige ich, daß die Ausdrücke, welchen die partiellen Differentialquotienten der Lösungen nach den überzähligen Konstanten mit Berücksichtigung der Integralgleichungen gleich werden, eine Funktion der $n-1$ willkürlichen Integrationskonstanten sein müssen.

1. *Die überzähligen Konstanten in den Lösungen der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.* — Es sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche die Zeit explicite nicht enthält,

$$(1) \qquad H_1\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1.$$

Hierin bedeutet α_1 eine Konstante. Die $n-1$ verschiedenen Lösungen der Gleichung (1) seien $H_2 = \alpha_2$, $H_3 = \alpha_3$, ... $H_n = \alpha_n$, wo $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ die $n-1$ willkürlichen Integrationskonstanten sind. Die Ausdrücke H_2, H_3, ... H_n stellen Funktionen von $q_1, q_2, \dots q_n$, $p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots p_n = \frac{\partial W}{\partial q_n}$ und den überzähligen Konstanten $a_1, a_2, \dots a_m$ dar.

Damit das System

$$(2) \qquad H_2 = \alpha_2,\ H_3 = \alpha_3,\ \dots,\ H_n = \alpha_n$$

ein Lösungssystem von (1) darstellt, müssen die bekannten Bedingungen $(H_i H_k) = 0$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ identisch befriedigt werden. Aus dem System (2) und der gegebenen Differentialgleichung (1) ergibt sich durch Elimination das System der Integralgleichungen

$$(3) \qquad p_i = \omega_i(q_1, q_2, \dots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, a_1, a_2, \dots a_m).$$

Da die gegebene Differentialgleichung (1) durch diese für die p erhaltenen Ausdrücke identisch befriedigt wird, erhalten wir durch Differentiation von $H_1 = \alpha_1$, nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und einer der überzähligen Konstanten, welche wir ohne Index mit a bezeichnen wollen,

$$\text{(A)} \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1} = 1, \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_\mu} = 0, \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial a} = 0. \quad (\mu = 2, 3, \ldots n)$$

Wir setzen $\Delta = \left|\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\right|$ und bezeichnen die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ gehörende Unterdeterminante mit Δ_{ki}. Alsdann ergibt sich aus den n ersten Gleichungen des Systems (A)

$$(4) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = \frac{\Delta_{1i}}{\Delta}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

da Δ von Null verschieden ist.

Setzen wir diese für $\frac{\partial H_1}{\partial p_i}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ erhaltenen Werte in die letzte Gleichung des Systems (A) ein, so muß diese identisch befriedigt werden. Wir erhalten also

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{1i}}{\Delta}\frac{\partial p_i}{\partial a} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist jedoch

$$\frac{1}{\Delta}\sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial a}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n}.$$

Damit also die letzte Gleichung des Systems (A) durch die in dem System (4) gegebenen Werte für $\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, \cdots \frac{\partial H_1}{\partial p_n}$ identisch befriedigt werde, muß

$$(6) \qquad \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial a}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n} = 0$$

sein. Ersetzen wir a durch $a_1, a_2, \ldots a_m$, so muß für jede überzählige Konstante die Bedingung (6) erfüllt werden, was bekanntlich auf die gegebene Differentialgleichung führt.

Um nachzuweisen, daß die Bedingung (6) hinreichend und notwendig ist, das System (A) durch die Ausdrücke (4) zu befriedigen, ersetzen wir eine beliebige Gleichung des Systems (A), z. B. die $k$te, durch die $(n+1)$te. Wir erhalten dann das System:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1} = 1, \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_{k-1}} = 0, \sum \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial a} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_{k+1}} = 0, \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_n} = 0.$$

Zur Vereinfachung setzen wir

$$D^{(k)} = \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_{k-1}}{\partial \alpha_{k-1}} \frac{\partial p_k}{\partial a} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \alpha_{k+1}} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n}.$$

Ferner bezeichnen wir dementsprechend die Unterdeterminanten mit $D^{(k)}_{\mu\nu}$. Somit ergibt sich aus dem vorhergehenden System

$$D^{(k)} \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = D^{(k)}_{1i}. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Setzt man diese für $\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H_1}{\partial p_n}$ erhaltenen Werte in die $k$te Gleichung des Systems (A) ein, so muß diese identisch erfüllt werden. Wenn wir dies ausführen, so ergibt sich

$$D^{(k)} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_k} = \sum_{s=1}^{n} D^{(k)}_{1s} \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_k}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist $D^{(1)}$. Es ist jedoch $D^{(1)}$ die linke Seite der Gleichung (6). Also ist $D^{(1)} = 0$. Mithin muß

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_k} = 0 \tag{7}$$

sein, was zu zeigen war.

Setzen wir die durch das System (3) für die p gegebenen Funktionen ω in die Gleichung $H_s = \alpha_s$ ein, und differenzieren wir nach α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ und einer der überzähligen Konstanten a, so erhalten wir das (A) entsprechende System

$$\text{(B)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1} = 0, \ \ldots \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_{s-1}} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_{s+1}} = 0, \ \ldots \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_n} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a} = -\frac{\partial H_s}{\partial a}.$$

Aus den n ersten Gleichungen dieses Systems ergibt sich $\frac{\partial H_s}{\partial p_i} = B_{si}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, wenn $B_{si} = \frac{\Delta_{si}}{\Delta}$ gesetzt wird.

Damit auch die letzte Gleichung des Systems (B) durch die für $\frac{\partial H_s}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial H_s}{\partial p_n}$ erhaltenen Werte identisch befriedigt werde, muß notwendig und hinreichend sein

$$\frac{\partial H_s}{\partial a} = -\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a}. \tag{8}$$

Digitized by Google

Um dies zu zeigen, ersetzen wir die $k$te Gleichung des Systems (B) durch die $(n+1)$te Gleichung desselben Systems. Alsdann bilden die n ersten Gleichungen ein System von n Gleichungen, dessen Determinante $D^{(k)}$ ist. Durch Auflösung nach $\frac{\partial H_s}{\partial p_i}$ erhalten wir

$$D^{(k)} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} = D_{si}^{(k)} - \frac{\partial H_s}{\partial a} D_{ki}^{(k)}. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Multiplizieren wir ferner die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ und addieren dann sämtliche Gleichungen für $i = 1, 2, \ldots n$, so erhalten wir

$$D^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s \partial p_i}{\partial p_i \partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^{n} D_{si}^{(k)} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial H_s}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} D_{ki}^{(k)} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}.$$

Es ist nun

$$\sum_{i=1}^{n} D_{si}^{(k)} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = -D^{(s)}, \quad \sum_{i=1}^{n} D_{ki}^{(k)} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \Delta.$$

Mithin ergibt sich

$$D^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = -D^{(s)} - \Delta \frac{\partial H_s}{\partial a}.$$

Da $D^{(s)} = \Delta \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a}$ ist, so erhalten wir

$$D^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = -\Delta \left[\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a} + \frac{\partial H_s}{\partial a} \right].$$

Infolge der Bedingung (8) ist der Faktor von Δ gleich Null. Da Δ und $D^{(k)}$ von Null verschieden sind, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = 0,$$

was zu zeigen war.

Ersetzen wir a durch $a_1, a_2, \ldots a_m$, so muß also für jede überzählige Konstante die Bedingung

$$\frac{\partial H_s}{\partial a_k} = -\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots m \\ s = 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

erfüllt werden. Dieses Ergebnis können wir durch folgenden Satz ausdrücken:

UNIVERSITY

Ist W die vollständige Lösung mit den überzähligen Konstanten a_1, a_2, ... a_m der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $H_1 = \alpha_1$, welche die Zeit explicite nicht enthält, und sind $H_2 = \alpha_2$, $H_2 = \alpha_2, \ldots H_n = \alpha_n$ die $n - 1$ verschiedenen Lösungen, aus denen sich die Integralgleichungen

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = \omega_1(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, a_1, \ldots a_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{\partial W}{\partial q_n} = \omega_n(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, a_1, \ldots a_m)$$

ergeben, so müssen für jede überzählige Konstante folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial a_k} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial a_k} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{2i}}{\Delta} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}, \; \ldots \; \frac{\partial H_n}{\partial a_k} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ni}}{\Delta} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

wenn $\Delta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} \right|$ *gesetzt wird und* Δ_{si} *die zu* $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}$ *gehörende Unterdeterminante bedeutet.*

2. *Die überzähligen Konstanten in den Lösungen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.* — Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung sei

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa \lambda} A_{\varkappa, \lambda} \frac{\partial W}{\partial q_\varkappa} \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} - \Omega = \alpha_1.$$

Die Koeffizienten A und die Größe Ω sind Funktionen der Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_n$. Die Koeffizienten A haben ferner die Eigenschaft: $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$. Zur Vereinfachung bezeichnen wir die linke Seite von (1) mit H_1, sodaß

$$(2) \qquad H_1 = \alpha_1$$

die gegebene Hamiltonsche partielle Differentialgleichung ist. Ihre $n - 1$ verschiedenen Lösungen seien

$$(3) \qquad H_2 = \alpha_2, \; H_3 = \alpha_2, \; \ldots \; H_n = \alpha_n$$

Diese Lösungen sollen m überzählige Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$ enthalten. Setzen wir ferner $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, so ergibt sich aus (2) und (3) das Integralgleichungssystem

$$(4) \qquad p_i = \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, a_1, a_2, \ldots a_m). \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe muß ich auf einige Formeln zurückgreifen, die ich schon bei der Untersuchung der Integrations-

möglichkeiten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung[1, 2]) benutzt habe. Setzen wir wie in Nr. 1 $B_{si} = \frac{\varDelta_{si}}{\varDelta}$, wenn $\varDelta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} \right|$ die Funktionaldeterminante des Systems (4) ist, und $\varDelta_{si}$ die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}$ gehörende Unterdeterminante darstellt, so müssen die Koeffizienten $A_{\varkappa\lambda}$ der gegebenen Differentialgleichung die Form haben

$$A_{\varkappa\lambda} = \sum \frac{\partial B_{1\lambda}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu\varkappa}. \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

Ferner müssen die Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_s} p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_1} p_i = 1. \qquad (s = 2, 3, \ldots n) \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit a wiederum eine der überzähligen Konstanten, so läßt sich beweisen, daß

$$\sum \pm \frac{\partial B_{11}}{\partial a} \frac{\partial B_{12}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial B_{1n}}{\partial \alpha_n} = 0$$

ist. Zu diesem Zwecke gehen wir von dem in Nr. 1 aufgestellten Theorem aus. Nach demselben muß

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial a} = 0$$

sein, wenn wir B_{1i} für $\frac{\varDelta_{1i}}{\varDelta}$ einführen, und mit a eine der überzähligen Konstanten bezeichnen. Da $\frac{\partial H_1}{\partial a}$ identisch Null ist, so läßt sich die vorhergehende Gleichung in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial a} = -\frac{\partial H_1}{\partial a} \tag{7}$$

schreiben. Diese Gleichung liefert mit den übrigen Bedingungsgleichungen des in Nr. 1 angeführten Theorems für die Konstante a das aus n Gleichungen bestehende System

$$\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a} = -\frac{\partial H_s}{\partial a}. \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

1) P. Stäckel: Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln. Habilitationsschrift. Halle 1891.

2) Ernst Schultz, Integrationsmöglichkeiten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung mit n Variabeln. Beilage zum Programm des Schillerrealgymnasiums zu Stettin Ostern 1901.

Multiplizieren wir die beiden Seiten der Gleichungen des Systems (8) der Reihe nach mit $\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2}, \dots \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\mu}$ und addieren die erhaltenen n Gleichungen, so ergibt sich

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_s} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial a} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_s}.$$

Diese Gleichung besteht für $\mu = 1, 2, \dots n$. Da ferner die linke Seite der Gleichung (9) gleich $\frac{\partial p_\mu}{\partial a}$ ist, so erhalten wir das System

$$(10) \qquad \frac{\partial p_\mu}{\partial a} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial a} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_s}. \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

Dieses System (10) entspricht dem Gleichungssystem (4) des § (2) der posthumen Jacobischen Abhandlung: „Über die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung“.

Differenzieren wir die Gleichung (1) nach p_s und berücksichtigen Gleichung (2), so erhalten wir

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_s} = \sum_{i=1}^{n} A_{is} p_i. \qquad (s = 1, 2, \dots n)$$

Es ist

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_s} = \frac{\Delta_{1s}}{\Delta} = B_{1s}, \qquad (s = 1, 2, \dots n)$$

folglich erhalten wir das Gleichungssystem

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{is} p_i = B_{1s}. \qquad (s = 1, 2, \dots n)$$

Da dieses durch die Fnnktionen

$$p_i = \omega_i(q_1, q_2, \dots q_n, \alpha_1, \dots \alpha_n, a_1, \dots a_m) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

identisch befriedigt wird, so erhalten wir durch Differentiation nach einer der Konstanten a

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{i\mu} \frac{\partial p_i}{\partial a} = \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a}. \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

Setzen wir hierin den aus (10) für $\frac{\partial p_i}{\partial a}$ sich ergebenden Wert ein, so ergibt sich:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{i\mu} \frac{\partial H_s}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = -\frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a}. \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

Digitized by Google

Da aus dem Gleichungssystem (11) durch Differentiation nach α_s

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} \qquad (s, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

folgt, so erhalten wir aus (13)

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial a} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} = -\frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ und addieren sie, so ergibt sich:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial a} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} p_\mu = -\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a} p_\mu$$

oder, wenn wir die linke Seite in zwei Teile zerlegen,

$$\frac{\partial H_1}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_1} p_\mu + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} p_\mu = -\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a} p_\mu.$$

Der erste Teil der linken Seite ist gleich Null, weil $\frac{\partial H_1}{\partial a} = 0$ ist. Der zweite Teil der linken Seite wird infolge des Gleichungssystems (6) gleich Null. Also ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial a} p_\mu = 0. \tag{14}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den $n-1$ ersten Gleichungen des Systems (6)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} p_\mu = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots n)$$

liefert ein System von n linearen Gleichungen der Größen p. Da die Größen p von einander unabhängig sein sollen, so muß die Determinante dieses Systems

$$\sum \pm \frac{\partial B_{11}}{\partial a} \frac{\partial B_{12}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial B_{1n}}{\partial \alpha_n} = 0 \tag{15}$$

sein. Ersetzen wir a durch $a_1, a_2, \ldots a_m$, so sehen wir, daß für jede überzählige Konstante die Bedingung

$$\sum \pm \frac{\partial B_{11}}{\partial a_i} \frac{\partial B_{12}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial B_{1n}}{\partial \alpha_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{16}$$

erfüllt werden muß. Wir können also folgenden Satz aufstellen:

Enthält die vollständige Lösung W der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung außer den $n-1$ willkürlichen Integrationskonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ noch m überzählige Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$, so muß das System der Integralgleichungen

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, a_1, a_2, \ldots a_m) \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

so beschaffen sein, daß für jede überzählige Konstante die Bedingung

$$\sum \pm \frac{\partial B_{11}}{\partial a_i} \frac{\partial B_{12}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial B_{1n}}{\partial \alpha_n} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

identisch erfüllt wird. Es ist hierin $B_{ik} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}$, wo $\Delta = \left|\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\right|$ ist und Δ_{ik} die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ gehörende Unterdeterminante bedeutet.

Da die $n-1$ ersten Gleichungen des Systems (6) von derselben Form sind wie die Gleichung (14), so läßt vorstehendes Theorem folgende Umkehrung zu:

Werden die Relationen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_s} p_\mu = 0, \quad (s=2, 3, \ldots n) \quad \text{und} \quad \sum \pm \frac{\partial B_{11}}{\partial a_i} \frac{\partial B_{12}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial B_{1\mu}}{\partial \alpha_n} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots m)$$

identisch erfüllt, so müssen $a_1, a_2, \ldots a_m$ überzählige Konstanten sein.

3. *Nachweis, daß die Ausdrücke für die Koeffizienten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung unabhängig sind von den überzähligen Konstanten.* — Daß die in (5) der vorhergehenden Nummer angegebenen Ausdrücke für die Koeffizienten A von den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ unabhängig sind, ist schon in den angegebenen Arbeiten gezeigt worden. Es ist nun zu beweisen, daß die betreffenden Ausdrücke auch von den überzähligen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$ unabhängig sind. Der Beweis wird in analoger Weise wie in meiner Programmarbeit geführt.

Berücksichtigt man, daß

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 B_{1i}}{\partial \alpha_\mu \partial a} B_{\mu t} + \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial B_{\mu t}}{\partial a} \right) p_i \quad (t=1, 2, \ldots n)$$

ist, so folgt aus dem Gleichungssystem (6) der Nr. 2 durch Differentiation nach einer der überzähligen Konstanten a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 B_{1i}}{\partial \alpha_\mu \partial a} p_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial a} = 0. \quad (\mu=1, 2, \ldots n)$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen gehen die vorhergehenden Gleichungen über in:

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu t} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu t} \frac{\partial p_i}{\partial a} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial B_{\mu t}}{\partial a} p_i. \qquad (t=1,2,\ldots n)$$

Infolge der Gleichung (6) der Nr. 1 ist

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial a} = 0$$

und nach einer bekannten Determinanteneigenschaft ist

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 0 & k \gtrless 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases}.$$

Da diese Gleichungen (2) und (3) durch Einführung der Funktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ zu Identitäten werden, so erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (2) und (3) nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, a$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial a \partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial a} = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial a \partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Subtrahieren wir eine Gleichung des einen Systems von der mit gleichem Index k behafteten Gleichung des anderen Systems, so ergibt sich

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Wenn wir die beiden Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach mit $B_{1s}, B_{2s}, \ldots B_{ns}$ multiplizieren und die n Gleichungen addieren, so ergibt sich:

$$(5)\quad \frac{\partial B_{1s}}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{ks} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial a}.$$

Infolge des Gleichungssystems (6) der Nr. 2 ist

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial B_{\mu t}}{\partial a} p_i = \frac{\partial B_{1t}}{\partial a}.$$

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Mit Berücksichtigung von (5) und (6) wird dann das System der Gleichungen (1) in folgendes übergeführt:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu t} = -\frac{\partial B_{1t}}{\partial a} + \frac{\partial B_{1t}}{\partial a} = 0. \qquad (t=1,2,\dots n) \tag{7}$$

Wir sind somit zu einem in den p linearen Gleichungssystem gelangt, dessen Determinante gleich Null sein muß, da die p von Null verschieden sind.

Ist die Determinante des Systems (7) Null, so sind die sämtlichen p nicht von einander unabhängig, was ausgeschlossen ist. Damit das System (7) bestehen kann, bleibt nichts anderes übrig, als daß jede Gleichung des Systems für sich befriedigt wird, was nur durch Nullsetzen des Faktors der einzelnen p geschehen kann. Es muß also

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu t} = 0 \qquad (i, t=1,2,\dots n) \tag{8}$$

sein. Hiermit wird auch die Determinante des Systems (7) identisch Null. Dieses ist auch unbedingt notwendig, da sonst eine Relation zwischen den Variabeln $q_1, q_2, \dots q_n$ bestehen müßte, was ausgeschlossen ist. Ersetzen wir a durch $a_1, a_2, \dots a_m$, so ist der Nachweis geliefert, daß die Ausdrücke für die Koeffizienten A der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung von den überzähligen Konstanten unabhängig sind.

Es erledigt sich auch kurz der Nachweis, daß die Funktion Ω in der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung keine der überzähligen Konstanten enthalten kann.

Mit Hilfe der Gleichungen (11) der Nr. 2 geht die Hamiltonsche Gleichung in $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i B_{1i} = \Omega + \alpha_1$ über. Da diese Gleichung zur Identität wird, wenn wir für $p_1, \dots p_n$ die betreffenden Funktionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ einführen, so erhalten wir durch Differentiation nach einer der überzähligen Konstanten $a_1, \dots a_m$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^i}{\partial a} B_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1i}}{\partial a} p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial a}.$$

Infolge von (6) der Nr. 1 und (14) der Nr. 2 wird die linke Seite der letzten Gleichung gleich Null, und wir erhalten $\frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0$. Ersetzen wir a durch $a_1, a_2, \dots a_m$, so ist $\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = 0$ $(i=1,2,\dots m)$, und folglich muß Ω von den überschüssigen Konstanten frei sein, was zu zeigen war.

4. *Nachweis, daß* $\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a}$ $(s=2, 3, \ldots n)$ *eine Funktion von* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ *ist.* — Sind $H_2 = \alpha_2, \ldots H_n = \alpha_n$ die $n-1$ verschiedenen Lösungen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $H_1 = \alpha_1$ und enthalten diese Lösungen m überzählige Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$, so muß, wie schon Jacobi gezeigt hat, $d\frac{\partial H_s}{\partial a} = 0$ sein für $s = 2, 3, \ldots n$, wo a eine der überzähligen Konstanten ist. Bezeichnen wir mit $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$ $n-1$ Konstanten, so wird $\frac{\partial H_s}{\partial a} = -\gamma_s$ $(s=2, 3, \ldots n)$ ein Lösungssystem der partiellen Differentialgleichung $H_1 = \alpha_1$ sein. Setzen wir zur Abkürzung $\mathsf{H}_s^{(i)} = -\frac{\partial H_s}{\partial a_i}$, so erhalten wir, da m überzählige Konstanten angenommen werden, folgende $m+1$ Lösungssysteme der partiellen Differentialgleichung $H_1 = \alpha_1$:

$$\text{(A)} \qquad H_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad H_n = \alpha_n$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \mathsf{H}_2^{(1)} = \gamma_2^{(1)}, & \ldots \quad \mathsf{H}_n^{(1)} = \gamma_n^{(1)} \\ \mathsf{H}_2^{(2)} = \gamma_2^{(2)}, & \ldots \quad \mathsf{H}_n^{(2)} = \gamma_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots \\ \mathsf{H}_2^{(m)} = \gamma_2^{(m)}, & \ldots \quad \mathsf{H}_n^{(m)} = \gamma_n^{(m)} \end{cases}$$

Aus dem ersten System ergibt sich das schon so oft erwähnte Integralsystem $p_i = \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, a_1, \ldots a_m)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Aus den folgenden Systemen ergeben sich die Integralsysteme:

$$p_i = \pi_i^{(k)}(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \gamma_2^{(k)}, \gamma_3^{(k)}, \ldots \gamma_n^{(k)}, a_1, \ldots a_m) \quad (i=1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots m)$$

Da diese für die p erhaltenen Ausdrücke identisch sein müssen, so müssen im allgemeinen $\gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \ldots \gamma_n^{(m)}$ Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $a_1, a_2, \ldots a_m$ sein. Aus dem System (B) folgt jedoch, daß $\gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \ldots \gamma_n^{(m)}$ von $\alpha_1, a_1, a_2, \ldots a_m$ unabhängig sind, folglich können die Integrationskonstanten $\gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \ldots \gamma_n^{(m)}$ nur Funktionen der Größen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sein. Bezeichnen wir diese Funktionen mit φ, so muß sein

$$\varphi_s^{(k)}(\alpha_2, \ldots \alpha_n) = \gamma_s^{(k)}. \qquad (s = 2, 3, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots m)$$

Da nach dem Theorem der Nr. 1

$$\frac{\partial H_s}{\partial a_k} = -\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

ist und da nach vorhergehendem $\frac{\partial H_s}{\partial a_k} = -\gamma_s^{(k)}$ ist, so erhalten wir das System:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \varphi_s^{(k)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n). \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen werden durch die Einführung der Funktionen ω identisch befriedigt und folglich erhalten wir durch Differentiation nach den Größen $q, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, a_1, \ldots a_m$:

$$(1) \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}}{\partial q_\mu} = 0, \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ \mu = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}}{\partial \alpha_\nu} = \frac{\partial \varphi_s^{(k)}}{\partial \alpha_\nu}, \qquad \begin{pmatrix} s, \nu = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

$$(4) \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}}{\partial a_\mu} = 0. \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ \mu, k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich nun folgender Satz ableiten:

Enthält die vollständige Lösung W der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $H_1 = \alpha_1$, *welche die Zeit explicite nicht enthält, die überzähligen Konstanten* $a_1, a_2, \ldots a_m$ *neben den willkürlichen Integrationskonstanten* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ *und ist*

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \omega_i(q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, a_1, \ldots a_m) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

das System der Integralgleichungen, so sind die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} B_{si} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

nur von den Konstanten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ *abhängig. Es ist* $B_{si} = \frac{\Delta_{si}}{\Delta}$, $\Delta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \right|$ *und* Δ_{si} *ist die zu* $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}$ *gehörende Unterdeterminante.*

Stettin, Mai 1903.

Digitized by Google

Rezensionen.

Wagenmann. Das System der Welt. Grundzüge einer Physik des organischen Lebens. I. Band: Der Ursprung von Energie und Materie. Mit 40 Abbildungen im Text, 11 mehrfarbigen Tafeln und einer Reproduktion von Prof. Max Klingers „Drama". Cannstatt 1904, Selbstverlag des Verfassers. XII u. 182. S.

„Gott hat die Welt aus „Nichts" geschaffen." „Er empfand den Urzustand in der Not unendlichen Wertmangels". „Der Schlüssel für die Geheimnisse des natürlichen Schöpfungsvorganges ist uns in der Mathematik gegeben. Die Wissenschaft der Wertbegriffe zeigt uns auch, wie Werte entstehen können". Die Null oder das Nichts ist nichts anderes als $\infty^{-\infty}$. Die „Eins" stellt dieser absoluten Einheit gegenüber nur eine grobe Einheit dar. Die gleichseitige Hyperbel liefert den Schlüssel für den Schöpfungsakt: „Göttliche Weisheit fand aus sich selbst das Leben spendende Gesetz, schuf es am Anfang. Die Mathematik konnte es nur auffinden und seine wunderbare Gesetzmäßigkeit feststellen in der Hyperbel". Ganz ausreichend scheint die Mathematik übrigens auch dem Herrn Verfasser für die Erklärung der biblischen Schöpfungsgeschichte nicht zu sein, denn es folgen Kapitel über Magnetismus, Expansion und Kompression. Im wesentlichen arbeitet die Natur nach Sinus- und Tangentenlinien — die Tangente ist nichts weniger als ein Bild gestaltender und aufbauender Geisteskraft — das beweist u. a. die Betrachtung des Klingerschen „Dramas". Darum sind dem Werke in einem Anhange Tafeln der trigonometrischen Funktionen beigegeben. Wir können dem Verfasser in seinen Ausführungen leider nicht folgen.

Charlottenburg. H. Samter.

J. Kübler. Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 24 S.

Der Verfasser hat unter dem Titel: „Woher kommen die Weltgesetze?" bereits eine Schrift erscheinen lassen, in welcher aus der zentrischen Gruppierung der Materie in den Weltkörpern und ihrer gasförmigen Hüllen geschlossen wird, daß diese verschiedenen Dichten durch eine kugelförmige Schwingungsbewegung der Materie zustande gekommen sind und erhalten bleiben. Verdichtung und Wieder-Entdichtung der Materie sind dem Verfasser für alle Körper, auch die organischen, die Entwicklungsprinzipien, die er in der vorliegenden Schrift weiter auszuführen und zu belegen sucht.

So durch die an radioaktiven Körpern gemachten Beobachtungen. Im Höhepunkte der Verdichtung werden die Schwingungen „nach der Proportion des goldenen Schnittes“ ausgeführt, die in seiner Theorie eine große Rolle spielt. Wir können dem Verfasser in seinen Spekulationen ebensowenig folgen, wie den älteren Naturphilosophen, die bereits den goldenen Schnitt im Bau des menschlichen Körpers, in der Anordnung der Blätter der Pflanzen gefunden zu haben glaubten und auf ein Streben der Natur nach demselben viele Erscheinungen zurückzuführen versuchten.

Charlottenburg. H. Samter.

G. Mie. Moleküle, Atome, Weltäther. Aus Natur und Geisteswelt, 58. Bändchen. Leipzig 1904. B. G. Teubner. 138 S. geb. ℳ 1,25.

Die Notwendigkeit der physikalischen und chemischen Hypothesen über die Struktur der kleinsten Teile der Körper wird hier in einer Anzahl von Vorträgen äußerst klar und geschickt entwickelt, das Licht wird auf seine Ursache in fortschreitenden elektromagnetischen Feldern zurückgeführt. Endlich wird die neuste Phase des Bildes, das wir uns von den greifbaren Atomen machen, um den in den letzten Jahrzehnten entdeckten Strahlungserscheinungen gerecht zu werden, die Elektronentheorie kurz behandelt. Es ist erstaunlich, wie weit der Verfasser in diese, der populären Darstellung so wenig zugänglich scheinenden Gebiete vordringt, und wie er das Interesse des Lesers fortdauernd zu fesseln weiß.

Charlottenburg. H. Samter.

Alfred Loewy. Versicherungsmathematik. Sammlung Göschen. Leipzig 1903. 145 S. Taschenformat.

Das Büchlein bildet eine bequeme Einführung in die Lebensversicherungs-Mathematik für Anfänger. Als besondere Vorzüge hebe ich außer der Kürze hervor: Verwendung der internationalen Bezeichnung, Verweis auf moderne Literatur und Bezugnahme auf die Verhältnisse in der Praxis.

Berlin, im September 1904. G. Bohlmann.

W. Janisch. Geometrische Aufgaben zur Lehre von der Proportionalität der Größen (Streckenteilnng, vierte und mittlere Proportionale, Ähnlichkeit der Figuren, Strecken am Kreise, stetige Teilung). Potsdam und Berlin 1904, A. Steins Verlagsbnchhandlnng. 8°. 100 S. geb. ℳ. 1,75.

Die Sammlung bietet für das bezeichnete Gebiet eine große Zahl von Anfgaben. Dabei ist freilich manches mehrfach angeführt; so ist Nr. 7a S. 66 gleich Nr. 3 S. 77 und gleich Nr. 7 S. 79. Ferner werden bei den Dreiecksaufgaben, die durch Vertauschung der Seiten und der entsprechenden Stücke entstehenden verschiedenen Formen derselben Aufgabe besonders aufgeführt, was dem Ref. durchaus entbehrlich erscheint.

Ganz zuverlässig ist die Sammlung nicht. So sind die Aufgaben Nr. 11 S. 16 (für den rechten Winkel) und Nr. 12 S. 24 nur lösbar, wenn

man das Unendliche mit hineinzieht, was sich an der betreffenden Stelle aber kaum empfehlen dürfte. Von den Aufgaben Nr. 5 und 6 S. 12 sind diejenigen, welche auf die Aufgabe: ein Dreieck zu konstruieren aus $a \pm b$, h_a nnd α hinauslaufen, nicht mit den Kenntnissen zu lösen, auf deren Verwertung die Aufgabensammlung im übrigen aufgebaut ist.

Bei der Behandlung gewisser Grundaufgaben vor einzelnen Abschnitten hätte sich Teil II, über stetige Teilung, weit einfacher gestalten lassen, wenn die Anmerkung S. 77 und das im Abschnitt III bevorzugte Verfahren überall in den Vordergrund gestellt worden wäre, nämlich daß die stetige Teilung die Teilung nach einem bestimmten Verhältnis ist, und daß sich solche Teilungen von einem Ähnlichkeitspunkt aus leicht übertragen lassen.

Druck und Ausstattung sind bis auf kleine Unebenheiten (besonders S. 63) gut, die mehr skizzenhaften Figuren sind nicht überall vorbildlich.

Schöneberg. E. Kullrich.

C. Block. Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. I. Teil: Quarta. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. ℳ. 1,00.

G. Holzmüller. Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 zur freien Auswahl für den Anfangsunterricht bearbeitet und mit Anleitungen zum Herstellen von Unterrichtsmodellen versehen. Mit 76 Figuren im Text. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. ℳ. 1,60.

Blocks Lehr- nnd Übungsbuch bietet für alle höheren Lehranstalten in zweckmäßiger Auswahl und klarer Darstellung das geometrische Pensum der Quarta und zwar sowohl den Lehrstoff einschließlich von Grundaufgaben und von Musteraufgaben für die Dreiecks- und Vieruckskonstruktionen als auch zahlreiche Übungsaufgaben.

Nicht behandelt ist der geometrische Vorbereitungsunterricht, wie er für die Gymnasien und Realgymnasien in Quarta, sonst in Quinta durch die Lehrpläne von 1901 vorgeschrieben ist.

Diesem Stoff widmet Holzmüller seine „vorbereitende Einführung in die Raumlehre". Wie sich bei diesem Vorbereitungsunterricht überhaupt ein Lehrbuch für die Schüler erübrigt, so gehört Holzmüllers Buch nur in die Hand des Lehrers, dem es ein trefflicher Berater sein kann. Man beherzige freilich das schon im Titel hervorgehobene „zur Auswahl", lasse alles, was zu weit gehend erscheint, oder was in der Darstellung zu abstrakt ist, fort und wähle sich aus der Fülle von Material das passend Erscheinende aus. Das auf Grund reicher Erfahrung geschriebene Buch kann dann nicht nur vielfache Anregungen bieten, sondern dürfte einen jeden zufrieden stellen.

Beide Bücher, die von der Verlagsbuchhandlung vortrefflich ausgestattet sind, können für den ersten geometrischen Unterricht aufs wärmste empfohlen werden.

Schöneberg. Kullrich.

Digitized by Google

Wehner. Die Bedeutung des Experimentes für den Unterricht in der Chemie. (Sammlung naturwissensch.-pädagog. Abhandlungen. Bd. II. Heft 1.) Leipzig 1905, B. G. Teubner. 62 S. *M.* 1,40.

Daß die Veranschaulichung der Tatsachen auch für den chemischen Unterricht das geeignete Mittel ist, und daß dieser Unterricht in weitestgehendem Maße der Experimente sich zu bedienen habe, darüber wird wohl heute niemand mehr im Zweifel sein, und mancher wird die gründliche Studie des Verfassers, die aus der Psychologie und der Geschichte der Wissenschaft diesen Standpunkt begründet, für entbehrlich erachten. In bezug auf die Stellnng des Versuches im Unterrichte (S. 34.) müssen wir Wilbrand Recht geben: in der Tat wird nur in seltenen Fällen das Experiment den Ausgangspunkt bilden können, meistens wird es zur Entscheidung der Richtigkeit einer vorausgehenden Betrachtung dienen, so wie Wilbrand es in seinen Lehrbüchern handhabt. Der S. 24 erwähnte Apparat ist der Hofmannsche Zersetzungsapparat, bei einem Voltameter werden die Bestandteile des Wassers vereinigt aufgefangen.

Charlottenburg. H. Samter.

Gutsche, O. Mathematische Übungsaufgaben für Primaner von Realanstalten und jüngere Studierende. IV u. 82 S. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. *M.* 1,20.

Auf engem Raume bietet der Verfasser ein sehr reichhaltiges und brauchbares Material. Zunächst hat er die Aufgaben zusammengestellt, die er als Lehrer der Mathematik in der obersten Klasse der Breslauer Oberrealschule seinen Schülern in der Zeit von Michaelis 1888 bis Michaelis 1904 zur Bearbeitung in der Reifeprüfung geboten hat, und er läßt ihnen kurze Andeutungen für die Lösung folgen. Den Schluß bildet eine Sammlung von 345 weiteren Aufgaben aus dem Pensum der Prima einer Realanstalt, denen solche Lösungshinweise nicht beigegeben sind. In dem Heftchen sind also insgesamt 469 Aufgaben vereinigt, ein reiches Übungsfeld für den Schüler, aber ebenso auch für den Studierenden, der auf der Schule nicht bis zu diesen Höhen herangestiegen war. Zugleich legt der Verfasser mit dieser Veröffentlichung gewissermaßen Rechenschaft vor den Fachgenossen ab über die Ausdehnung und die Gestaltung seines Unterrichts. Man wird ihm gern zugestehen, daß seine Schüler recht Erfreuliches leisten, und daß sie, bis zu diesem Wissen und Können geleitet, eine breite und sichere Grundlage für ihre Hochschulstudien mitbringen. In der Sammlung nehmen naturgemäß die Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene einen besonders breiten Raum ein. Die Gebiete, aus denen sie gewählt sind, entsprechen dem Inhalte des Grundrisses, den der Verfasser 1901 als Beilage des Jahresberichtes seiner Anstalt veröffentlicht hat. Es finden sich ferner eine nicht geringe Zahl schwierigerer Konstruktionsaufgaben, zum Teil fußend auf den Sätzen, die die synthetische Behandlungsweise der Kegelschnitte liefert; dann stereometrische Aufgaben und eine Reihe von Maximalaufgaben, von Reihenentwicklungen und von Aufgaben zur Ausrechnung unbestimmter Formen von Funktionen, die darauf deuten, daß der Verfasser seine Schüler — wie er selbst in der Vorrede gesteht — mit den Grundlehren der Infinitesimalrechnung bekannt macht, und die den Umfang

kennzeichnen, in dem er das tut. Aufgaben aus der Kombinatorik, einige Gleichungen höheren Grades und vor allem Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf die Erd- und Himmelskunde schließen sich an — Die vorgelegten Aufgaben bieten interessante, meist nicht zu schwierige Lösungen; systematische Vollständigkeit ist bei der Art, wie das Büchlein entstanden ist, natürlich nicht zu erwarten, wird vom Verfasser auch nicht angestrebt. Aber das zusammengebrachte Material wird der Lehrer auf der Oberstufe von Realanstalten in größerer oder geringerer Ausdehnung mit Nutzen verwerten. „In geringerer Ausdehnung“, denn nicht jedem wird es möglich sein, seine Schüler so weit zu führen. An einigen Stellen, z. B. bei der Verwendung neuerer Lehren der Dreiecksgeometrie (Beispiel 150—152), ist des Guten vielleicht zu viel getan. So interessant diese Untersuchungen sind, so möchte der Berichterstatter sich doch dagegen aussprechen, sie zu einem integrierenden Bestandteil der Schulunterweisung zu machen. Die Schule soll Grundlagen lehren; dazu sind sie nicht zu rechnen. Damit soll nicht gesagt sein, daß sie als Übungsstoff, als Erweiterung ihre Stelle im Unterricht finden. Nur soll man nicht verlangen, daß jeder andere Lehrer es dann ebenso mache. In necessariis unitas, in dubiis libertas! Non omnia possumus omnes.

Nordhausen a. Harz. MAX NATH

Junker. Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität. In Kommission bei B. G. Teubner 1905, Leipzig. 48 S. und eine Figurentafel. *M.* 0,80.

Man sieht es dieser Sammlung sofort an, daß sie aus der Praxis des Unterrichts hervorgegangen ist, und daß reiche Erfahrung darin verarbeitet ist. Jeder der 14 Paragraphen wird mit einigen durchgerechneten Beispielen eingeleitet, bei denen die Lehrsätze und Formeln hingeschrieben sind. Da die Beispiele in großer Zahl (300) und nach den Anforderungen, die sie an die Selbsttätigkeit der Schüler machen, sehr verschiedenartig vorhanden sind, so wird jeder Lehrer, besonders auch der Realanstalten, hinreichendes Material finden. Eine Anzahl Figuren dienen zur Veranschaulichung, wenn das Büchlein in die Hand des Schülers kommt.

Charlottenburg. H. SAMTER.

Mahler. Physikalische Aufgabensammlung. (Sammlung Göschen). Leipzig 1905, G. J. Göschen. 118 S. geb. *M.* 0,80.

Diese Zusammenstellung, bei der die besten Aufgaben aus Lehrbüchern und Programmen ausgewählt, aber eine große Anzahl guter hinzugefügt wurden, wird sich in den Händen der Lehrer und Schüler als außerordentlich nützlich erweisen. Die einfachsten Zahlenbeispiele, die sich der Lehrer im Unterricht selbst bildet, sind ausgelassen, ebenso alle solche, die ohne tiefere mathematische Grundlage sich nicht behandeln lassen. Die Resultate sind beigegeben und enthalten in einigen schwierigeren Fällen auch Andeutungen zur Lösung. Auch für die Beantwortung durch Konstruktion und durch graphische Behandlung findet sich Material.

Charlottenburg. H. SAMTER.

Kaučič, Georg Freiherr von Vega. 2. verb. u. illustr. Auflage. Wien 1905 im Selbstverlage des Verfassers Hauptmann Fridolin Kančič. 58 S. *M.* 1.

Dieses zum 150. Geburtstage des Verfassers des berühmten Thesaurus logarithmorum (auf S. 47 ist der Druckfehler „logarithums" stehen geblieben) verfaßte Werkchen, dessen Ertrag für ein demselben in seinem Heimatlande Krain zu errichtendes Denkmal bestimmt ist, gibt ein anschauliches Bild des bewegten Lebens dieses Ritters vom Schwerte und vom Geiste, der in den wildesten Kriegsstürmen die wissenschaftliche Tätigkeit nicht ruhen ließ. Darüber freilich, was uns am meisten interessiert hätte, wie das Hauptwerk zustande gekommen ist, wieviel Logarithmen direkt berechnet werden mußten, ehe zur Interpolation geschritten werden konnte, und über andere dem Rechentechniker aufstoßende Fragen gibt das Werkchen leider keinen Aufschluß.

Charlottenburg. H. Samter.

Wislicenus. Der Kalender. („Aus Natur und Geisteswelt" 69. Bändchen). Leipzig 1905, B. G. Teubner. II und 118 S. geb. *M.* 1,25.

Unter Vorausschickung einer klaren Darstellung der Bewegungen der Erde und des Mondes als der Grundlagen aller Zeitmaße, werden die Kalender der Christen, der Juden, der Muhamedaner und der ersten französischen Republik ihrer geschichtlichen Entwicklung nach behandelt. Ohne Zuhilfenahme längerer mathematischer Entwicklungen werden die Berechnungen für das Oster- und Passahfest durchgeführt. Werden dabei auch nicht die bisher aufgestellten Gaußischen Regeln vollständig bewiesen, so wird doch wenigstens für das Osterfest eine vom Jahre 1900 bis 2099 gültige Spezialisierung derselben abgeleitet. Überall sind Beispiele durchgeführt, um die Anwendung der Vorschriften klar zu machen. So kommt der Verfasser dem Interesse, das viele Gebildete für die Kalendrographie besitzen, geschickt entgegen und weiß den an sich trockenen Stoff gut zu popularisieren. Eine Tabelle für die julianischen und gregorianischen Osterdaten ist beigegeben.

Charlottenburg. H. Samter.

Oskar Bolza. Lectures on the Calculus of Variations. The decennial Publications of the University of Chicago. 2[d] ser. Vol. XIV. Chicago 1904.

Jedem Freunde der Variationsrechnung werden die Vorlesungen von O. Bolza willkommen sein. Der Verfasser beschränkt sich zwar auf die Behandlung der Variation einfacher Integrale der Form $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ (oder in Parameterdarstellung $\int_{t_0}^{t_1} F(x, y; x', y')dt$) und auf isoperimetrische Probleme derselben Art; diese Fragen sind aber auch die einzigen, für welche die Untersuchungen als einigermaßen abgeschlossen gelten können. Das Werk

ist, wie in der Vorrede betont wird, mehr eine Zusammenstellung sämtlicher vorhandenen Resultate als ein Lehrbuch. Trotzdem kann es auch sehr gute Dienste demjenigen leisten, der den Gegenstand erst kennen lernen will; denn es ist klar und übersichtlich geschrieben, und die Beweise werden mit der peinlichsten Sorgfalt und Schärfe geführt.

Die seit dem Erscheinen des Lehrbuches von A. Kneser auf dem Gebiete der Variationsrechnung erhaltenen Resultate finden im Bolzaschen Buche ihren Platz; die Ideen von D. Hilbert, die in eigenen Publikationen, Vorlesungen und in verschiedenen Dissertationen seiner Schüler ihren Ausdruck fanden, sind auch gebührend berücksichtigt worden; die modernen Methoden, die bei Kneser nur in Parameterdarstellung vorkommen, werden hier auch für nicht homogene Koordinaten ausführlich behandelt.[1])

Dabei wird aus dem Verschwinden der ersten Variation die Notwendigkeit der Gleichung des Problems[2]) nicht nur auf die übliche Weise bewiesen, sondern auch nach P. du Bois Reymond, wobei die Voraussetzung von zweiten Ableitungen bei der gesuchten Funktion vermieden wird. Die Untersuchungen von Legendre und Jacobi über die zweite Variation sind sehr übersichtlich zusammengestellt; dagegen ist die Weierstraßsche Form der Transformation der zweiten Variation wohl etwas zu kurz behandelt worden.

Im Satze pag. 63, wo der zum Punkte A einer Extremalen $\mathfrak{E}_0$ konjugierte Punkt A', als derjenige Punkt definiert wird, wo die Extremale $\mathfrak{E}_0$ zum ersten Male die Enveloppe des Extremalenbüschels durch A trifft (*meets*), ist eine kleine Ungenauigkeit untergeschlüpft. Zermelo hat nämlich gezeigt[3]), daß die Enveloppe des bezüglichen Extremalenbüschels in sehr allgemeinen Fällen die Extremale $\mathfrak{E}_0$ *vor* dem konjugierten Punkte A' schneiden muß.

Im III. Kapitel wird auf sehr einleuchtende Weise gezeigt, daß man durch die Betrachtung höherer Variationen nie ein System von hinreichenden Bedingungen erhalten kann. Hierauf folgt die übliche Weierstraßsche Theorie mit der E-Funktion; die Hilbertsche Darstellung mit Hilfe seines vom Integrationswege unabhängigen Integrals wird ebenfalls eingehend besprochen.

Bolza hat ferner die sehr hübsche Bemerkung gemacht, daß die Erfüllung der Jacobischen und Weierstraßschen Bedingung *längs* eines Extremalenstückes *nicht* hinreicht, wenn x die unabhängige Veränderliche ist, um die Existenz eines starken Minimums zu beweisen. Das von ihm gewählte Beispiel (pag. 99) könnte aber die irrige Meinung veranlassen, daß die Form des Variationsgebietes, das er benutzt, hierfür von Belang ist.[4])

1) In einer Note (pag. 115) sagt Bolza, daß die Behandlung der Probleme in Parameterdarstellung gänzlich Weierstraß zu verdanken ist. Ich möchte hier bemerken, daß schon im Jahre 1832 W. R. Hamilton das räumliche Variationsproblem in der Form $\int F(x, y, z, x', y', z')ds$ betrachtete und dabei die Tatsache benutzte, daß, wenn $x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'} = F$ ist, die drei Gleichungen des Problems sich auf zwei reduzieren. (On Systems of Rays, third Supplement Trans. Irish Acad. Vol. XVII.)

2) Bolza sagt dafür: Eulersche Differentialgleichung.

3) Jahresber. d. Mathem. Vereinigung. Bd. 11, pag. 184 (1902).

4) Die betreffende Extremale hört nämlich im Punkte $x = 0$ auf stark zu sein und liefert für negative x ein schwaches Minimum.

Daß dies nicht der Fall ist, kann man am Beispiele $J = \int (y'^2 - y^2 y'^4) dx$ einsehen, wenn man die Extremale $y = 0$ zu grunde legt.

Die Probleme, für welche die Weierstraßsche Funktion $F_1(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$ für jeden Wert von γ positiv ist und die Bolza (nach Hilbert) *regulär* nennt, werden abschließend behandelt. Leider wird der Existenzbeweis des Minimums im Kleinen, der von G. A. Bliss für diese Probleme gegeben worden ist, nicht ausführlich gebracht (pag. 146). Für den Osgoodschen Satz dagegen, der bei Stabilitätsfragen in der Mechanik und auch überhaupt so wichtig ist, wird ein sehr einfacher Beweis gegeben (pag. 190). Es werden auch die Fragen, wo die Endpunkte der Extremalen noch variieren können, im Anschluß an Bliss eingehend behandelt.

Ein letztes Kapitel ist dem Hilbertschen Häufungspunktverfahren gewidmet. Mit Hilfe dieser Methode werden zum ersten Male auf strenge Weise sämtliche, im obigen Sinne regulären, definiten Variationsprobleme untersucht, und die Hilbertschen Resultate für geodätische Linien auf diese Probleme übertragen. Der Beweis hätte sich vielleicht durch die Benutzung des Osgoodschen Satzes eleganter gestaltet.

Im Kapitel über das isoperimetrische Problem wird auf die Schwierigkeiten, die bei der Weierstraßschen Konstruktion auftreten, in ausführlicher Weise aufmerksam gemacht.

Der Verfasser setzt, im Gegensatz zu Weierstraß und Kneser, nirgends voraus, daß die Funktion unter dem Integralzeichen analytisch sei, sondern begnügt sich mit der Stetigkeit ihrer drei ersten Ableitungen Die so erlangte Verallgemeinerung ist nur scheinbar; in den Beweisen werden bei analytischen Funktionen ja auch nur die ersten Ableitungen benutzt, und die Voraussetzung der älteren Autoren ist vielfach wesentlich bequemer.

Ich möchte endlich die Ausführlichkeit der Zitate rühmen, sowie die Sorgfalt, mit welcher diese geprüft worden sind, wodurch sich das Bolzasche Buch zu einer kleinen Enzyklopädie über den Gegenstand gestaltet.

C. Carathéodory.

A. Fuhrmann. Bauwissenschaftliche Anwendung der Integralrechnung. Lehrbuch, Aufgabensammlung und Literaturnachweis. Mit 83 Holzschnitten. Berlin, 1903: Wilhelm Ernst & Sohn (vorm. Ernst & Korn). XIII u. 292 S. gr. 8°.

Der vorliegende Band hat den Gegentitel: „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. In sechs Teilen, von denen jeder Teil ein selbständiges Ganzes bildet. Teil IV: „Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung.“ Der Teil III dieses Werkes wurde im Archiv (2) **17**, 28, 1899 angezeigt. Der Inhalt des vorliegenden Buches ist auf vier Kapitel verteilt: I. Einfache Integrationen, II. Mehrfache Integrationen, III. Differentialgleichungen erster Ordnung, IV. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ein aphabetisches Sachenverzeichnis und ein Literaturverzeichnis machen den Beschluß. Außerdem sind in den einzelnen Paragraphen zahlreiche Verweisungen auf solche Schriften gegeben,

Digitized by Google

wo die betreffenden Aufahen oder die Hilfsmittel zu ihrer Lösung zu finden sind. In diesen Zitaten, die nicht bloß die Werke der reinen Mathematik berücksichtigen, sondern vorzugsweise die technische Literatur in weitem Umfange herbeiziehen, liegt ein besonderer Wert der gegenwärtigen Veröffentlichung. Und obschon viele der gestellten Fragen nur eine besondere Einkleidung bekannter Integrationen betreffen, so ist dem Anfänger, der gern konkrete Beispiele anstatt abstrakter analytischer Übungen behandelt, damit gedient, daß er erfährt, wie man gewisse praktisch vorkommende Fälle auf die in der Integralrechnung gelehrten Methoden zurückführt und erledigt. Am reichhaltigsten ist naturgemäß das erste Kapitel über einfache Integrationen bedacht worden, das beinahe die Hälfte des Bandes einnimmt. Die beiden Kapitel über die Differentialgleichungen dagegen beanspruchen zusammen noch nicht ein Viertel des Buches und räumen etwa die Hälfte ihres Platzes den „Anregungen und Anmerkungen“ ein. Es möge übrigens gestattet sein, darauf hinzuweisen, daß in der nichtdeutschen, besonders in der englischen Literatur viele Schriften vorhanden sind, aus denen Beiträge zu den behandelten Fragen hätten entnommen werden können. Der Verf. scheint diese Berücksichtigung der ausländischen Schriften als nicht zweckmäßig erachtet zu haben. Im übrigen sei die Benutzung des Buchs nicht bloß den Mathematikern, sondern nach dem Wunsche des eifrig sammelnden Autors auch den Technikern empfohlen, die anscheinend dieser seiner „Lebensaufgabe“ nicht die nötige Beachtung geschenkt haben

Berlin. E. Lampe.

O. Fort und **O. Schlömilch. Lehrbuch der analytischen Geometrie.** I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. 7. Auflage, von R. Heger in Dresden. Mit Holzschnitten im Text. [XVII u. 268 S.] Leipzig 1904, B. G. Teubner. geh. *M*. 4.

Seitdem zum letzten Male in dieser Zeitschrift (II. Reihe, Bd. XIV, 1896. Litt. Ber. LV, S. 29) über das vorliegende Buch berichtet worden ist, sind nur wenige Änderungen an ihm vorgenommen worden. Sie haben den Charakter des Buches nicht wesentlich beeinflußt, sondern sich auf didaktische Verbesserungen und eine zweckmäßigere Anordnung einzelner Abschnitte beschränkt. Das früher vorhandene kurze Inhaltsverzeichnis ist durch eine 9 Seiten starke Zusammenfassung (teils in kurzen Sätzen, teils in Stichworten) ersetzt worden, wodurch die praktische Verwendbarkeit — das Buch ist hauptsächlich für die Studierenden der Technischen Hochschulen bestimmt — recht gefördert worden ist.

Westend b. Berlin. P. Zühlke.

A. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft 1. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 3. Auflage von F. Hochheim. A. Aufgaben. [VI u. 98 S.] Leipzig 1904, B. G. Teubner. *M*. 2,40.

„Die vorliegende Neubearbeitung weist gegenüber der zweiten Auflage eine Vermehrung um 108 Aufgaben (darunter nur 5 mit speziellen Koeffizienten, Anm. d. Ref.) sowie die Beifügung neuer Zahlenbeispiele an ver-

schiedenen Stellen auf. Besonders die Abschnitte von den homogenen Punkt- und Linienkoordinaten sind erweitert und in den Lösungen teilweise umgearheitet worden, um eine strenge Scheidung zwischen absoluten und relativen trimetrischen Koordinaten durchzuführen; ein neuer Ahschnitt behandelt den Punkt als Enveloppe. Den Abschnitten über Linienkoordinaten wie über homogene Koordinaten sind einleitende Anmerkungen vorausgeschickt, da das Verständnis dieser Koordinaten dem Anfänger oft Schwierigkeiten bietet, nnd viele der gebräuchlichen Lehrbücher der analytischen Geometrie die betreffenden Kapitel gar nicht oder nur nebensächlich berücksichtigen." Dem trefflichen Buche, welches Ref. zu eigener Belehrung und im Unterricht lange Zeit benutzt und dahei schätzen gelernt hat, ist zu wünschen, daß es auch in der vorliegenden Bearbeitung neue Freunde finden möge.

Westend b. Berlin. P. Zühlke

F. Bützberger. Lehrbuoh der ebenen Trigonometrie mit vielen Aufgaben und Anwendungen für Gymnasien und technische Mittelsohulen. Dritte Auflage. Zürich 1904, Art. Institut Orell Füssli. X u. 68 S. 8°. geb. ℳ. 2,00.

Bützherger giht im Vorwort einen Überblick über die Geschichte der Trigonometrie und behandelt dann in den drei Abscbnitten: „das rechtwinklige Dreieck", „das schiefwinklige Dreieck" und „Goniometrie" das Wesentliche des Lehrgebietes in klarer Weise. Den Aufgaben und zwar nicht nur den durch Rechnung zu lösenden wird von Anfang an besonderer Wert beigemessen. Es überwiegen die den verschiedensten Gebieten entnommenen angewandten Aufgaben. Das gut ausgestattete äußerst praktische Büchlein kann warm empfohlen werden.

Berlin. E. Kullrich.

M. Schuster. Stereometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht in den oberen Klassen höherer Schnlen. Mit besonderer Berücksichtigung der Methoden der darstellenden Geometrie. Leipzig und Berlin 1901, B. G. Teubner. VIII u. 80 S. 8°. geh. ℳ. 1,40.

Von passend ausgewählten Aufgaben aus wird der Lehrstoff entwickelt. Die allzuleicht ermüdende abstrakte Aneinanderreihung der Sätze über die Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen wird so vermieden. Ausgegangen wird nicht vom Würfel, sondern von der Pyramide, derart daß die Begriffe der Orthogonalität und Parallelität von Kanten und Ebenen zunächst noch nicht erforderlich sind. Trotz des auf die darstellende Geometrie beznguehmenden Zusatzes zum Titel des Buches fehlen Aufgahen und Entwicklungen über das perspektivische Zeichnen. Schuster erachtet hierfür „eine kurze mündliche Anweisung" für ausreichend. Es dürfte aber empfehlenswerter sein, die Grundlagen entweder in die Abschnitte I (Pyramide) und II (Prisma) als wichtige und besonders interessante Anwendungen aufzunehmen oder sie als besonderen Abschnitt den beiden ersten unmittelbar folgen zu lassen. Bei den Übungen ist erfreulicherweise auf das konstruierende Darstellen besonderer Nachdruck gelegt.

Digitized by Google

Zu den Figuren bemerkt Schuster auf S. IV, sie seien „nicht in Parallel-, sondern in Zentralperspektive ausgeführt". Das ist bezüglich eines erheblichen Bruchteiles, wo doch Parallelprojektion angewendet ist, ein Irrtum. In Figur 14 sind die Pyramiden parallelperspektivisch, die durch Rechtecke begrenzten Stücke der Parallelebenen zentralperspektivisch gezeichnet, eine ähnliche Verbindung zeigt Fig. 10. Dies und die wiederholten großen Ungenauigkeiten bei dem Fluchtpunkt paralleler Geraden beeinträchtigen den Wert der Figurentafel.

Recht praktisch ist das beigefügte Sachverzeichnis.

Berlin. E. Kullrich.

L. Orlando. Note di Matematica. Serie 2. Collezione di opere di matematica, fisica e scienze naturali. No. 1. Messina 1902, Ant. Trimarchi. 72 S. 8°. geh. Lire 2.

In interessanter Darstellung werden Sätze und Aufgaben über verschiedene Kurven in Wechselbeziehung behandelt. Besondere Abschnitte sind der Benutzung der Vektoren und der Inversion gewidmet.

Berlin. E. Kullrich.

H. de Vries. Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905, Göschensche Verlagshandlung. 78 S. 8°. geh. *M.* 3.

De Vries bezeichnet es als Zweck seiner Arbeit nachzuweisen, daß das Studium der Zentralprojektionen im vierdimensionalen Raume (R_4) sich vorzüglich dazu eigne, zur Kenntnis der Originale zu gelangen, ebenso wie sich auch im R_3 die Zentralprojektion gerade deshalb als Darstellungs- und Untersuchungsmethode bewährt habe. Der Verzicht auf die Behandlung des allgemeinen n-dimensionalen Raumes geschieht, weil für R_4 noch graphische Lösungen geboten werden können. Als Grundlage für die n-dimensionale Geometrie dient Schoutes Mehrdimensionale Geometrie (Band XXXV der Sammlung Schubert). In klarer Darstellung werden für die Grundlagen der gewöhnlichen Zentralprojektion interessante Erweiterungen geboten. Das oben angeführte, der Arbeit gesteckte Ziel wird erreicht, da die angestellten Untersuchungen sich vorzüglich zur Vertiefung des Verständnisses der mehrdimensionalen Geometrie eignen.

Berlin. E. Kullrich.

C. Martus. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an deutschen höheren Schulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse (IV. Teil) zu einem Übungsbuche vereint. Dritter Teil: Aufgaben. Zweite Doppelauflage. Dresden und Leipzig 1904, C. A. Kochs Verlagsbuchhandlung. VIII u. 180 S. 8°. geh. *M.* 4,20.

Die große Brauchbarkeit der im 4. Band des Archivs (1903 S. 166) besprochenen Aufgabensammlung hat es bewirkt, daß trotz des nicht billigen

Preises nach kurzer Zeit die zweite Auflage erscheinen konnte. Martus hat 50 sich in den Rahmen passend eingliedernde Aufgaben neu hinzugefügt.

Berlin. E. Kullrich.

W. Seyffarth. Dr. E. Bardeys methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik. Neue Ausgabe vorzugsweise zum Gebrauche in den mittleren und oberen Klassen der Lehrerseminare. Leipzig und Berlin 1904, B. G. Teubner. 8⁰. VIII u. 300 S. geb. ℳ 2,80.

Seyffarth hat die Bardeysche Aufgabensammlung mit großer Sorgfalt und auf Grund reicher Erfahrung für den Gebrauch in Lehrerseminaren umgearbeitet, so daß das altbewährte Buch für den besonderen Zweck nun mit um so größerem Nutzen gebraucht werden kann.

Berlin. E. Kullrich.

H. Müller und M. Kutnewsky. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. II. Teil: Ausgabe A. Für Gymnasien. Zweite verbesserte und stark gekürzte Auflage. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. 8⁰. VIII u. 272 S. geb. ℳ. 2,20.

Der 1902 erschienenen ersten Auflage (besprochen im 4. Bd. des Archivs 1903 S. 158/9) haben die Verfasser schon vor dem vollständigen Verbrauch der ersten Auflage eine zweite gekürzte Auflage folgen lassen. Sie haben ihren Wunsch, das Buch handlicher zu gestalten und von gewissen Mängeln frei zu machen, erreicht. Der Preis ist erheblich ermäßigt.

Berlin. E. Kullrich.

J. Rüefli. Lehrbuch der Stereometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Zum Gebrauch an Sekundärschulen (Realschulen) und Gymnasialanstalten. Dritte Auflage. Bern 1904, A. Francke. VIII u. 109 S. 8⁰. geb. ℳ 1,60.

H. Fenkner. Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Zweiter Teil: Raumgeometrie. Nebst einer Aufgabensammlung. Dritte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin 1904, Otto Salle. IV u. 131 S. 8⁰. Geh. ℳ 1,60.

Daß die stereometrischen Lehrbücher von Rüefli und Fenkner sich nach Inhalt und Darstellung bewährt haben, zeigt ihr Erscheinen in dritter Auflage, wobei beide wohl Erweiterungen, aber keine wesentlichen Änderungen aufweisen.

Rüefli verteidigt im Vorwort der neuen Auflage noch besonders die Beibehaltung der bisherigen Darstellungsweise, wonach der Lehrsatz vorangestellt ist Es entspreche dies freilich nicht dem Unterrichtsgang in der Schule, wohl aber dem Verfahren des Schülers bei der häuslichen Wiederholung. Hierfür also, und nicht zur methodischen Anleitung für den Lehrer sei sein Buch bestimmt. Fenkners Darstellung ist ähnlich, doch stützt er die Erfassung des Methodischen durch Hervorheben der „Beweismittel“.

Digitized by Google

Von dem perspektivischen Zeichnen handelt Rüefli gar nicht, Fenkner in einem „Anhang" überschriebenen Abschnitt. Diese Bezeichnung als Anhang erscheint recht bedenklich. Der Unterrichtsgang darf dieses wichtige Gebiet keinesfalls als „Anhang" bringen. Vielmehr ist der Abschnitt so früh wie irgend möglich durchzuarbeiten, da erst nach seiner Behandlung die Schüler die doch vielfach benutzten Figuren räumlicher Gebilde mit Verständnis betrachten werden. Das perspektivische Zeichnen muß im Anschluß an die Sätze von den Geraden und Ebenen behandelt werden, wobei gerade diese Anwendung auf das Schneiden von Geraden und Ebenen ein treffliches Mittel zur Belebung dieses Gebietes bietet.

Als Übungsaufgaben bringt Rüefli nur Berechnungen. Hier wäre eine Erweiterung durch Aufnahme von einfachen Beweisübungen empfehlenswert; bei § 99 und auch bei § 144 und 148 könnte so die Erweiterung der für gerades n ausgesprochenen Sätze auf ungerades n vorgebracht werden. Fenkner bietet auch Zeichenaufgaben; doch ist das Material zu dürftig. Es würde im Gegensatz zu den anderen Aufgabengruppen kaum für eine Schülergeneration ausreichen.

Die Figuren sind bei Rüefli sorgfältiger gezeichnet, doch ist bei beiden Büchern der wiederholte Wechsel des für die schiefe Parallelprojektion gewählten Winkels störend. Falsch ist es, wenn der Winkel in derselben Figur wechselt, ja schiefe Parallelprojektion mit einem Aufriß in einer Figur vereinigt wird (Rüefli Fig. 90 u. 89, Fenkner S. 66 u. 48). Wenn Rüefli die Figuren weiß auf schwarzem Grunde bringt, so ist das weniger empfehlenswert. Dem Leser werden so Kontroll- oder Hilfslinien sehr erschwert.

Berlin. E. Kullrich.

O. Reichel. Vorstufe der höheren Analysis und der analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. Leipzig 1904, B. G. Teubner. X u. 111 S. 8°. geh. *M.* 2,40.

Reichels Vorstufen sind in erster Linie dazu bestimmt, den Studierenden der Königlichen Landwirtschaftlichen Hochschule eine gründlichere Vertiefung in die für das Verständnis der mathematischen Vorlesungen erforderlichen Elemente zu erleichtern. Sie können hierfür, außerdem aber auch als anregende Lektüre für weitere Kreise warm empfohlen werden. Die arithmetischen Teile sind in ihrer charakteristischen Gestaltung herausgewachsen aus der Programmabhandlung vom Jahre 1882 und den „Grundlagen der Arithmetik" des Verfassers. Stark betont wird die Auffassung aller Erweiterungen der natürlichen Zahlenreihe als „formaler Gebilde", ferner wird besondere Sorgfalt beim Irrationalen und bei den im Anhang in Nr. 14 berührten Differentialen auf den Limesbegriff verwendet. In den geometrischen Abschnitten werden die unendlich fernen Punkte als „formale Punkte" eingeführt, Vektoren und Drehungswinkel behandelt und hieran einiges angeknüpft über Koordinaten und Winkelfunktionen. Der Grenzbegriff und die Reihen dienen endlich der Erklärung des „analytischen Winkelmaßes" und der Berechnung von π.

Berlin. E. Kullrich.

Digitized by Google

A. Hoffmann. Mathematische Geographie. Ein Leitfaden zunächst für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Fünfte, verhesserte Auflage hearbeitet von J. Plaßmann. Mit 50 in den Text gedruekten Figuren und einer großen Sternkarte. Paderborn 1903, Ferdinand Schöningh. VIII u. 172 S. *M.* 2.00.

E. Weighardt. Mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Bühl (Baden) 1902, Konkordia. 46 S. *M.* 0.60.

K. Geißler. Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichtes. Mit 52 Figuren im Text. Leipzig 1904, B. G. Teubner. VI u. 199 S. *M.* 3.00.

Die neue wieder von Plaßmann besorgte Auflage des Hoffmannschen Lehrhuches, das nun schon über 30 Jahre fruchthringend gewirkt hat, zeigt in den Einzelheiten Verhesserungen da, wo die neneren wissenschaftlichen Ergehnisse dies forderten. Sonst sind die Veränderungen nur gering. Auch in der neuen Auflage kann das althewährte Lehrhuch aufs wärmste empfohlen werden. Für eine weitere Neuauflage rät Ref., die Angaben in den ungehränchlichen Myriometern dnrch solche in Kilometern zu ersetzen nnd den fünften Jupitermond unter das Großgedruckte aufzunehmen und zwar schon auf S. 132. Ferner ist es empfehlenswert, künftig bei der stereographischen Projektion S. 33,5 zu erwähnen, daß der behandelte Kreis ein Spezialfall ist (Kreismittelpunkt auf dem Meridian des Projektionszentrums), und endlich mnß die Begründung von Ehbe und Flut S. 110, 9 klarer gestaltet werden.

Weighardts kleiner Leitfaden, von dem nach 6 Jahren die zweite Auflage erscheinen konnte, ist nach Inhalt und Form für den Unterricht der Mittelstufe recht branchbar. Bei den Figuren sind verschiedene Ellipsen nngenau konstruiert, außerdem hätte hei der schematischen Figur 11 für den Theodoliten wohl auch noch der Horizontalkreis gezeichnet werden können.

Zu diesen beiden aus dem Schulnnterricht hervorgegangenen und für ihn hestimmten Büchern stehen K. Geißlers Grundlagen in einem nicht unwesentlichen Gegensatz. Ihre Verwendung als Schulhnch würden äußere Inkorrektheiten stören und in geringerem Maße die Stoffabgrenzung. Ein Schulhuch der mathematischen Erdkunde kann Einschiebnngen enthehren wie S. 11/12 die Parallelenkonstruktion oder S. 126 die Angahen über dritte Wurzeln, und es ist auch an sich mißlich, solche und ähnliche Dinge als Grundlagen, wenn auch kurz, mitzuhehandeln, andererseits aber z. B. auf π nnd die rednzierte Pendellänge bei der Pendelformel S. 74 nicht einzugehen. Mängel im Ausdruck finden sich mehrfach, so S. 8 „an eine Krümmung eine Tangente legen", S. 26 „selhstverständlicherweise" oder S. 57 „die Pendelschwingung wird schneller". Der Satzbau ist namentlich bei den Fragesätzen undentsch. Angeführt seien S. 60 „In diesem Falle wird man die Kraft als wirksam nur in welcher Zeit betrachten?" und S. 73 „Würde die Umdrehungszeit der Erde größer, so würde wieso ...?" Besonders schlecht ist anch das Satzgefüge S. 53 von Zeile 4 ah. Wenn Schlesinger in einer lesenswerten Programmahhandlung „Über die Sprache in den mathematischen Schulbüchern", (Lessinggymnasium 1904) es als

„eine unerläßliche Forderung“ bezeichnet, „daß die Darstellung in den Schulbüchern mustergültig sei“, so ist diese Forderung zweifellos zu verallgemeinern und zwar einmal über die Grenzen der Schulbücher hinaus, andererseits in der Beziehung, daß auch Mustergültigkeit der Figuren zu fordern ist. Der letzteren Forderung wird Geißlers Buch ebenfalls mehrfach nicht gerecht. Zunächst sind verschiedene Ellipsen zu beanstanden, dann aber besonders die Figuren 2, 26 und 27. Bei der letzten Figur sind vier parallele Linien so dargestellt, daß sie zwei verschiedene (fast 2 cm auseinanderliegende) Fluchtpunkte haben! Da über die Figuren so oft zu klagen ist, möchte Ref. den großen Verlagsbuchhandlungen empfehlen, einen tüchtigen Zeichner anzustellen, der ein für alle mal die Figuren neu herauszugebender Bücher auf ihre zeichnerische Korrektheit prüft. Es ist vielleicht nicht von jedem Verfasser zu verlangen, daß er korrekt zeichnet. Notwendig aber ist es, daß sich in Büchern, die zum Drucke gelangen, einwandsfreie Figuren finden. Es geht nicht länger an, die Mißstände bei den Figuren als belanglos anzusehen, sondern es muß versucht werden, hier Abhilfe zu schaffen.

Inhaltlich ist die Angabe Geißlers S. 183 unrichtig, „daß nur eines der beweglichen Feste des Kirchenjahres nämlich Ostern sich nach dem Monde richtet“. Verschiedene Angaben über das Massenanziehungsgesetz bedürfen einer Umarbeitung. Hier ist zwischen „proportional“ und „gleich“ nicht sorgfältig unterschieden und jegliche Gravitationskonstante fälschlich unterdrückt. Zugleich ist die Einführung des alten Kraftgrammes statt des Massengrammes wenig empfehlenswert.

Nach alledem sind Geißlers Grundlagen, wenigstens vorläufig, kein besonders geeignetes Buch in der Hand des Lernenden, sei es „zum Selbstverstehen“, sei es für die Benutzung beim Schulunterricht. Sie können aber zur „Unterstützung des Unterrichtes“ in der Hand des Lehrers dienen und seien in diesem Sinne empfohlen wegen der Anregungen, die der Lehrer an den verschiedensten Stellen aus Eigenartigkeiten in der Stoffbehandlung schöpfen kann. Erwähnt sei hier Geißlers Zonenapparat, der eine hübsche praktische Orientierung bietet.

Zum Schluß möchte Ref. noch raten, die Verse S. 48 und 91 bei einer Neuauflage fortzulassen.

Schöneberg. E. Kullrich.

Newest. Die Gravitationslehre ein Irrtum! Einige Weltprobleme. Wien 1905, Karl Konegen. 93 S. *M.* 1,25.

Eine große Anzahl von Erscheinungen, die man bisher — wie wir glauben mit Erfolg — auf die Gravitation zurückgeführt hat, scheinen dem Verfasser so schlecht begründet, daß er eine neue Theorie aufstellt, die — wie er glaubt — diesen Tatsachen gerecht wird und zugleich über sehr viele andere mit der Gravitation kaum zusammenhängende Erscheinungen Rechenschaft gibt. Die Sonnenprotuberanzen, wie die Ebbe- und Fluterscheinungen, Flußbettwanderungen (!), den Golfstrom erklärt er, wie schon den Leidenfrostschen Versuch dadurch, daß Wärmestrahlen Wasser verdrängen. Usw.

Charlottenburg H. Samter.

Digitized by Google

Noack. Aufgaben für physikalische Schülerübungen. Berlin 1905, Julius Springer. XII u. 170 S. geh. *M.* 3.

Seit etwa 15 Jahren sind aus dem etwas unbestimmten Gefühle, daß der theoretische physikalische Unterricht einer gewissen Ergänzung durch die Handfertigkeit der Schüler bedürfe, und daß man dem Drange dieser nach einer solchen Betätigung von seiten der Schule entgegenzukommen habe, praktische Folgen gezogen worden. Freilich sind die Ansichten, welche Ziele einem solchen Unterrichte anzuweisen seien, noch wenig geklärt. Die einen wollen nach englischem Vorgange von den Schülern physikalische Gesetze selbständig finden lassen — was natürlich nicht wörtlich zu verstehen ist. Denn der Lehrer, der ja das Gesetz kennt, wird den Versuchern die Richtung zu geben haben, die zur Bestätigung desselben schnellstens hinführt, und meist den Lehrsatz vorher anführen müssen, dem zugestrebt wird. Die andern wollen einfach von den Schülern eine teils im Unterrichte bereits durchgeführte teils wegen Zeitmangels nicht durchführbare ergänzende Versuchsreihe machen lassen. Die dritten arbeiten darauf hinaus, von den Schülern die physikalischen Konstanten ähnlich bestimmen zu lassen, wie das im Universitätsunterrichte etwa nach den Kohlrausch schen Büchern geschieht. Der Verfasser, der als einer der ersten praktische Übungen in Deutschland einführte, ist Eklektiker in bezug auf diese dreierlei Ansichten. Die meisten Übungen bewegen sich in den an erster und an dritter Stelle genannten Richtungen. Für diese Zwecke hat derselbe eine Anzahl von Apparaten selbst konstruiert. Es ist kein Zweifel, daß das vorliegende Buch sowohl dem Lehrer als dem Schüler, der es wohl hauptsächlich benutzen soll, sehr gute Dienste leisten wird, insbesondere auch durch die Art, wie er die Versuchsergebnisse von den Schülern protokollieren und rechnerisch verwerten läßt. Er verlangt aber von den Schülern einen so hohen Grad von kritischer, sorgfältiger Arbeit in bezug auf Messungen und Wägungen, wie er nur im Hochschulpraktikum vorausgesetzt werden sollte. Freilich werden Schüler, die wirklich allen diesen Forderungen gerecht werden und das Buch das Verfassers praktisch durcharbeiten, davon einen großen Nutzen haben und einen elementaren Hochschulkursus sparen können. Eine Anzahl Tabellen, welche zur Erleichterung der numerischen Rechnungen dienen sollen, werden sich beim Gebrauche des Buches recht nützlich erweisen. Das Verständnis des durchaus korrekten Textes wird noch durch 93 scharfe, schematische Bilder erleichtert.

Charlottenburg. H. Samter.

Waeber. Lehrbuch für den Unterricht in der Physik. 14. Aufl., neu bearbeitet von Oberlehrer J. Unverricht. Leipzig 1905, Ferdinand Hirt und Sohn. 343 S. geh. *M.* 3,75.

Ein Buch, das in einem Zeitraum von 16 Jahren 14 Auflagen erlebt hat, läßt besondere Vorzüge voraussetzen. Ursprünglich für den Seminarunterricht bestimmt, mußte es nach den neuen Lehrplänen der Lehrerbildungsanstalten von 1901 umgearbeitet werden, wobei noch insbesondere die mathematische Begründung einiger Gesetze, ein Abschnitt über das absolute Maßsystem und ein recht klarer zweckentsprechender Paragraph über das Potential hinzugekommen sind. Hierdurch erscheint das Buch auch dem

Digitized by Google

Unterrichte an höheren Schulen mehr angepaßt, wenn auch die Anforderungen an die mathematische Ableitung hier größere sind. Das im elementaren Unterrichte so notwendige Ausgehen von den Erfahrungen des täglichen Lebens ist recht passend durchgeführt, und die Anwendungen der physikalischen Tatsachen in der Technik sind zum Teil eingehender behandelt als in andern ähnlichen Zwecken dienenden Büchern: so sind die Pendeluhr und die Ankerhemmung der Taschenuhr, das Aneroid, die Prismenbeleuchtung der Leuchttürme, die Lokomotivensteuerung, die Nernstlampe, die Telegraphie, Telephonie und Funkentelegraphie u. a. nicht bloß erwähnt, sondern mit technischen Einzelheiten in klaren Abbildungen dargestellt. Eine Reihe von einfachen Aufgaben wird das Eindringen in die Gesetze fördern, beigegebene Zahlentabellen, z. B. eine Psychrometertafel werden bei der Lösung derselben nützlich sein. Eine historische Nachschlagetabelle vervollständigt das recht brauchbare Buch.

Charlottenburg. H. Samter.

F. Loppé. Essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes. Paris 1904, Gauthier-Villars.

Schon für den Fachmann der Elektrotechnik ist es oft schwer, unter den zahllosen Büchern über dieses Gebiet ein ihm zusagendes und für seine Studien zweckmäßiges Buch auszuwählen. Noch viel schwerer aber kann sich der nicht speziell elektrotechnisch, aber physikalisch und mathematisch gebildete Leser ein Werk aussuchen, das ihm über Dinge Aufschluß gibt, die ihn gerade interessieren. Die meisten Leser des Archivs dürften wohl wenig Interesse für den konstruktiven Aufbau, die Zweckmäßigkeit oder die Ausnutzung elektrischer Apparate haben, dagegen recht viel Interesse für die Art, wie man sich in der Großelektrotechnik physikalischer und mathematischer Methoden bedient, um solche Apparate zu bauen, zu prüfen und zu betreiben, und wie diese Apparate arbeiten. Solchen kann das Buch von Loppé sehr empfohlen werden. Es beschreibt in Wort und Zahl Versuche, wie sie tagtäglich in den elektrotechnischen Fabriken oder am Aufstellungsort der Maschinen vorgenommen werden. Es kann an dieser Stelle besonders deswegen empfohlen werden, weil es nicht nur Versuche bringt, die über das richtige Funktionieren einer Maschine orientieren, sondern auch Versuche, die ins Wesen der Maschinen einführen. Außerdem ist es sehr klar und verständlich geschrieben und gibt bei allen Versuchen Sinn und Zweck genau an; endlich bietet es durch ausführliche Besprechung der Versuchsmittel und der damit gemachten Erfahrungen die Möglichkeit, selbst mit Erfolg ähnliche Versuche auszuführen. Daß der Leser die physikalischen Grundbegriffe der Elektrotechnik beherrscht und einige Bekanntschaft mit den elektrischen Maschinen und Apparaten hat, ist natürlich vorausgesetzt. Es enthält folgende Kapitel: 1. Zweck und Organisation von Versuchen. 2. Allgemeine Versuchsmethoden. 3. Versuche an Gleichstrommaschinen. 4. Versuche an Wechselstrommaschinen. 5. Versuche an vollständigen Anlagen. In diesem ziemlich ausführlichen Kapitel werden dem Leser auch Versuche an Dampf- und Wasserkraftmaschinen gezeigt. 6. Ergänzungen, behördliche Vorschriften, Protokollformulare.

Charlottenburg. M. Schenkel.

Digitized by Google

Marx. l'éther principe universel des forces. Mémoires résumés par C. Benoit. Paris 1905, Gauthier-Villars. X u. 217 S. fr. 6,50.

Diesen gesammelten Abhandlungen des ehemaligen General-Inspektors der Brücken und Chausseen ist ein Bericht einer Kommission der Pariser Akademie vorangestellt, welcher aus den Comptes rendus abgedruckt ist. Es überrascht uns, darin zu lesen, daß einer actio in distans philosophische Bedenken entgegenstehen sollen, die in der vorliegenden Schrift durch Konzeptionen über den Äther ersetzt seien. Aus der Erkenntnistheorie können sich solche Bedenken nicht erheben, weil ja die Begriffe der Ursache und Wirkung nicht in den Dingen selber liegen; aber auch die Metaphysik liefert keinen Anhalt gegen die Fernewirkung, weil diese nicht weniger unerklärlich ist als eine solche bei unmittelbarer Berührung der Körper. Das ist es auch, worauf Kant (zitiert bei Isenkrahe, Rätsel der Schwerkraft S. 27) hinweist mit den Worten, daß ja kein Ding dort wirke, wo es wirklich ist. Eine Zurückführung der Fernewirkung auf eine Übertragung durch den Äther wird also von der Philosophie nicht gefordert und von den Naturwissenschaften nur deshalb gewünscht, weil man ähnliche Erscheinungen einheitlich behandelt sehen möchte. Für die elektrischen Phänomene aber hat sich die Nahewirkung als unumgänglich herausgestellt, demnach ist für die Gravitation die Beseitigung der Fernwirkung ein erstrebenswertes Ziel, dem freilich bisher nur eine große Anzahl unzureichender wenn auch geistreicher Theorien mehr oder weniger nahe kommen.

Die Ansichten des Verfassers sind zum Teil bereits in der Theorie von Challis 1859 (Encykl. Bd. V, 1. S. 55) enthalten, wonach Längswellen im Äther die Schwerewirkungen erklären sollen. Dagegen sieht der Verfasser diejenigen Wellen, auf die er die elektrischen und optischen Erscheinungen zurückführt, als helikoidal an und glaubt Besonderheiten in ihrer Natur entdeckt zu haben, die sowohl die Polarisation des Lichtes als auch die X-strahlen erklären können.

Charlottenburg. H. Samter.

E. Jouffret. Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et introduction à la Géométrie à n dimensions. Paris 1903, Gauthier-Villars. 30 u. 215 S. 8°.

Das Erscheinen elementarer Lehrbücher der mehrdimensionalen Geometrie darf wohl als Anzeichen für das Eindringen dieser Disziplin in tiefere mathematische Schichten aufgefaßt werden. Es ist in dieser Hinsicht erfreulich, daß kurz nach dem deutschen Lehrbuche der mehrdimensionalen Geometrie von P. H. Schoute (Samml. Schubert XXXV, Leipzig 1902) auch ein französisches erschienen ist. Obgleich diese rasche Aufeinanderfolge der beiden Werke zu ihrer Vergleichung herausfordert, so will ich diesem Reize doch widerstehen und mich auf eine kurze Inhaltsangabe des vorliegenden beschränken.

Ein hervortretendes Kennzeichen des Buches ist die vielseitige Berücksichtigung der Literatur; an vielen Stellen stören sogar die Berichte über die Literatur den einheitlichen Charakter, den ein Lehrbuch haben soll. Insbesondere gilt dies von dem umfangreichen Vorworte, worin Ansichten verschiedener Schriftsteller über das Axiom der Dreidimensionalität

unseres Raumes, sowie über die wirkliche Existenz oder Vorstellbarkeit mehrdimensionaler Räume wiedergegeben und Anwendungen zusammengestellt werden, welche die letztere Begriffsbildung in Mathematik und Physik gefunden hat.

Den vierdimensionalen Raum definiert der Verfasser analytisch, indem er die Zahlenquadrupel $x_1 \ldots x_4$ als Punkte und die durch ein, zwei oder drei lineare Gleichungen zwischen $x_1, \ldots x_4$ bestimmten Punktmannigfaltigkeiten als Räume, Ebenen oder Geraden einführt. Auf dieser Grundlage werden die Begriffe Parallelismus, Länge, Normalität und Winkel definiert und die wichtigsten darauf bezüglichen Sätze abgeleitet. In § 25 findet auch die darstellende Geometrie im R_4 (übereinstimmend mit der Methode im Schouteschen Buche), ferner im Kap. VII die Theorie krummer Linien, Flächen und Räume im R_4 kurze Erwähnung. Ein Drittel des Buches ist den Polyedern (insbesondere regulären) des vierdimensionalen Raumes gewidmet. Die in dem Kap. IX angeführten Anwendungen der vorhergehenden Lehren auf Physik und Chemie dürften wohl eher verwirren als belehren. In dem letzten Kapitel ist der n-dimensionalen Geometrie, im § 57 auch der schon in der Riemannschen Habilitationsschrift erwähnten Möglichkeit gedacht, Mannigfaltigkeiten von unendlicher Dimensionenzahl zu untersuchen. Ja, am Schlusse wirft der Verfasser sogar die Frage auf: „Le géomètre va-t-il se trouver amené à considérer des champs de degré fractionnaire?“

Unzweifelhaft enthält das Buch viel Anregendes und Brauchbares; als Lehrbuch scheint es mir jedoch nur in einigen Kapiteln empfehlenswert.

Wien, im Januar 1905. E. Müller.

Bodo Habenicht. Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. 32 Seiten und 4 Figurentafeln. Berlin 1905, O. Salle.

Dem Verfasser ist es gelungen, eine große Anzahl von Blattformen etc. als Kurven der Form $r = f(\cos\varphi)$ darzustellen, auch gewisse Anpassungsrichtungen (Träufelspitze, Bau der Kletterpflanzenblätter etc.) mit gewissen Abänderungsrichtungen der analytischen Formel in Beziehung zu bringen. Läßt sich auch naturwissenschaftlich mit diesen Ergebnissen noch nichts Rechtes anfangen und sind sie noch weit davon entfernt, einen inneren Grund für die Morphologie der Blätter aufzudecken, so bedeuten diese Arbeiten, wie die früheren („Die analytische Form der Blätter“ Quedlinburg 1895) doch einen wichtigen Schritt zur einheitlichen mathematischen Darstellung der vorhandenen Naturformen.

Greiz. F. Ludwig.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

143. Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholungen, wobei keine Komplexion zwei *„benachbarte“* Elemente entbalten darf (auch das erste nnd letzte Element sollen als „benachbart“ gelten), beträgt

$$K'^{n}_{r} = \frac{n}{r}\binom{n-r-1}{r-1}.$$

So ist z. B. die Anzahl solcher Amben $= \frac{n(n-3)}{2} =$ Anzahl der Diagonalen eines n-Eckes.

Aussig, Böhmen. stud. math. J. Krug.

144. Sur une surface quelconque de révolntion on considère les lignes, dont la tangente en tout point M se trouve à une distance constante a dn point de rencontre de l'axe de rotation avec le plan tangent à la surface, en M. Démontrer que la courbure géodésiqne de ces lignes est égale à la courbure de la surface, multipliée par a.

Naples. E. Cesàro.

145. Alle Geraden, die aus zwei festen Kreisen Sehnen von gleicher Länge ausschneiden, umhüllen eine *Parabel*, die die Potenzlinie der beiden Kreise zur Scheiteltangente und die Mitte der Zentrale zum Brennpunkt hat.

Straßburg i. E. Paul Epstein.

146. Ein Brett hat sechs mit den Zahlen 1 bis 6 bezeichnete Felder. Man würfelt mit einem Würfel; beträgt die Zahl der geworfenen Augen a, so besetzt man ein oder mehrere Felder von der Beschaffenheit, daß die Summe der auf ihnen stehenden Zahlen gleich a ist. Um Willkürlichkeiten bei der Felderbesetzung zu vermeiden, die das Problem äußerst komplizieren würden, sei festgesetzt: 1. man besetze stets *möglichst viele* Felder; 2. kann man zwei Felder auf *verschiedene* Arten besetzen, so besetze man *dasjenige* Felderpaar, für das das *Produkt* der Felderzahlen *am größten* ist. Dies Verfahren setzt man solange fort, bis es abbricbt. — Wie groß ist:

Digitized by Google

a) Die Wahrscheinlichkeit w_ν, daß das Verfahren nach dem νten Wurfe sein Ende erreicht? (Ein Wurf, bei dem ein der Angabe entsprechendes Feldbesetzen nicht möglich ist, *zählt nicht mehr mit*, muß aber bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit natürlich in Betracht gezogen werden.)
b) Die Wahrscheinlichkeit w, daß — gleichgültig wieviel Würfe erforderlich sind — *alle* Felder besetzt werden? (Es darf natürlich kein Feld doppelt besetzt werden.)
c) Die Wahrscheinlichkeit $\overline{w}_\nu$, daß ν Felder frei bleiben?
d) Die Wahrscheinlichkeit w_ν^*, daß die Summe der auf den freibleibenden Feldern stehenden Zahlen $= \nu$ ist?

Folgendes mag zur Erläuterung dienen: Ist im 1. Wurfe 1 oder 2, im 2. dieselbe Zahl geworfen, so hat das Verfahren bereits mit dem *ersten* Wurfe ein Ende, und wie leicht ersichtlich, *nur* dann: $w_1 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

Bleiben nach dem μten Wurfe die Felder 2 und 3 frei, so ist:
das Verfahren mit dem μten Wurfe zu Ende, falls beim $(\mu + 1)$ten 1, 4 oder 6 fällt (Wahrscheinlichkeit hierfür $= \frac{1}{2}$);
das Verfahren mit dem $(\mu + 1)$ten Wurfe zu Ende, falls 5 fällt.

Fällt dagegen 2 (3), so ist das Verfahren mit dem $(\mu + 2)$ten Wurfe zu Ende, falls in diesem 3 (2) fällt, andernfalls schon mit dem $(\mu + 1)$ten.[1])

Offenbar ist $w = \overline{w}_0 = w_0^*$.

Potsdam, den 23. Oktober 1905. Otto Meissner.

---

147. Der Ort für die Wendepunkte aller Konchoiden des Nikomedes mit derselben Basis, demselben Pol, aber variablem Zwischenstück ist eine Neilsche Parabel.

Speyer. H. Wieleitner.

---

148. Déterminer la direction $A'B'C'$ tèle que la somme des carrés des projections des cotés d'un triangle ABC sur cète direction soit minima.

Paris. E. Lemoine.

B. Lösungen.

Zu **121** (Bd. IX, 90) (Gino Loria). — Les deux théorèmes suivants sont bien connus (v. p. ex. mon ouvrage *Specielle alg. u. transz. Kurven*, Leipzig 1904, B. G. Teubner, p. 446 et 472).

I. Si l'on projette une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit d'un point de l'axe sur un plan normal à cet axe, on obtient une spirale hyperbolique.

II. Si au contraire on projette la même courbe sur le même plan, le centre de projection étant à l'infini, on parvient à une cycloïde, ordinaire, allongée ou raccourcie suivant la direction des rayons projetants.

---

1) Also $w_\mu = \frac{1}{2}$, $w_{\mu+1} = \frac{4}{9}$, $w_{\mu+2} = \frac{1}{18}$ *bei dieser Annahme.*

Cela prouve que la spirale hyperbolique et les cycloïdes sont des genres d'une même espèce de courbes, qu'on obtient en projetant une hélice ordinaire sur un plan perpendiculaire à son axe d'un point quelconque de l'espace. Si (a, b, c) sont les coordonnées du centre de projection et

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h\varphi$$

les équations de l'hélice, les équations générales des rayons projetant la courbe seront

$$\frac{x-a}{a-r\cos\varphi} = \frac{y-b}{b-r\sin\varphi} = \frac{z-c}{c-h\varphi}.$$

En faisant $z = 0$ on en tire

$$x = a - \frac{c(a-r\cos\varphi)}{c-h\varphi}, \quad y = b - \frac{c(a-r\sin\varphi)}{c-h\varphi};$$

ce sont les équations de la courbe de projection (équations qu'il faut mettre à la place de celles qui se trouvent dans l'énoncé de la question, où s'est glissée une faute de transcription).

On peut pousser plus loin ces considérations. On sait, en effet, que la projection orthogonale de l'hélice sur un plan parallèle à l'axe de la courbe est une sinusoïde; donc la spirale hyperbolique, toutes les cycloïdes et la sinusoïde sont des genres d'une espèce étendue de courbes qui comprend toutes les projections (centrales et parallèles) d'une hélice ordinaire sur un plan quelconque.

Ces remarques, quelque simples qu'elles paraissent, me semblent douées d'une certaine valeur: car en établissant les rapports entre des courbes transcendantes différentes, elles viennent jeter des lumières sur ces figures et prouvent que la sphère d'influence de la méthode des projections n'est pas bornée, comme on croyait, au champ algébrique. Cela peut être utile: car on sait que la théorie des courbes transcendantes n'est qu'à ses débuts.

Gênes. Gino Loria.

Zu **124** (Bd. IX, S. 91) (G. Kober). — Von einem Kegelschnitte sind gegeben der Mittelpunkt O, die Richtungen OA und OB der Achsen, der Kurvenpunkt P und die Richtung der Tangente PT. Der Krümmungsmittelpunkt für P sei K. Von P aus fälle man auf die Achsen OA und OB die Lote PA' und PA''; die Tangente PT schneide $A'A''$ in Q und die y-Achse in R; die Normale PN treffe die y-Achse in K''; die Gerade PA' werde von QK'' in K', von OK in X geschnitten. Nach einem vom Aufgabensteller veröffentlichten Satze (Hoffm. Zeitschr., Bd. 36, S. 275, Aufgabe No. 23) ist das Doppelverhältnis der beiden Büschel $P(ABPK)$ und $O(ABPK)$ gleich. Nun schneidet das Büschel $P(ABPK)$ die y-Achse in den Punkten A'', B, R, K'', das Büschel $O(ABPK)$ die Gerade PA' in den Punkten A', B, P, X. Demnach haben diese beiden Punktreihen sowie die beiden durch sie gelegten Strahlenbüschel $Q(A''BRK'')$ und $Q(A'BPX)$ dasselbe Doppelverhältnis. Nun fallen in den zuletzt genannten beiden Büscheln die ersten drei Strahlen des einen mit den entsprechenden Strahlen des andern zusammen; mithin sind auch die vierten Strahlen QK''

und QX identisch, d. h. Punkt X fällt mit K' zusammen. Daraus ergibt sich folgende lineare Konstruktion des Punktes K:

$$(OA, PB) = A', \quad (OB, PN) = K'',$$
$$(OB, PA) = A'', \quad (QK'', PB) = K',$$
$$(A'A'', PT) = Q, \quad (OK', PK'') = K.$$

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **126** (Bd. IX, S. 91) (E. Jahnke). — Die Ecken eines beliebigen Vierecks seien A_1, A_2, A_3, A_4, die Seiten $a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41}$, die Diagonalen a_{12}, a_{24}, die Mitten der Diagonalen M_1, M_2. Ferner sei $M_1 M_2 = m$, $M_2 A_1 = x$, $M_2 A_3 = y$, $M_1 A_2 = u$, $M_1 A_4 = v$. Dann ergibt sich nach bekanntem Satze

aus Dreieck $A_1 A_2 A_3$: $a_{12}^2 + a_{23}^2 = 2u^2 + \frac{1}{2}a_{12}^2$,

" " $A_3 A_4 A_1$: $a_{34}^2 + a_{41}^2 = 2v^2 + \frac{1}{2}a_{13}^2$,

" " $A_4 A_1 A_2$: $a_{41}^2 + a_{12}^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}a_{24}^2$,

" " $A_2 A_3 A_4$: $a_{22}^2 + a_{34}^2 = 2y^2 + \frac{1}{2}a_{24}^2$.

Durch Addition erhält man

$$2(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{41}^2) = 2(u^2 + v^2 + x^2 + y^2) + a_{13}^2 + a_{24}^2.$$

Ferner ergibt sich aus den Dreiecken $M_1 A_2 A_4$ und $M_2 A_1 A_3$:

$$u^2 + v^2 = 2m^2 + \tfrac{1}{2}a_{24}^2, \quad x^2 + y^2 = 2m^2 + \tfrac{1}{2}a_{13}^2.$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein und dividiert durch 2, so folgt $a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{41}^2 = a_{13}^2 + a_{24}^2 + 4m^2$ oder

$$(1) \qquad 4m^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{34}^2 + a_{41}^2 - (a_{12}^2 + a_{24}^2).$$

Hiernach erhält man für ein beliebiges Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$

aus Viereck $A_2 A_3 A_4 A_5$: $4m_1^2 = a_{22}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{52}^2 - (a_{24}^2 + a_{35}^2)$,

" " $A_3 A_4 A_5 A_1$: $4m_2^2 = a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2 + a_{12}^2 - (a_{35}^2 + a_{41}^2)$,

" " $A_4 A_5 A_1 A_2$: $4m_3^2 = a_{45}^2 + a_{51}^2 + a_{12}^2 + a_{24}^2 - (a_{41}^2 + a_{52}^2)$,

" " $A_5 A_1 A_2 A_3$: $4m_4^2 = a_{51}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{35}^2 - (a_{52}^2 + a_{12}^2)$,

" " $A_1 A_2 A_3 A_4$: $4m_5^2 = a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{41}^2 - (a_{13}^2 + a_{24}^2)$.

Durch Addition ergibt sich

$$(2) \qquad 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2) = 3(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2) - (a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{41}^2 + a_{52}^2),$$

was mit der Behauptung identisch ist.

Durch Anwendung der Formeln (1) und (2) auf das Sechseck erhält man für dieses mehrere ähnliche Formeln. Aus den Eckpunkten des Sechs-

Digitized by Google

ecks lassen sich ohne Inversion dieser Punkte 15 Vierecke bilden. Nimmt man zu ihnen noch die Vierecke $A_2A_3A_6A_5$, $A_3A_4A_1A_6$, $A_4A_5A_2A_1$ hinzu, so gehören zu diesen 18 Vierecken 18 Strecken m als Verbindungsstrecken der Mitten ihrer Diagonalen. Mehr als diese 18 Verbindungsstrecken von Diagonalmitten sind im Sechseck nicht möglich, wenn nur Paare solcher Diagonalen berücksichtigt werden, die keinen Endpunkt gemein haben.

Wendet man nun die Formel (1) auf die genannten 18 Vierecke an, so erhält man durch Addition aller Gleichungen

$$4\sum_{i=1}^{i=18} m_i^2 = 7(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{56}^2 + a_{61}^2) - (a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{46}^2 + a_{51}^2 + a_{62}^2).$$

Wendet man die Formel (1) nur auf die Vierecke

$A_2A_3A_6A_5$, $A_3A_4A_1A_6$, $A_4A_5A_2A_1$, $A_2A_3A_5A_6$, $A_3A_4A_6A_1$, $A_4A_5A_1A_2$

an und bezeichnet die ihnen zugehörigen m der Reihe nach mit $m_1, m_2, \ldots m_6$, so ergibt sich

$$2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2) = a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^3 + a_{56}^2 + a_{61}^2.$$

Bildet man aus dem Sechseck durch Weglassung je eines Eckpunktes sechs Fünfecke, so gelangt man durch Anwendung der Formel (2) auf diese sechs Fünfecke zu der Gleichung

$$2\sum_{i=1}^{i=18} m_i^2 = 3(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{56}^2 + a_{61}^2) - (a_{14}^2 + a_{25}^2 + a_{36}^2),$$

wo die Summe auf der linken Seite die Größen m_1, m_2, m_3 nicht enthält.

Prenzlau. W. Stegemann.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

---

3. Kleinere Notizen.

Über die Ableitung der Eulerschen Knickungsformel.

Der Fall der Knickungsbelastung eines geraden Stabes hat in der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre seit jeher eine eigentümliche Stellung eingenommen. Einerseits erscheint die durch die sogen. Eulersche Knickungsformel gegebene Beziehung sehr merkwürdig. Andererseits widerstrebt der Fall einer Behandlung in jener Form, wie sie in der technischen Festigkeitsberechnung häufig angewendet wird, insofern, als es ohne willkürliche Annahmen kaum gelingt, die zulässige Spannung in praktisch brauchbarer Weise in die Formeln einzuführen. Beide Umstände sind vielfach besprochen worden; doch halte ich es trotzdem nicht für überflüssig, den ersteren abermals ins Auge zu fassen, weil er in gewisser Hinsicht immer noch nicht vollkommen beleuchtet sein dürfte. Man mag über die Anwendbarkeit der Eulerschen Formel welcher Ansicht immer sein; es besteht kein Zweifel, daß sie tatsächlich vielfach angewendet wird, ihre allseitige Betrachtung also jedenfalls nützlich ist.

Zur Ableitung der Eulerschen Knickungsformel wird die Gleichung der elastischen Linie benutzt. Der Weg ist, mathematisch genommen, vollständig klar und durchsichtig; man kann aber nicht sagen, wenigstens bei den mir bekannten Darstellnngen, daß dies in mechanischem Sinne auch der Fall wäre. Mathematisches und mechanisches Verständnis ist eben durchaus nicht dasselbe. Die Ableitung der Eulerschen Formel wird meist nicht in einer solchen Weise gedeutet, daß wir das Zustandekommen des Ergebnisses in mechanischem Sinne gut durchschauen. Das Bestreben nun, jenes sozusagen dem mechanischen Gefühle näher zu bringen, liegt den folgenden Ausführungen zugrunde.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die Eulersche Knickungskraft *theoretisch* nicht als Bruchkraft des Stabes angesehen werden kann, weil ihr Wert abgeleitet ist mit Benutzung der Hookeschen Beziehung. Diese stellt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung nicht bis zum Bruche dar, im allgemeinen nicht einmal bis zur Elastizitätsgrenze, sondern nur bis zu einer gewissen Dehnung, welche eben deshalb den Namen Proportionalitätsgrenze erhielt, wenn es sich auch natürlich nicht um ein ganz scharf abgegrenztes Gebiet handelt. Der Eulersche Wert kann nur Bedeutung haben für solche Zustände des Stabes, bei welchen die Voraussetzungen seiner Ableitung erfüllt sind; jedenfalls gewährt er also zunächst keinen Aufschluß über den Bruch des Stabes, sondern nur über Vorgänge, bei welchen die Formänderung unterhalb der Proportionalitätsgrenze bleibt. Euler selbst sah den gefundenen Wert der Knickungskraft als Bruchkraft an, ein Irrtum, der jedoch schon von Lagrange richtig gestellt wurde.[1]) Lagrange gab die zutreffende Deutung jenes Wertes durch den Nachweis, daß er als Grenzwert aufzufassen ist, unterhalb welches eine Ausbiegung durch die Kraft nicht erhalten bleiben kann, von welchem an jedoch die Ausbiegung stetig von Null aus mit der Kraft zunimmt. Euler war zu seiner Folgerung dadurch gekommen, daß bei seiner Ableitung die Größe der Ausbiegung unbestimmt bleibt. Es ergibt sich nur, daß die Kraft den sogen. Eulerschen Wert haben muß, damit eine Ausbiegung möglich ist. Daraus schloß Euler, daß bei jenem Kraftwerte jede Ausbiegung möglich sei, also auch die beim Bruche. Die Unbestimmtheit des Biegungspfeiles bei Euler hat, wie Lagrange zeigte, ihren Grund in der Einführung der Abszissen der elastischen Linie (gemessen in der ursprünglichen Stabrichtung) für die Bogenlängen. Bei Lagrange ergibt sich die Unhaltbarkeit der Eulerschen Auffassung als Folge der Beziehung, welche er zwischen der Kraft und der durch sie bestimmten Ausbiegung findet, zum Unterschiede von der oben angestellten Überlegung, aus welcher nur jenes, allerdings unmittelbar, zu erkennen war.

Wenn es sich bloß um die richtige Auffassung des Eulerschen Wertes handelt, worauf es an dieser Stelle in erster Linie ankommt, so genügt zu diesem Zwecke durchaus die Ableitung Eulers oder überhaupt eine von derselben Art, im Vereine mit der vorgeführten Erwägung, welche vor einer Anwendung der Formeln über das Gebiet ihrer Gültigkeit hinaus schützt. Bevor wir hierauf eingehen, noch einige Worte über die Eigenart

1) Vergl. z. B. Winkler, Abriß der Geschichte der Elastizitätslehre, Technische Blätter (Prag) 3. B 1871.

Digitized by Google

des Ergebnisses. Daß es stets als eigentümlich empfunden wurde, ist bekannt. Beispielsweise sagt Grashof diesbezüglich in seinem verbreiteten Buche „Theorie der Elastizität und Festigkeit"[1]): „Das Ergebnis der vorhergehenden Untersuchungen, daß in allen Fällen erst bei bestimmter Größe der äußeren Kraft P irgend eine Biegung des Stabes möglich wird, ... erscheint so auffallend, daß es von Interesse ist, zu prüfen, ob und inwiefern dieses Ergebnis etwa nur von den Ungenauigkeiten der Entwicklung herrührt". Um uns den Unterschied zwischen der Knickungsbelastung und anderen Belastungsfällen recht deutlich vor Augen zu rücken, stellen wir einen Vergleich an. Wir denken uns einen einerseits eingespannten Stab durch eine Querkraft P gebogen, welche an seinem Ende angreift (Fig. 1). Nun lassen wir die Kraft allmählich abnehmen und achten auf das Verhalten des Stabes. Seine Ausbiegung nimmt stetig ab und verschwindet schließlich, sobald die Kraft P Null wird. Andererseits stellen wir uns jetzt den Stab vor, belastet durch eine Druckkraft in der Richtung der Achse des ungebogenen Stabes (Fig. 2). Die Kraft sei hinreichend groß genommen, um eine seitliche Ausbiegung des Stabendes zu erhalten, welche man auf irgend eine Weise hervorgerufen hat. Wenn wir hier die Kraft allmählich vermindern, so wird die Ausbiegung ebenfalls abnehmen; sie verschwindet jedoch nicht erst beim Nullwerden der Kraft, sondern schon bei einem endlichen Werte P derselben, nämlich sobald P herabgesunken ist zu dem Eulerschen Werte, der „Knickungskraft". Indem wir die beiden Fälle weiter vergleichen, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Biegungsmomente. Das freie Ende des gebogenen Stabes sei als Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen, dessen x-Achse die Richtung der ungebogenen Stabachse hat, sodaß x der in dieser Richtung gemessene Abstand eines Querschnittes vom Stabende ist. Die y-Richtung sei positiv nach der konvexen Seite der elastischen Linie, und wir tragen

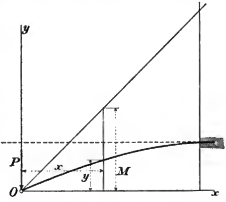


Fig. 1

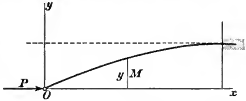


Fig. 2.

1) Berlin, 1878. S. 168.

die Biegungsmomente M als Ordinaten auf.[1]) Bei der Querbelastung, wie der erste betrachtete Fall kurz genannt sei, ist die Kurve der Biegungsmomente eine Gerade durch den Ursprung mit der Gleichung

$$M = Px.$$

Setzen wir voraus, daß man statt des Bogens der elastischen Linie die Abszisse setzen darf, d. h. nehmen wir eine flache elastische Linie an, so sagt die Gleichung aus: Das Biegungsmoment ist unabhängig von der Größe der Einsenknng, die Momentenkurve also unabhängig von der elastischen Linie. Dem gegenüber steht im Falle der Knickungsbelastung die Momentenkurve in einer besonders engen Beziehung zur elastischen Linie. Hier ist das Biegungsmoment

$$M = Py,$$

wo y die Ordinaten der elastischen Linie sind. Die Momentenkurve ist also zur elastischen Linie affin, oder diese kann bei geeigneter Wahl des Momentenmaßstabes[2]) selbst als Momentenkurve angesehen werden. Anders ausgedrückt heißt das: *Wenn bei der Knickungsbelastung die Kraft P eine Ausbiegung zu erhalten imstande ist, so ist jede in diesem Falle mögliche elastische Linie zugleich Momentenkurve, welche von der Kraft geliefert werden muß.* In diesem Verhalten liegt die Eigentümlichkeit gegenüber der Querbelastung.

Die weiteren Betrachtungen sollen an den sogen. Normalfall geknüpft werden (Fig. 3). Wir nehmen daher die beiden Enden des Stabes vollkommen drehbar an (etwa Spitzenlagerung). Um ferner den Inhalt der eben für die Momentenkurve ausgesprochenen Bedingung möglichst losgelöst von unwesentlichem Beiwerk darzustellen, benutzen wir die Bemerkung Mohrs, daß sich die elastische Linie auffassen läßt als Seilkurve, welche

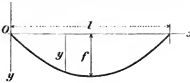


Fig. 3.

zu der als Belastungskurve gedeuteten Momentenkurve gehört, wobei als Polabstand die Länge EJ zu nehmen ist. Dabei ist E der Elastizitätsmodul des Stahlmateriales und J das Trägheitsmoment des Stahquerschnittes für jene Schwerpunktachse, um welche er gedreht wird bei der Biegung. Die Frage: welches ist die elastische Linie, bezw. Momentenkurve, die der angegebenen Bedingung Genüge leistet, nimmt dann die Form an: *welche Belastungskurve erzeugt sich selbst als Seilkurve.* Zur Beantwortung ziehen wir die Differentialgleichung der Seilkurve heran, und natürlich läuft so die Behandlung des Falles schließlich wieder auf eine Integration jener Gleichung hinaus. Immerhin erscheint die Integration hier in ein Gewand gekleidet, welches sich für das Verständnis im mechanischen Sinne weiterhin als nützlich erweisen dürfte. Sind x, y die Koordinaten eines Punktes der Seilkurve, q die spezifische Belastung der Horizontalprojektion und H die

1) In den Figuren ist als Momentenmaßstab $1\,\text{cm} = P\lambda$ kgm genommen, wobei $1\,\text{cm} = \lambda$m der Längenmaßstab ist, sodaß das Moment unmittelbar durch den Kraftarm dargestellt wird.

2) wie sie oben schon angenommen wurde.

Horizontalspannung oder der Polabstand, so hat man als Differentialgleichung der Seilkurve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H}.$$

Da diese Linie ihre eigene Belastungskurve abgeben soll, so ist

$$q = y$$

zu setzen und demnach

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{H}$$

die Differentialgleichung der gesuchten Kurve. Das allgemeine Integral jener ist bekanntlich

$$y = A_1 \sin n_1 x + A_2 \cos n_2 x,$$

wo A_1, A_2 willkürliche Konstanten, n_1, n_2 die Wurzeln der Gleichung

$$n^2 - \frac{1}{H} = 0$$

sind, also

$$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = \pm \sqrt{\frac{1}{H}}.$$

(Der Ausdruck für das Integral ist naheliegend. y muß gemäß der Differentialgleichung eine solche Funktion von x sein, daß sie durch zweimalige Differentiation sich selbst erzeugt bis auf einen konstanten Faktor; außerdem muß sie im vorliegenden Falle offenbar periodisch sein. Setzt man in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich die Bestimmungsgleichung für n). Die Konstanten A_1, A_2 sind so zu wählen, daß den Grenzbedingungen für die Seilkurve Genüge geleistet wird. Da die Kurve durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems geht, muß ihre Gleichung $y = 0$ liefern für $x = 0$, sodaß $A_2 = 0$ zu setzen ist, und die Gleichung die Form annimmt

$$y = f \sin nx,$$

wobei für die Konstante A_1 die Bezeichnung f eingeführt wurde. *Die Kurve ist eine Sinuslinie* und, wie man sieht, ist f der größte vorkommende Wert der Kurvenordinate, also die Einsenkung in der Mitte der Spannweite l, als welche die halbe Wellenlänge der Sinuslinie auftritt.

In der Kurvengleichung erscheint als gegebene Größe der Polabstand oder die Horizontalspannung H (mit Rücksicht auf den Ausdruck für n). H wird bei Annahme einer bestimmten Form der Seilkurve im allgemeinen abhängen von der Spannweite und bei symmetrischen Kurven von der Größe der Scheitelordinate f. Nehmen wir beispielsweise eine Parabel als Seilkurve, deren Hauptachse in die Ordinatenrichtung fällt. Zu ihr gehört als Belastungskurve bekanntlich eine Gerade parallel zur x-Achse mit der Gleichung $q = \text{const.}$, und der Polabstand ist $H = \frac{ql^2}{8f}$. Hält man die Spannweite fest, so ist hier also der Polabstand verkehrt proportional zur Scheitelordinate. Sehen wir nun daraufhin die Sinuslinie an. Der Zusammenhang zwischen H und l ergibt sich aus der Kurvengleichung durch Einsetzen der Endkoordinatenwerte $x = 0$, $y = l$, also $f \sin nl = 0$, woraus

$$nl = \pi$$

Digitized by Google

folgt. Demnach ist hier

$$H = \frac{l^2}{\pi^2},$$

d. h. *die Sinuslinie hat als Seilkurve die Eigenschaft, daß bei ihr der Polabstand nur abhängt von der Spannweite, nicht aber von der Größe der Scheitelordinate.* Mit andern Worten: *alle Sinuslinien zwischen denselben beiden Endpunkten haben denselben Polabstand oder dieselbe Horizontalspannung, wie groß oder klein die Scheitelordinate auch sein mag.*

Dieses Ergebnis übertragen wir nun auf den Fall der Knickungshelastung. Die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Navierschen Form ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EJ},$$

es entspricht also der Faktor $\frac{P}{EJ}$ dem $\frac{1}{H}$ der Seilkurve. Da, wie früher gezeigt, eine im vorliegenden Falle mögliche elastische Linie nur jene sein kann, welche ihre eigene Momentenkurve ist, so sehen wir zunächst nach dem Obigen, daß hier die elastische Linie nur eine Sinuslinie sein kann. Die Größe der Ausbiegung in der Mitte f bleibt willkürlich, weil die obige Differentialgleichung gewonnen ist durch Vertauschung der Bogenlänge mit der Abszisse. Jedoch ist der Biegungspfeil f durch die Voraussetzungen beschränkt, welche der Gültigkeit jener Gleichung zugrunde liegen, und demgemäß nach früherem klein anzunehmen. Weiter folgt aus dem oben dargelegten Umstande, daß bei gegebenem Abstande l der Kurvenendpunkte *jede* Sinuslinie zwischen denselben den Polabstand $\frac{l^2}{\pi^2}$ hat, die Anwendung: *Eine irgendwie erzeugte Ausbiegung des Stabes, und sei sie beliebig klein, kann nur erhalten bleiben, falls die Knickungsbelastung P so groß ist, daß der Polabstand $\frac{EJ}{P}$ die notwendige Größe erreicht,* also wenn $P = P_k$ und

$$\frac{P_k}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad \text{oder} \quad P_k = EJ\frac{\pi^2}{l^2}.$$

Bleibt die Kraft kleiner als dieser Grenzwert, die „Eulersche Knickungskraft", so ist sie nicht imstande, das Zurückgehen des Stabes in seine ursprüngliche gerade Gestalt aus der gebogenen Form zu verhindern.

In der vorgeführten Weise dargestellt, läßt die Ableitung, glaube ich, das Auftreten der Eulerschen Knickungskraft als eines Grenzwertes im mechanischen Sinne überzeugender erscheinen, als wenn rein mathematisch die Größe von P_k gefolgert wird. Betreffs der Übereinstimmung der Formel mit Versuchsergebnissen muß betont werden, daß eine solche gerade hier von vorn herein meist nicht in vollem Maße erwartet werden kann, weil bei diesem eigentümlichen Belastungsfalle bekanntlich einerseits schon eine geringe Abänderung der Voraussetzungen die Form der mathematischen Behandlung und damit der Lösung beeinflußt, andererseits aber in einem vorliegenden Falle einige Verhältnisse, welche da maßgehend im Spiele sind, ihrer Natur nach unbekannt bleiben. Eigentlich muß man sagen, daß sämtliche Voraussetzungen der Knickungsformel tatsächlich kaum oft erfüllt sein werden, wenn auch äußerlich keine Abweichung wahrzunehmen ist. Als solche sind z. B. möglich die Exzentrizität der Belastung, eine schon vor-

handene Krümmung der Stabachse, die Unhomogenität des Stoffes, aus dem der Stab besteht. Besonders dieser letzte Umstand entzieht sich gewöhnlich einer strengen Beurteilung und könnte schon allein eine Ausbiegung veranlassen. Genau genommen kann ja nicht von einem Angriffspunkte der Knickungslast die Rede sein, sondern man hat eine Angriffsfläche, in welcher eine Anzahl von Fasern des Stabes gedrückt werden. Das Zusammenfallen der Druckresultierenden mit der Stabachse wird dann bei der stets vorhandenen unvollkommenen Gleichförmigkeit des Stabes nicht hinreichen, um ungleiche Verkürzungen der gedrückten Fasern zu vermeiden, womit wohl bereits ein Schiefstellen der Querschnitte und Ausbiegen des Stabes eingeleitet werden kann.

Prag, April 1905. F. Jung.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Herausgegeben von G. Hessenberg, K. Kaiser und L. Nelson. Drittes Heft: L. Nelson, Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. — Vier Briefe von Gauß und W. Weber an Fries. — T. Djuvara, Wissenschaftliche und religiöse Weltansicht. Göttingen 1906, Vandenhoek und Ruprecht, S. 395—478. ℳ 2.40.

Amodeo, F., Lezioni di geometria proiettiva. 3. Aufl., Neapel 1905. L. Pierro XIV n. 456. L. 12

Amodeo, F., Gli istituti accademici di Napoli intorno al 1800. Napoli 1905, I. Giannini & Figli. 59.

Annuaire pour l'an 1906 publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris 1906, Gauthier-Villars. fr. 1,50.

Astronomischer Kalender für 1906. Herausgegeben von der K. K. Sternwarte zu Wien. Wien 1906, K. Gerolds Sohn. ℳ 2,40.

Barth, Johann Ambrosius, 25 Jahre Verlagstätigkeit in Leipzig. 1881—1905. Gesamt-Nachtrag zum 100 jährigen Verlagskatalog. 116 S.

Boltzmann, L., Populäre Schriften. Leipzig 1905, A. Barth. 440 S. ℳ 9.

Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906. B. G. Teubner. 310 S. ℳ 8,40

Bürklen, Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1905, Göschen (Sammlung Göschen Nr. 256). 196 S. ℳ 0,80.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Band. 2. Auflage. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 560 S. ℳ 12.

Dyck, W. v., Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 40 S. ℳ 2.

Elsässer, W., Leitfaden der Stereometrie. Stuttgart 1906, F. Grub. VIII n. 90 S. ℳ 1,50.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band VI, 2. Abteil., Heft 1: E. Anding in München. Über Koordinaten und Zeit. — F. Cohn in Königsberg. Reduktion der astronomischen Beobachtungen (Sphärische Astronomie im engeren Sinne.) — C. W. Wirtz in Straßburg. Geographische Ortsbestimmung, Nautische Astronomie. — C. Ed. Caspari in Paris. Theorie der Uhren. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 193 S. ℳ 5,80.

Fine, H. B., A college Algebra. Boston 1906, Ginn & Comp. 595 S.

Fleming, J. A., Elektrische Wellen-Telegraphie. Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 185 S. ℳ 5.

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905, Göschen (Sammlung Schubert Nr. 50). 391 S. ℳ 10.

Jacobsthal, E., Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Inaug.-Diss. Berlin 1906. 89 S.

Kiefer, C. L., Über Strahlenkongruenzen zweiter Klasse fünfter und niedrigerer Ordnung. Inaug.-Diss. Straßburg i. E. 1905. 42 S.

Korold, H., Der Bau des Fixsternsystems. Mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate Aus „Die Wissenschaft“ Nr. 11. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. 256 S.
La Cour, P., und Appel, J., Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. Braunschweig 1905, F. Vieweg & Sohn. XII u. 496, VIII u. 491 S.
Laisant, C., Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance. Genève 1906, Georg & Cie. 167 S.
Leibniz, G. W., Nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 256 S. ℳ 10.
Manes, A., Grundzüge des Versicherungswesens. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 105. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 130 S. ℳ 1,25.
Müller, F., Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 86 S. ℳ. 2,80.
Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. Zehnte Auflage. Erster Band. Zweite Abteilung: Akustik von L. Pfaundler. 547—801. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. ℳ 3,50.
Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. Verwaltungsbericht über das zweite Geschäftsjahr und Bericht über die zweite Ausschußsitzung. München 1906, R. Oldenbourg.
Neumayer, G. v., Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. In zwei Bänden. Dritte Auflage. Lieferung 5—6. Band I, Bogen 21 bis 28; Band II, Bogen 7 bis 8 und 8 bis 13. Hannover 1905, M. Jänecke.
Nielsen, N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906, B. G. Teubner, 326 S. ℳ 12.
Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 519 S. ℳ 16.
Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission von A. Gutzmer. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 48 S ℳ 1.
Remus, K., Der dynamologische Lehrgang. Versuch einer geschlossenen Naturkunde. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 132 S. ℳ 2,60.
Schubert, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. 2 Bände. Leipzig 1905, Göschen. 239 u. 218 S. je ℳ 4.
Simon, M., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 108 S. ℳ 3,20.
Thomae, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 183 S. ℳ 3,60.
Vater, R., Dampf und Dampfmaschine. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 63. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 138 S. ℳ 1,25.
Vater, R., Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 86. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 136 S. ℳ 1,25.
Vivanti, G., Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 512 S. ℳ 12.
Vonderlinn, J., Parallelperspektive Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Leipzig 1905, Göschen (Sammlung Göschen Nr. 260). 112 S. ℳ 0,80.
Weber, H., und Wellstein, J., Encyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende I: Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 539 S. ℳ 9,60.
Wendland, P., Schlußrede der 48. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner nebst Zukunftsprogramm. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 20 S. ℳ 0,80.
Zech, P., Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen in dritter Auflage Herausgegeben v. C. Cranz unter Mitbilfe von v. Eberhard. Stuttgart 1906, Metzler. 220 S. ℳ 5,20.

Berichtigung zum ersten Hefte dieses Bandes.

S. 57, Z. 12 v. u. partant statt pourtant.
S. 61, Z. 9 v. o. pourrait ne pas tendre statt ne pourrait pas tendre.

Digitized by Google

Sur la génération projective des surfaces cubiques.

Extrait d'une lettre adressée à M. le Prof. R. Sturm;

Par M. C. Segre, à Turin.

Dans votre admirable biographie de Cremona[1]) il y a un passage sur les surfaces du 3e ordre, auquel je voudrais, avec votre permission, ajouter quelques éclaircissements pour les lecteurs de l'*Archiv.*

En analysant le mémoire de Cremona[2]), après avoir parlé de la représentation de ces surfaces sur un plan, vous dites (p. 200):

„Um nun zu erkennen, daß jede kubische Fläche so abbildbar ist, wird der Versuch gemacht, zu beweisen, daß jede durch drei kollineare Bündel erzeugt werden kann, welche Erzeugung, wie Clebsch gezeigt hat[3]), *zu einer eindeutigen Abbildung führt. Aber dieser Beweis* (Nr. 118)[4]) *muß als nicht gelungen angesehen werden. Die Fläche wird zunächst durch duplorojektive (oder trilineare) Ebenenbüschel (nach August) erzeugt, aber die Umwandlung dieser Erzeugung in diejenige durch kollineare Ebenenbündel ist nicht richtig. Diese Erzeugung ist nicht immer möglich.“*

Or, il est bien vrai (inutile de le dire, après vous!) que la démonstration de Cremona n'est pas complète. Cependant on peut ajouter que l'idée, sur laquelle elle s'appuie, est très bonue et capable de porter au résultat voulu!

Il s'agit précisément de la considération que Cremona fait vers la fin de ce n°. 118, de trois *faisceaux* de plans duplo-projectifs, ou trilinéaires, comme cas particulier de trois *réseaux* (Bündel) projectifs.

Cette considération n'est pas bien expliquée par Cremona; et lorsqu'il dit d'appliquer la méthode exposée au n°. 45[5]) pour substituer

1) Archiv der Math. u. Ph. (3) 8, 1904, p. 11 et 195.

2) *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Journ. für Math. 68, 1868, p. 1. — Il est reproduit, comme l'on sait, dans les *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung*, Berlin 1870.

3) Journ. für Math. 65, 1866, p. 359.

4) *Grundzüge* Nr. 230.

5) *Grundzüge* Nr. 154.

aux trois faisceaux trois réseaux généraux projectifs, on ne voit pas bien comment cette méthode pourrait s'appliquer.

Mais on arrive à cela sans difficulté au moyen de la représentation analytique! Il est sûr que Cremona se sera inspiré des considérations analytiques des géomètres anglais[1]) dans l'étude synthétique qu'il a faite, dans le *Mémoire* et dans les *Preliminari*, des courbes et surfaces engendrées par des systèmes projectifs, ou, plus en général, représentées par des matrices. La possibilité, pour de telles variétés, de changer les systèmes projectifs générateurs, possibilité que Cremona démontre géométriquement, dans le cas de trois réseaux, au n°. 45 cité, est évidente dans la représentation analytique.

D'ailleurs, lorsqu'on engendre une surface cubique générale F^3 par des faisceaux trilinéaires, August[2]) remarque qu'on peut représenter ces faisceaux par des équations

$$(1) \qquad A_2 + \lambda A_3 = 0, \quad B_3 + \mu B_1 = 0, \quad C_1 + \nu C_2 = 0,$$

la correspondance trilinéaire étant exprimée par:

$$(2) \qquad \lambda \mu \nu = 1.$$

Il s'ensuit que la surface sera représentée par

$$(3) \qquad A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 = 0.$$

C'est justement l'équation d'une F^3 générale, rapportée à deux trièdres conjugués, que Cayley (en collaboration avec Salmon?) avait donnée en 1849.[3]) On la rencontre plus tard dans un mémoire bien connu de Schläfli[4]), qui fait sur elle (p. 114) la remarque suivante.[5]) On peut écrire (3) ainsi:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_2 & A_3 \\ B_1 & 0 & B_3 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1) Cayley, *On the order of certain Systems of Algebraical Equations*, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 4, 1849, p. 132 (= Coll. Math. Papers I p. 457). — Salmon, *On the order of certain Systems of Equations*, Quart. Journ. 1, 1857, p. 246. — Puis, les traités de Salmon.

2) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis.* Berlin 1862.

3) *On the triple tangent Planes of Surfaces of the third Order*, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 4 p. 118 (= Coll. Math. Papers I p. 445). La déclaration de Cayley, à la fin de ce mémoire, est relative à la collaboration avec Salmon. D'après elle, il me semble qu'on puisse bien attribuer cette équation à Cayley.

4) *An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order*, etc. Quart. Journ. 2, 1858, p. 55 et 110.

5) W. Franz Meyer la relève aussi, au n°. 7 de son projet d'article sur les surfaces cubiques, pour *l'Encyclopädie der math. W.*, 1896.

Digitized by Google

De là «par combinaisons linéaires des lignes et des colonnes» (c'est-à-dire en multipliant par un déterminant cubique, à éléments constants), on tire la forme plus générale:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite les différents points de la F^3 correspondent aux rapports $\alpha : \beta : \gamma$ au moyen des formules:

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha r + \beta s + \gamma t = 0 \\ \alpha r' + \beta s' + \gamma t' = 0 \\ \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' = 0. \end{cases}$$

On reconnait dans ces équations la génération que Grassmann avait fait connaitre en 1855[1]), de la surface cubique par trois réseaux projectifs de plans. En effet, si les combinaisons linéaires dont parle Schläfli, sont faites avec des coefficients convenables (généraux), on obtient que r, s, t soient linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'ils déterminent un *véritable* réseau de plans. Et de même pour les deux autres réseaux (6). Il y a donc ici une démonstration de la possibilité d'appliquer la génération de Grassmann à toute F^3 générale. Mais Schläfli n'en parle pas dans son mémoire! Il se borne à tirer des équations (6) des conséquences sur les droites de la surface, les «*double-six*», etc.

Cependant nous savons à-présent, par les lettres de Schläfli à Steiner[2]), que Schläfli avait très bien vu, dès 1854, comment la possibilité de représenter la surface cubique par l'équation (5) ou (3) entraine comme conséquence la génération par trois réseaux projectifs de plans. Il disait même (dans la 3e lettre citée) que de l'équation (3) on peut passer aux faisceaux (1), liés par (2), et de ceux-ci par multiplication aux réseaux projectifs (6).

Or, ce que Cremona a voulu faire pour arriver géométriquement à la génération de Grassmann, revient aussi précisément au passage des équations (1) et (2) aux (6), correspondant à la transformation de (4)

1) *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen*, Journ. für Math. 49 p. 47 (= Ges. Werke, 2. Bd., 1er Th., p. 180). Ce travail porte la date de juillet 1852.

2) „*Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*", *herausgegeben von J. H. Graf:* Mitteilungen der naturforsch. Gesellsch. Bern 1896. Voir les lettres de Schläfli 27 Mai, 7 Juin et 29 Nov. 1854, aux pages 136, 137, 152. (C'est évidemment par une faute d'impression que la 3e lettre porte pour titre „*Steiner an Schläfli*".)

Digitized by Google

en (5). C'est donc une voie bonne! Le passage par les faisceaux de plans en correspondance trilinéaire (obtenus en projetant la F^3 par trois de ses droites, qui ne se coupent pas) donne un moyen simple et sûr pour démontrer géométriquement la génération par trois réseaux projectifs de plans. Nul doute que le raisonnement géométrique de Cremona ne puisse se compléter!

Quant à la possibilité — dont vous dites un mot — de cette génération, veuillez remarquer que Cremona avertit bien[1]): 1°) qu'il s'agit de la F^3 *générale*, c'est-à-dire sans points doubles; 2°) que l'on fait abstraction de la réalité des éléments.

A-t-on recherché si — tout en conservant cette 2° réserve — on peut ôter la 1°; c'est-à-dire si la génération de Grassmann s'étend à *toutes* les F^3 *singulières*? Je ne le sais pas. Mais c'est une recherche qui porte à un résultat bien simple. Dans l'hypothèse qu'une surface cubique puisse être engendrée par trois réseaux projectifs (6), on pourra toujours (comme le remarque aussi Schläfli) trouver des valeurs α, β, γ (où par ex. $\alpha \neq 0$) telles que les plans (6) correspondants se coupent suivant une droite, c'est-à-dire telles qu'on ait identiquement

$$k(\alpha r + \beta s + \gamma t) + k'(\alpha r' + \cdots) + k''(\alpha r'' + \cdots) \equiv 0,$$

en désignant par k, k', k'' des constantes convenables (et par ex. $k \neq 0$). Alors l'équation (5) de la surface pourra se transformer ainsi:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & ks + k's' + k''s'' & kt + k't' + k''t'' \\ \alpha r' + \beta s' + \gamma t' & s' & t' \\ \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'ensuit que la F^3 devra contenir, non seulement la droite déjà considérée
$$\alpha r' + \beta s' + \gamma t' = 0, \quad \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' = 0,$$
mais aussi l'autre
$$ks + k's' + k''s'' = 0, \quad kt + k't' + k''t'' = 0.$$

Or, si ces droites n'en forment qu'une seule, l'équation (7) prouve qu'elle sera une droite *double* de la surface: par suite celle-ci contiendra ∞ droites. Donc: *la surface cubique qui contient une seule droite, c'est-à-dire*[2]) *la surface qui a un point uniplanaire tel que les 3 droites passant par lui coïncident* (*surfaces de* 4° *classe*, *espèce* XX *dans la classi-*

1) Voir la note à la fin de la page 1 du *Mémoire*; puis le commencement du n° 118 cité, et la note relative.

2) Salmon, On the triple tangent Planes to a Surface of the third Order, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 4, 1849, p. 252. (Voir à la page 258.) — Schläfli, *On the distribution of Surfaces of the Third Order into Species*, etc. Phil. Trans. 153 (1863) p. 193.

Digitized by Google

fication de Schläfli), ne peut pas être engendrée par trois réseaux projectifs de plans.

Et c'est là la seule surface cubique qui ne puisse être engendrée ainsi! Car, pour toute autre F^3 douée de points multiples, il y aura certainement[1]) un point double ou triple, par lequel passent deux droites *distinctes* de la surface. Soient $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$ ces deux droites. On voit alors facilement qu'on peut représenter la F^3 ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & p & q \\ x_3 & r & s \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

où p, q, r, s sont des fonctions linéaires des coordonnées. Cela prouve mon assertion.

Je reviens aux générations de la surface cubique générale par faisceaux trilinéaires et par réseaux projectifs. Dans le mémoire cité de Grassmann on trouve plusieurs générations de cette surface (sans la démonstration de leur validité générale), embrassées dans l'énoncé suivant: «*Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde zweiter Stufe durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel ist eine Oberfläche dritter Ordnung.*» Ici, pour Grassmann, le mot «*Ebenenbüschel*» s'applique à deux espèces (*Stufen*) de formes géométriques: les *faisceaux* et les *réseaux* de plans.

Vous avez déjà remarqué depuis longtemps[2]) que, si l'on prend là trois faisceaux de plans, on a la génération de la F^3 par faisceaux trilinéaires retrouvée par August. Et les autres cas — non pas seulement celui classique des trois réseaux, mais aussi ceux de deux réseaux et un faisceau, ou bien d'un réseau et deux faisceaux! — sont aussi très remarquables.[3]) — Mais ce qui me semble surtout digne d'attention, c'est le fait, en ligne générale, de poser un lien projectif, c'est-à-dire par voie de projections et sections, non pas seulement entre des formes (*Gebilde*) de même espèce (*Stufe*), comme l'on faisait avant Grassmann, mais aussi *entre des formes d'espèces différentes.*

La considération des projectivités entre de telles formes ne jouit pas, même chez les auteurs modernes, d'une grande faveur: tandis qu'elle pourrait souvent être très utile.

---

1) Voir, par exemple, Schläfli, loc. cit.

2) Dans la biographie de Grassmann, Math. Annalen 14, 1878, p. 1: voir la fin de la page 19. — Voir aussi, pour les différentes générations des surfaces cubiques: Sturm, Math. Ann. 23, 1884, p. 308 et 599.

3) Ainsi Schröter (Journ. für Math. 96, 1884, p. 283) dit que ces deux constructions „*vor den früheren vielleicht noch den Vorzug verdienen.*"

Digitized by Google

Elle revient — on le sait — à considérer des projectivités *singulières* ou *dégénérées* entre des formes de même espèce.[1])

Supposons, par exemple, pour rester dans les applications aux surfaces cubiques, que l'on ait un réseau de plans

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0 \tag{9}$$

en correspondance projective avec une autre forme de 2e espèce, par ex. un plan Σ, dont j'indiquerai par $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ les coordonnées des points. Alors les $\alpha\beta\gamma$ seront des formes linéaires des λ; et, en les substituant dans (9), l'équation du réseau prendra la forme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0. \tag{10}$$

On aura une *dégénération* dans la correspondance s'il arrive que, dans cette équation (10), l'une des formes P_i vienne à manquer; ou plus généralement s'il arrive que ces formes viennent à être liées par une identité linéaire

$$l_1 P_1 + l_2 P_2 + l_3 P_3 \equiv 0. \tag{11}$$

Alors les plans (10) correspondant à des points $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ généraux formeront seulement un *faisceau*, et non plus un réseau! Seulement le point $(l_1 l_2 l_3)$ sera exceptionnel; car le plan qui lui correspond dans le réseau, sera complètement indéterminé. A chaque plan du faisceau correspondront dans Σ les ∞^1 points d'une droite passant par le point exceptionnel l; et la correspondance donnée se réduira à une projectivité entre le faisceau de plans et le faisceau des droites de Σ passant par l. — On peut poser

$$P_i \equiv a_i A + b_i B,$$

où A et B donnent deux plans du faisceau. Alors on aura

$$\Sigma \lambda_i P_i \equiv \mu_1 A + \mu_2 B,$$

où μ_1, μ_2 sont des formes linéaires connues de $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Ces expressions des μ en fonctions des λ donnent une représentation directe de la projectivité entre le faisceau de plans et la forme Σ.

D'après cela, on comprend bien quelle sorte de lien on obtient entre deux ou trois formes, si on les suppose toutes en correspondance projective avec Σ.

Supposons qu'il s'agisse de trois faisceaux. Alors on pourra représenter les paramètres non homogènes de leurs plans $\mu_1 : \mu_2$, etc.,

1) Il est remarquable que Schläfli, dans la lettre citée du 29 Nov. 1854, considère aussi les équations (1), avec la condition (2), comme représentant trois réseaux *(Ebenengebüsche)* projectifs dégénérés. „*Von den letzteren ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen Ebenengebüsche* . . .“

comme quotients de formes linéaires en $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. De là, en éliminant ces dernières variables, on tire une équation trilinéaire entre ces paramètres. C'est la représentation directe de la correspondance trilinéaire entre les trois faisceaux.

Revenons une dernière fois aux surfaces cubiques. Lorsqu'on représente une F^3 par une équation-déterminant

$$|A_{ik}| = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{12}$$

où les A_{ik} sont des formes linéaires de $x_1, \ldots x_4$, il convient de considérer en même temps l'équation

$$\sum_{i,k} \lambda_i \mu_k A_{ik} = 0. \tag{13}$$

En y fixant $\mu_1 \mu_2 \mu_3$, elle représente, avec les paramètres variables $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, un réseau de plans. Et en changeant successivement les μ, on obtient de (13) *un système linéaire* ∞^2 *de réseaux, projectifs entre eux*, en prenant comme correspondants les plans qui proviennent des mêmes valeurs des λ. La F^3 peut être engendrée par trois quelconques de ces réseaux. Or on peut toujours déterminer les μ de façon que le réseau correspondant se réduise à un faisceau, c'est-à-dire que les trois plans $\Sigma \mu_k A_{1k}$, $\Sigma \mu_k B_{2k}$, $\Sigma \mu_k A_{3k}$ se rencontrent suivant une droite: une droite de la surface! Il y a ainsi, dans le système ∞^2 de réseaux (13), en général, 6 réseaux qui dégénèrent en des faisceaux de plans. On peut en prendre 0, 1, 2, 3 parmi les trois réseaux avec lesquels on veut engendrer la F^3: et on aura les quatre différentes générations de Grassmann!

De tels systèmes linéaires de formes projectives, analogues à (13), se présentent naturellement dans l'étude de toutes les variétés algébriques, qui peuvent être représentées par des matrices à éléments linéaires. M. Schur a appelé l'attention sur eux[1]); et M. Reye en a fait plus tard une large étude.[2]) Il y a lieu, aussi en général, de considérer, dans ces systèmes, des formes dégénérées en formes d'espèce inférieure. Alors il arrive encore que les liens entre plusieurs de ces formes se réduisent, par dégénération, non seulement à des projectivités entre les formes inférieures, mais aussi à des relations plurilinéaires. C'est là un fait, qui ne me semble pas avoir attiré suffisamment l'attention des géomètres: les correspondances plurilinéaires, comme relations projectives dégénérées entre des formes d'espèce supérieure.

Turin, le 25 mars 1905.

1) *Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen.* Math. Ann. 18, 1881, p. 1.

2) *Über lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume.* Journ. für Math. 104—108 (1889 et suiv.)

Digitized by Google

Über die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel.

Von Rudolf Sturm in Breslau.

Ich habe Herrn Segre einige Betrachtungen, zu denen sein Aufsatz mich angeregt, mitgeteilt und erlaube mir, sie hier im Anschluß an denselben zu veröffentlichen.

1. Cremona wünscht in Nr. 118 der Preisarbeit über die Flächen 3. Ordnung[1]) darzutun, daß jede solche Fläche durch kollineare (oder, wie er sagt, projektive) Ebenenbündel erzeugt werden kann. Er geht von der Erzeugung durch trilineare Ebenenbüschel um drei windschiefe *Geraden der Fläche* aus und glaubt, diese in jene Erzeugung umgewandelt zu haben.[2])

Wenn ich an der zitierten Stelle meines Nachrufs gesagt habe: „Diese Erzeugung (durch kollineare Bündel) ist nicht immer möglich," so ist das geschrieben im Hinblick auf den Umstand, daß die eine der fünf Gattungen der kubischen Fläche, nämlich diejenige mit 3 reellen Geraden, die ein Dreiseit bilden, und 24 punktierten, *reell* durch kol-

1) Journ. f. Math. Bd. 68 S. 1; oder Nr. 230 der „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen" (Berlin 1870).

2) Aber in dieser Erörternng befindet sich ein Fehler. Cremona erkennt richtig, daß man die drei Büschel projektiv so auf drei Strahlenbüschel einer Ebene Σ beziehen kann, daß den drei Ebenen einer Terne der Trilinearität (die je einen Punkt der Fläche liefert) drei in einen Punkt znsammenlaufende Strahlen dieser Büschel zugeordnet sind. Nachdem er nun drei Ternen hergestellt hat:

$$A_1,\ A_2,\ A_3;\quad A'_1,\ A'_2,\ A'_3;\quad A''_1,\ A''_2,\ A''_3,$$

glaubt er eine weitere Terne durch die Projektivität:

$$A_1 A'_1 A''_1 A'''_1 \ \overline{\wedge}\ A_2 A'_2 A''_2 A'''_2 \ \overline{\wedge}\ A_3 A'_3 A''_3 A'''_3$$

zu erhalten. Aber erstens laufen nicht, wie er behauptet, die den Ebenen A'''_1, A'''_2, A'''_3 entsprechenden Strahlen in einen Punkt zusammen. Zweitens würden, auch wenn man hierdurch eine Terne erhielte, sich deren nur ∞^1 ergeben, während ∞^2 erforderlich sind. Und wie die Umwandlnng in kollineare Bündel erfolgt ist, ist nicht zn ersehen.

Tatsächlich gibt es unter den ∞^2 Ternen der Trilinearität zwei Systeme von ∞^1 Reihen von je ∞^1 Ternen, deren Elemente die Büschel projektiv durchlaufen (London, Mathem. Annalen Bd. 44, S. 375); aber *zwei* Ternen, nicht drei, bestimmen eine solche Reihe ans jedem Systeme. Die beiden Netze von kubischen Raumkurven anf der Fläche, die im folgenden vorkommen werden, führen zu diesen Systemen.

Digitized by Google

lineare Bündel nicht erzeugt werden kann.[1]) Als ich dies schrieb, hatte ich übersehen, daß Cremona seiner gegenteiligen Behauptung die Anmerkung hinzugefügt hat, daß von der Realität der Elemente abgesehen werden müsse.

Wenn man das tut, so kann man *zum Beweise der Möglichkeit der Erzeugung jeder gegebenen Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel* einfach in folgender Weise gelangen.

Drei windschiefe Geraden der Fläche F^3 — von denen also nicht verlangt wird, daß sie sämtlich reell sind — seien benutzt:

$$a_1,\ a_2,\ a_3.$$

Es gibt 6 Geraden auf der Fläche, welche gegen alle drei windschief sind; und diese zerfallen in zwei Tripel von je drei windschiefen:

$$a_4,\ a_5,\ a_6;\quad a_4',\ a_5',\ a_6',$$

durch welche jenes Tripel je zu einem Sextupel vervollständigt werden kann.[2]) Sollen die drei Geraden a_1, a_2, a_3 für die drei erzeugenden kollinearen Bündel solche sein, in welche entsprechende Ebenen zusammenlaufen, und deren es bekanntlich 6 gibt, die alle gegen einander windschief sind, so müssen entweder a_4, a_5, a_6 oder a_4', a_5', a_6' die übrigen sein; wir sehen, die drei Geraden a_1, a_2, a_3 führen, wenn sie sich in dem ausgezeichneten Sextupel befinden sollen, zu zwei wesentlich verschiedenen Systemen von Erzeugungen durch kollineare Bündel. Nehmen wir aus dem ersten Tripel eine Gerade, etwa a_4, und sind dann O, O', O'', drei beliebige Punkte der Fläche, so haben wir ihre Bündel so kollinear zu machen, daß die nach a_1, a_2, a_3, a_4 gehenden Ebenen entsprechend sind. Die dadurch erzeugte Fläche 3. Ordnung ist mit der gegebenen identisch; denn wir können für beide eine gemeinsame Kurve 13. Ordnung nachweisen, die vier Geraden und die drei Raumkurven 3. Ordnung, welche durch je zwei der Bündel entstehen und daher auf der neuen Fläche liegen. Jede von ihnen trifft die Geraden des ausgezeichneten Sextupels, also O die zu ihm gehörigen vier Geraden in zwei Punkten, geht durch die betreffenden Scheitel, hat daher mit der gegebenen Fläche 10 Punkte gemeinsam und liegt auf ihr.

Daß nun nach a_5, a_6 auch entsprechende Ebenen gehen, folgt daraus, daß a_1, a_2, a_3, a_4 auf F^3 allein durch a_5, a_6 zu einem Sextupel

1) Vergl. meine Flächen 3. Ordnung S. 317, sowie Cremonas Abhandlung selbst Nr. 160 (bezw. Nr. 272 der Grundzüge).

Über die *negativen* Eigenschaften dieser Gattung habe ich mich neuerdings geäußert. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 14, S. 24.

2) Flächen dritter Ordnung S. 56.

vervollständigt werden können, dies also das ausgezeichnete sein muß.[1])

Drei windschiefe Geraden a_1, a_2, a_3 der Fläche haben uns also zu zwei Systemen von je ∞^2 kollinearen Bündeln, „Netzen von kollinearen Bündeln", und zu je ∞^6 Erzeugungen der F^3 durch drei solche Bündel geführt, in denen allen entsprechende Ebenen nach jenen Geraden gehen. Aus den drei Geraden kann anderseits die Fläche auf *eine* Weise durch trilineare Büschel erzeugt werden; diese Erzeugung geht nicht als Spezialfall in eins oder das andere jener Systeme ein.

2. Dazu wollen wir ein solches System etwas genauer betrachten. Zu allen seinen Erzeugungen gehört das ausgezeichnete Sextupel:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots a_6,$$

nach dessen Geraden in allen entsprechende Ebenen gehen; wir vervollständigen es zu einer Doppelsechs:

$$\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6. \end{matrix}$$

Die kubischen Raumkurven, welche durch je zwei der Bündel erzeugt werden, treffen, wie schon bemerkt, die Geraden a zweimal, also die Geraden b gar nicht.[2])

Wir gehen nun von einer bestimmten Erzeugung des Systems aus; die Bündelscheitel seien O, O', O''. Es sei R^3 die kubische Raumkurve, welche durch die Bündel O' und O'' entsteht, so können wir etwa den Scheitel O'' durch irgend einen Punkt $\overline{O}''$ dieser Kurve ersetzen; der Bündel um $\overline{O}''$ wird, vermittels der Kurve, den Bündeln O', O'' kollinear, indem solche Ebenen der drei Bündel, welche nach der nämlichen Doppelsekante der R^3 gehen, entsprechend sind; und infolge dessen wird er auch kollinear zu O.

1) Von den beiden Systemen von Erzeugungen durch kollineare Bündel ist das eine von Herrn Segre in den Formeln (1) bis (6) dargestellt; die andere Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} 0, & A_3, & A_2 \\ B_3, & 0, & B_1 \\ C_2, & C_1, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

der Flächengleichung liefert das andere.

2) Flächen dritter Ordnung S. 191. — Die Hauptergebnisse des Folgenden sind schon ausgesprochen von Schur, Math. Annalen Bd. 18 S. 4 und Reye, Journal f. Math. Bd. 104 S. 225, welche Schriften ja auch von Segre erwähnt werden (sowie auch: Geometrie der Lage 3. Aufl. Bd. III 7. Vortrag). Mir kommt es hier darauf an, *im einzelnen* die Ausartung der Bündel in Büschel vorzuführen.

Digitized by Google

Jetzt sei ein beliebiger Punkt $\mathfrak{O}$ auf der Fläche genommen; er sei der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen $\alpha, \alpha', \alpha''$ aus O, O', O'' und der Ebene $\bar{\alpha}'''$ aus $\bar{O}''$; ferner a der Strahl $O\mathfrak{O}$, a', a'' die ihm entsprechenden Strahlen, in α', α'' gelegen. Wir betrachten die Regelschar ϱ^2, die durch die projektiven Büschel a', a'' entsteht; ihre Geraden sind sämtlich Doppelsekanten von R^3; zu ihnen gehört $\alpha'\alpha''$, welche durch $\mathfrak{O}$ geht; also läuft durch diesen Punkt eine Gerade $\bar{a}''$ der Leitschar; als $\bar{O}''$ nehmen wir nun ihren Schnitt mit R^3. In der Kollineation des Bündels $\bar{O}''$ zu den Bündeln O', O'' ist $\bar{a}''$ den a', a'' entsprechend; denn die Ebenen, welche aus $O', O'', \bar{O}''$ die Geraden der Regelschar ϱ^2 projizieren, gehen bezw. durch $a', a'', \bar{a}''$. Daher sind in der Kollineation zwischen O und $\bar{O}''$ die Strahlen a und $\bar{a}''$ entsprechend; folglich liegt ihr Schnitt $\mathfrak{O}$ auf der durch diese Bündel erzeugten kubischen Raumkurve $\bar{R}^3$; und auf ihr können wir nun wieder $\bar{O}''$ nach $\mathfrak{O}$ verlegen, also in den beliebigen Punkt von F^3[1]); und so können die ursprünglichen Scheitel in beliebige Punkte der Fläche verlegt werden; wir haben das Netz kollinearer Bündel und die ∞^6 Erzeugungen des Systems.

Die Geraden des zugehörigen Sextupels $a_1 \dots a_6$ treffen die R^3 und jede der ∞^2 analogen, zu denen die ∞^2 Bündel zu zweien führen, zweimal. Legen wir $\bar{O}''$ in einen der Begegnungspunkte etwa mit a_1, so erhalten wir *nicht* einen ausartenden Bündel, nicht einmal eine ausartende Kollineation. Den Ebenen aus O', O'' nach der Doppelsekante a_1 entspricht nicht eine unbestimmte Ebene von $\bar{O}''$, sondern die Ebene durch a_1 und die Tangente in O'' an R^3, welche ja den Strahlen $O'\bar{O}''$, $O''\bar{O}''$ entspricht und daher in jener Ebene liegen muß.

3. Dagegen werden wir durch einen Punkt $\mathfrak{O}$, welcher auf einer der 6 Geraden $b_1, \dots b_6$ liegt, zur gewünschten Ausartung kommen. Darauf weist schon der Umstand hin, daß die Kurven R^3 diesen Geraden b nicht begegnen, wir also vermutlich auf eine derselben nur durch eine solche R^3 gelangen, zu der sie selbst gehört.

Sehen wir zunächst zu, wie die Gerade b_1 entsteht; wir wissen, sie — und sie allein auf F^3 — trifft $a_2, a_3, \dots a_6$, aber nicht a_1. Dem Kegel 2. Grades aus O, welcher $a_2, a_3, \dots a_6$ berührt, korrespondieren die analog beschaffenen Kegel 2. Grades in O', O''. Drei entsprechende Kegel 2. Grades in den drei Bündeln erzeugen durch die Schnitte ihrer homologen Berührungsebenen eine Kurve 6. Ordnung; denn sie haben

1) Reye, Geometrie der Lage 1. Aufl. Bd. II S. 176, 3. Aufl. Bd. III 7. Vortrag, sowie Sturm, Math. Ann. Bd. 12 S. 293.

je 6 Tangentialebenen mit den entsprechenden Kegeln 3. Klasse gemein, welche einen ebenen Schnitt der Fläche erzeugen.[1]) Bei unsern 3 Kegeln 2. Grades aber spalten sich vom Erzeugnisse die 5 Geraden $a_2, \dots a_6$ ab, und es bleibt als eigentliches Erzeugnis eine Gerade, die auf jeder von jenen einen Punkt hat, also die Gerade b_1.

Von drei entsprechenden Ebenenbüscheln der Bündel gehen an jene Kegel je zwei Berührungsebenen; also treffen alle ∞^2 kubischen Raumkurven r^3, die durch solche Ebenenbüschel entstehen, die b_1 und ebenso die andern b zweimal. Daß sie den a gar nicht begegnen, ist unmittelbar zu sehen, da zu den Ebenenbüscheln die Ebenen, welche nach den a gehen, im allgemeinen nicht gehören.

Wir legen nun $\mathfrak{O} = \alpha\alpha'\alpha''$ auf b_1; es sei wieder $O\mathfrak{O} = a$ und a', a'' die entsprechenden Strahlen; die durch diese drei Büscbel a, a', a'' erzeugte kubische Raumkurve geht durch $\mathfrak{O}$ und trifft b_1 noch einmal: in $\beta\beta'\beta''$. Die Ebene β, welche durch a gebt, enthält also b_1. Die Gerade $\beta'\beta''$ der Regelschar ϱ^2, die durch a', a'' erzeugt wird, trifft b_1 und die Gerade $\bar{a}''$ aus der Leitschar, die durch $\mathfrak{O}$ geht. Den Schnittpunkt $\bar{O}''$ der $\bar{a}''$ mit R^3 nehmen wir nun als den Punkt, durch den wir O'' ersetzen wollen; wir wissen, $\bar{a}''$ entspricht in $\bar{O}''$ den a', a'', und die den Ebenen β', β'' korrespondierende Ebene $\bar{\beta}''$ muß durch $\bar{a}''$ und durch $\beta'\beta''$ gehen, also enthält sie die Gerade b_1. Die beiden entsprechenden Ebenen β und $\bar{\beta}''$ von O und $\bar{O}''$ gehen demnach durch b_1.

Weiter, durch jeden Punkt von b_1 gehen drei entsprechende Ebenen ξ, ξ', ξ'' und weil durch ihn die Schnittlinie $\xi'\xi''$ geht, so tut es auch die Ebene $\bar{\xi}''$ aus $\bar{O}''$; also treffen sich in jedem Punkte von b_1 die entsprechenden Strahlen $\beta\xi$ und $\bar{\beta}''\bar{\xi}''$ von O und $\bar{O}''$. D. h. die Gerade b_1 gehört zu der kubischen Raumkurve R^3, welche durch die Bündel O und $\bar{O}''$ erzeugt wird. Wenn aber dies Zerfallen statthat, so müssen die beiden Bündel eine sich selbst entsprechende Ebene haben, in der dann der den andern Bestandteil bildende Kegelschnitt K_1 liegt, erzeugt durch die beiden projektiven Strahlenbüschel aus O und O'' in ihr.[2]) In der Tat, nach der Gerade a_1 gehen entsprechende Ebenen dieser beiden kollinearen Bündel: $\gamma_1, \bar{\gamma}_1''$. Weil $\beta\gamma_1$ die b_1 trifft, so muß die entsprechende Gerade $\beta''\bar{\gamma}_1''$ sie in demselben Punkte treffen;

1) Diese Klasse lehren die drei Begegnungspunkte der Ebene desselben mit der kubischen Raumkurve, welche durch drei entsprechende Büschel aus den Bündeln entsteht.

2) Liniengeometrie, Bd. II Nr. 310.

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

wären nnn γ_1 nnd $\overline{\gamma}_1''$ verschieden, so müßten diese beiden bezw. in ihnen gelegenen und einander schneidenden Strahlen sich auf a_1 schneiden, a_1 und b_1 müßten den Schnittpnnkt gemeinsam haben; sie sind aber windschief. Daher sind γ_1 und $\overline{\gamma}_1''$ identisch, oder O und $\overline{O}''$ befinden sich in derselben Ebene γ_1 durch a_1. Den Punkt $(\beta\gamma_1, \overline{\beta}''\gamma_1)$ haben Gerade b_1 und Kegelschnitt K_1 gemeinsam. Eine knbische Raumkurve R^3, Erzeugnis zweier von drei erzeugenden Bündeln unseres Systems, muß, wenn sie der b_1 begegnen soll, in diese Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, dessen Ebene durch a_1 geht. Anf letzterem haben wir die Scheitel der beiden erzengenden Bündel.

Das Erzeugnis ist ausgeartet, die Kollineation noch nicht, aber spezialisiert dnrch die Existenz einer sich selbst entsprechenden Ebene. Verlegen wir nunmehr den Bündelscheitel nach $\mathfrak{O}$ oder, da dieser Punkt sich nicht mehr auszeichnet, in einen beliebigen Punkt O_1 von b_1.

Es sind in den Bündeln O und O_1 solche Ebenen entsprechend, welche nach derselben Doppelsekante dieser zerfallenden R^3 gehen. Sie hat zweierlei Doppelsekanten, s zwischen Gerade und Kegelschnitt, und s', welche in der Ebene des letzteren liegen. Eine beliebige Ebene durch O_1 enthält eine Doppelsekante s', und ihr entspricht in O ständig die Ebene γ_1, und umgekehrt der γ_1, als Ebene von O_1, welche alle Doppelsekanten s' enthält, eine unbestimmte Ebene in O_1. Dagegen die Doppelsekanten s ordnen die Ebenen der beiden Bündel O und O_1 folgendermaßen einander zu. Jeder Ebenē durch b_1 entsprechen alle Ebenen des Büschels um die Gerade von O nach dem zweiten Schnitt V_1 jener Ebene mit dem Kegelschnitte K_1. Sie enthalten die verschiedenen s, welche von diesem Punkte ausgehen und alle in jener Ebene liegen.

Also handelt es sich um die *ausgeartete Kollineation* zwischen O und O_1 mit einer singulären Ebene γ_1 in O nnd einer singulären Achse b_1 in O_1, oder besser, einem singulären Strahlenbüschel (O, γ_1) nnd einem singulären Ebenenbüschel b_1. Zwischen ihnen besteht eine Projektivität π, deren entsprechende Elemente sich auf K_1 treffen: einer Ebene des Ebenenbüschels korrespondiert in der Kollineation jede beliebige Ebene durch den in dieser Projektivität π entsprechenden Strahl.[1]) So weit spielt der Scheitel O_1 gar keine Rolle, nnd wir haben es mit einem Ebenenbüschel statt eines Bündels zu tnn; nur wenn man über die der singulären Ebene γ_1 korrespondierenden Ebenen

1) Diese Ausartungen hat zuerst Hirst (1874) eingehend für Felder (und zwar ausführlicher bei der Korrelation) untersucht: Proceedings of the London Mathem. Society Bd. V, S. 40; vergl. auch Liniengeometrie Bd. I Nr. 265, sowie (für die Korrelation von Bündeln) Math. Annalen Bd. 12, S. 261.

Digitized by Google

Bescheid wissen will, muß man sich einen bestimmten Scheitel vorstellen: ihr entsprechend sind sämtliche Ebenen des Bündels.

4. Die Fläche F^3 erzeugen wir nun durch die drei Bündel O, O', O_1 (oder b_1); von ihnen stehen O, O' in der (gegebenen) allgemeinen Kollineation, O und O_1 in der eben beschriebenen ausgearteten. Dasselbe gilt für O' und O_1; singuläre Achse in O_1 ist wiederum b_1, in O' singuläre Ebene γ_1', und die projektive Beziehung ihres Strahlenbüschels zum Ebenenbüschel um b_1 ergibt sich aus der Kollineation zwischen O und O'; γ_1' geht ebenfalls durch a_1. Erzeugnis dieser Kollineation zwischen O' und O_1 ist die Gerade b_1 und der Kegelschnitt K_1' in der Ebene $\gamma_1' = O'a_1$.

Diese Erzeugung durch drei kollineare Ebenenbündel, von denen einer in „einen Büschel ausgeartet ist", kann einfacher so beschrieben werden. Ein Ebenenbüschel b_1 ist projektiv auf zwei entsprechende Strahlenbüschel kollinearer Bündel O, O', in den Ebenen γ_1, γ_1', bezogen. Man bringe jede Ebene von b_1 mit zwei entsprechenden Ebenen von O, O' zum Schnitte, die durch die ihr entsprechenden Strahlen der Büschel gehen; damit ergibt sich in ihr ein Kegelschnitt, herrührend von der Regelschar, die durch die beiden Ebenenbüschel um jene Strahlen entsteht. Die Trägerflächen dieser Regelscharen gehen alle durch die Schnittlinie $\gamma_1\gamma_1'$ und die R^3, welche durch O und O' erzeugt wird; es hat sich also ein Spezialfall der zweiten Steinerschen Erzeugungsart[1]) ergeben.

5. Wir ersetzen nun O' durch einen Punkt O_2 auf einer zweiten Gerade b_2; die ausgeartete Kollineation zwischen O und O_2 hat zum Erzeugnisse diese Gerade und den Kegelschnitt K_2 in der Ebene $\gamma_2 = Oa_2$. An Stelle von K_1' in γ_1' ist das Geradenpaar b_2c_{12} getreten, wo c_{12} die Gerade ist, welche b_1, b_2, a_1, a_2 trifft und sowohl in a_1b_2 als in a_2b_1 dritte Gerade ist. Erzeugnis der Kollineation zwischen O_1 und O_2 ist die aus b_1, b_2, c_{12} bestehende kubische Raumkurve. Diese Kollineation ist *in zweiter Stufe* ausgeartet, indem die Projektivität π zwischen den singulären Büscheln b_1 und (O_2, γ_1') oder jetzt besser (O_2, δ_2) auch ausgeartet ist, jener eine singuläre Ebene $\delta_1 = b_1c_{12}$ hat, der alle Strahlen in diesem entsprechen, und dieser einen singulären Strahl b_2, dem alle Ebenen in jenem entsprechen.[2]) Zu den schon vorhandenen singulären Elementen b_1, δ_2 sind neu hinzugetreten δ_1,

1) Flächen dritter Ordnung S. 9.

2) Diese Ausartung 2. Stufe (bei der Korrelation) wird von Hirst an der genannten Stelle (Nr. 16) kurz erwähnt; ausführlicher wird sie dann in einem Aufsatze aus 1877: Transunti dell' Accademia dei Lincei Ser. III, Bd. 1 besprochen; vergl. auch: Math. Annalen Bd. 12, S. 270.

b_2, bezw. mit ihnen inzident. In der Tat, wir haben dreierlei Doppelsekanten von (b_1, b_2, c_{12}), nämlich s zwischen b_1 und b_2, s_1 in δ_1 und s_2 in δ_2. Einer beliebigen Ebene von O_1, welche durch eine s_2 geht, korrespondiert immer die δ_2 in O_2, die singuläre Ebene; einer Ebene durch b_1, welche einen Büschel von s enthält, ausgehend von ihrem Schnitte mit b_2, korrespondieren alle Ebenen des Büschels um die Gerade von O_2 nach jenem Schnitte, also um b_2, die so in der Projektivität π allen Ebenen von b_1 entspricht, also singulär im Büschel (O_2, δ_2) wird; endlich der Ebene δ_1, welche alle s_1 enthält, korrespondieren daher alle Ebenen von O_2, insbesondere auch alle durch b_2, weshalb δ_1 singulär im Büschel b_1 wird.

Dieselbe Korrespondenz müssen wir auch aus den Kollineationen zwischen O und O_1, O und O_2, deren Folge die zwischen O_1 und O_2 ist, ableiten können. Erzeugnisse jener Kollineationen sind b_1, K_1 (in $\gamma_1 = Oa_1$), bezw. b_2, K_2 (in $\gamma_2 = Oa_2$). O ist den beiden Kegelschnitten K_1 und K_2 gemeinsam; weil a_1 nicht a_2 trifft, so trifft sie K_2 und ebenso a_2 den K_1; je in einer Ebene liegen $b_1 a_2 c_{12}$, $b_2 a_1 c_{12}$. Eine beliebige Ebene von O_1 enthält eine Doppelsekante von K_1 in γ_1, also entspricht ihr γ_1 in O, diese enthält a_1, welche Doppelsekante zwischen b_2 und K_2 ist; also entspricht ihr und damit jener Ebene von O_1 die Ebene von O_2 nach a_1, d. i. $\delta_2 = b_2 c_{12} a_1$. Einer Ebene durch b_1, deren zweiter Schnitt mit K_1 der Punkt V_1 sei, entspricht jede Ebene durch OV_1; diese Ebenen gehen nach ∞^1 Doppelsekanten zwischen b_2 und K_2, bei denen beide Punkte beweglich sind; projizierend aus O_2 sind alle Ebenen von b_2. Endlich die Ebene $\delta_1 = b_1 c_{12} a_2$ von O_1 enthält a_2 als Doppelsekante zwischen b_1 und K_1, also entspricht ihr in O die Ebene $\gamma_2 = Oa_2$, welche alle Doppelsekanten des K_2 enthält; projizierend aus O_2 ist jede beliebige Ebene. Diese Erzeugung der F^3 durch drei kollineare Bündel, von denen zwei in Büschel ausgeartet sind, kann man so beschreiben. Es seien zwei Ebenenbüschel b_1, b_2 bezw. projektiv auf zwei konzentrische Strahlenbüschel (O, γ_1), (O, γ_2) bezogen. Jede Ebene von O wird mit den beiden Ebenen von b_1, b_2 geschnitten, durch deren entsprechende Strahlen sie geht.

6. Drehen wir jetzt die Ebene γ_2 um a_2, bis der Kegelschnitt K_2 in ein (von $b_1 c_{12}$ verschiedenes) Geradenpaar übergeht, von dem die eine Gerade eine der vier übrigen die a_2 treffenden b sein muß, etwa b_3; die andere ist dann c_{23}. Mit diesem Bestandteil c_{23} trifft K_2 sowohl b_2, als auch K_1, denn c_{23} trifft nicht a_1; und dieser Punkt $c_{23} K_1$ ist dann der gemeinsame Punkt O von K_1 und K_2.

An der Kollineation zwischen O und O_1 hat sich nichts geändert; die zwischen O und O_2 ist gleichfalls noch erster Stufe, es ist nur die

Digitized by Google

leichte Modifikation eingetreten, daß der zweite Schnitt V_2, nach dem entsprechende Elemente der singulären Büschel b_3 und (O, γ_3) gehen, auf dem Bestandteile b_3 sich bewegt; weshalb er besser U_3 genannt werde.

Nun ersetzen wir den Punkt O der Kurve (b_2, b_3, c_{23}), des Erzeugnisses der Bündel O und O_2, durch einen Punkt O_3 von b_3.

Eine beliebige Ebene durch O schneide b_1, b_2, b_3 in U_1, U_2, U_3, K_1 zum zweiten Male in V_1, so entspricht ihr in O_1 die Ebene $b_1 V_1$, in O_2 die Ebene $b_2 U_3$ (oder $b_2 V_2$), in O_3 die Ebene nach U_2, U_3 oder von b_3 nach U_2. Das ist der allgemeine Fall, an den wir uns zunächst halten. Diese Ebenen der Bündel O_1, O_2, O_3 oder der Büschel b_1, b_2, b_3 sind also einander zugeordnet. Die beiden letzten gehen durch die Doppelsekante $U_2 U_3$ zwischen b_2, b_3, durch welche auch die Ebene von O geht; deren Schnitt mit der Ebene aus b_1 ist der erzeugende Punkt. Bleibt diese Ebene und damit V_1 fest, so sind entsprechend in O alle Ebenen durch $O V_1$; jene Doppelsekante gleitet an $O V_1$, b_2, b_3, beschreibt eine Regelschar und schneidet in die Ebene von b_1 einen Kegelschnitt, der die F^3 erzeugt. Alle diese Regelscharen haben a_1 und c_{23} gemein, weil jene in der Ebene von K_1 liegt, diese durch O geht und beide b_2, b_3 treffen; den Trägerflächen sind also b_2, b_3, a_1, c_{23} gemeinsam, und wir erhalten wiederum einen Spezialfall der zweiten Steinerschen Erzeugungsweise mit noch speziellerem Flächenbüschel als oben.

Jene beliebigen Ebenen von b_2, b_3 schneiden sich in einer Doppelsekante $U_2 U_3$; nach dem dritten Schnitte derselben mit F^3 geht die zugeordnete Ebene aus b_1.

Wenn also alle drei Bündel in Ebenenbüschel ausgeartet sind, so liegt Trilinearität vor.

Wir wollen jedoch an den Fällen, wo wir in einem der Bündel, etwa O_3, nicht im Büschel b_3 bleiben, nicht vorübergehen. Der Ebene (b_2, c_{23}) von O, deren dritte Gerade a_3 ist, entsprechen in O_1 die (b_1, a_3), in O_2 die (b_2, a_3), in O_3 aber jede beliebige Ebene. Jene beiden schneiden sich in a_3, einer Gerade der F^3; also bilden sie in der Trilinearität ein neutrales Paar, für welches die Ebene im dritten Büschel unbestimmt ist. Es handelt sich also nur um die Punkte jener Gerade, und, um sie zu erhalten, genügt es, innerhalb des Büschels b_3 zu bleiben, ein Heraustreten ist nicht notwendig. Die Trilinearität der *Büschel* ist hinreichend. Fassen wir zusammen.

Unter den ∞^3 Erzeugungen einer gegebenen F^3 durch drei kollineare Bündel, für welche alle das Sextupel $a_1, a_2, \dots a_6$ das ausgezeichnete ist, nach dessen Geraden immer entsprechende Ebenen gehen, gibt

es sechs Systeme von ∞^4, fünfzehn Systeme von ∞^2 und zwanzig, bei denen ein, zwei, drei Bündel in Büschel ausarten. Die Achsen dieser Büschel gehören nicht zu jenem Sextupel, sondern zu dem, welches mit ihm eine Doppelsechs bildet. Im letzten Falle handelt es sich um Trilinearität.[1])

Der von Herrn Segre zitierte Satz von Graßmann umfaßt deu allgemeiuen Fall uud die Ausartungen, die von diesem vorher aufgezählt werden.

7. Die beiden Schröterschen Erzeugungen[2]) subsumieren sich unserer Betrachtung. Bei der zweiten sind gegeben drei Punkte O, O', Q, zwei Geraden b_1, t und zwei Ebenen σ, σ'. Die Schnitte einer Ebene ξ durch Q mit σ, σ', t werden bezw. mit O, O', b_1 durch Ebeuen verbunden, deren Schnitt erzeugt eine Fläche 3. Ordnung. Die Bündel O, O' sind in allgemeiner Kollineation, dagegen, wenn O_1 ein beliebiger Punkt auf b_1 ist, die Bündel O und O_1 in ausgearteter; b_1 ist der singuläre Ebenenbüschel in O_1, und der singuläre Strahlenbüschel in O ist derjeuige (O, γ), der in der Kollineation (in perspektiver Lage) zwischen O und Q dem Strahlenbüschel (Q, t) entspricht; und in der Projektivität zwischen b_1 und (O, γ) sind homolog ein Strahl von (O, γ) und die Ebene von b_1, welche mit dem dem Strahle in Q entsprechenden sich auf t schneidet.

1) Das folgt natürlich anch aus der Erörterung des Herrn Segre am Schlusse seiner Abhandlung. Nimmt man, sagt er, in:

$$\Sigma\lambda_i\mu_k A_{ik} = 0 \tag{13}$$

feste Werte der μ an, so erhält man einen Ebenenbündel, und die Veränderung der μ führt zu ∞^2 Ebenenbündeln, welche kollinear sind, indem die Ebenen mit denselben λ entsprechend sind; die Scheitel erfüllen die kubische Fläche:

$$|A_{ik}| = 0, \tag{12}$$

und je drei Bündel erzeugen sie. Man kann aber auf sechs Weisen die μ so bestimmen, daß:

$$\Sigma\mu_k A_{1k} = 0, \quad \Sigma\mu_k A_{2k} = 0, \quad \Sigma\mu_k A_{3k} = 0$$

in eine Gerade, statt in einen Punkt zusammenlaufen, also ein Büschel statt eines Bündels entsteht. Nimmt man 1, 2, 3 dieser Bündel, so hat man die Ausartungen der Erzeugungen. Die 6 Geraden sind die $b_1, b_2, \ldots b_6$.

Andererseits lassen sich die λ so bestimmen, daß:

$$\Sigma\lambda_i A_{i1} = 0, \quad \Sigma\lambda_i A_{i2} = 0, \quad \Sigma\lambda_i A_{i3} = 0$$

durch eine Gerade gehen, durch welche dann auch, wie auch die μ seien, die

$$\Sigma\lambda_i\mu_k A_{ik} = 0$$

gehen, d. h. entsprechende Ebenen aus allen jenen kollinearen Bündeln. Diese Geraden, von den vorherigen verschieden, sind die $a_1, a_2, \ldots a_6$. Vertauscht man die Operation mit den λ, μ, so erhält man das zweite der beiden sich stützenden Netze von kollinearen Bündeln, wie Reye sie nennt.

2) Journal für Mathematik Bd. 96, S. 289, 302.

Bei der ersten sind vier Geraden b_1, b_2, t_1, t_2, gegeben und ein Punkt O; eine Ebene ξ durch O und die beiden Ebenen, die von b_1 und b_2 bezw. nach den Schnittpunkten ξt_1, ξt_2 gehen, liefern den erzeugenden Punkt. Sind wieder O_1, O_2 beliebige Punkte auf b_1, b_2, so ist die Kollineation zwischen O und O_1 ausgeartet, derartig, daß b_1 singulärer Ebenenbüschel und (O, t_1) singulärer Strahlenbüschel ist, wo auf t_1 sich schneidende Elemente in der Projektivität einander korrespondieren; und Entsprechendes gilt für O und O_2.[1])

Ich erlaube mir, einige Nachträge zu meinem Nachrufe auf Cremona hier anzuschließen.

In einem Briefe an Beltrami[2]) bespricht Cremona eine interessante Abbildung des Strahlenraums: in das quadratische System 4. Stufe der Kegelschnitte, welche den Tangentendreiecken eines festen Kegelschnitts umgeschrieben sind.

Ferner, in einer Abhandlung von Bertini[3]) wird eine von Cremona und zwar vermittels der eindeutigen Abbildung der Ebene auf die kubische Fläche gefundene involutorische Verwandtschaft erwähnt, die in folgender Weise entsteht. Die Kurven 6. Ordnung mit acht gegebenen Doppelpunkten A, B, ... H bilden ein Gebüsch (lineares System 3. Stufe); die Netze desselben, welche durch einen weiteren Punkt I ausgeschieden werden, haben *immer* noch einen zweiten Punkt K gemeinsam, der so dem J involutorisch zugeordnet wird. Den Geraden entsprechen Kurven 17. Ordnung, für welche die A, ... H sechsfach sind. Es existiert eine Koinzidenzkurve (sich selbst entsprechende Punkte) 9. Ordnung, welche durch jene Punkte dreimal geht.

Endlich bedaure ich, Cremonas Commemorazione, welche er am 10. Juni 1900 — dem Tage, der 1903 sein Todestag werden sollte — in feierlicher Sitzung der Akademie der Lincei ihrem verstorbenen Präsidenten Beltrami gewidmet hat, unerwähnt gelassen zu haben.

Breslau, den 25. März 1905.

---

1) Beim dritten Briefe Schläflis (mit der falschen Überschrift), der von Herrn Segre S. 211 und S. 214 erwähnt wird, finde ich in meinem Exemplar des Briefwechsels die vor längerer Zeit gemachte handschriftliche Bemerkung: „Interessant, daß Schläfli diese Ausartung schon damals erkannt hat“. Wäre doch dieser ungemein interessante Briefwechsel (zumal für mich wegen meiner Beschäftigung mit den kubischen Flächen in den 60er Jahren) sorgfältiger herausgegeben und insbesondere mit Hinweisen auf das, was später festgestellt wurde, versehen worden!

2) Giornale di Matematica Bd. 10, S. 47. — Vergl. Liniengeometrie Bd. I, S. 291.

3) Annali di Matematica Ser. II, Bd. 8, S. 273.

Digitized by Google

Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre.

Von Alexander Gleichen in Berlin.

1. *Vorbemerkung.* — In einer früheren Arbeit (Grundzüge einer Dioptrik der Atmosphäre, Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft II Nr. 2 1900) habe ich gezeigt, wie man die Fundamentalaufgabe der Lichtbrechung in konzentrisch geschichteten Medien — nämlich die Bestimmung der Lage der astigmatischen Bildpunkte eines das Medium durchdringenden unendlich dünnen Bündels lösen kann. An der betreffenden Stelle habe ich mich auf die Betrachtung solcher Bündel beschränkt, die, die Atmosphäre durchdringend, wieder in den leeren Raum austreten, also nicht auf die Oberfläche der Erde gelangen. Die Kenntnis des Verlaufs dieser Bündel ist bekanntlich wichtig für die Aufklärung der merkwürdigen Färbung und Beleuchtung des Mondes bei Mondfinsternissen.

In Folgendem will ich eine Methode angeben, wie man die Lage dieser astigmatischen Bildpunkte finden kann, wenn das betreffende Bündel auf die Oberfläche der Erde gelangt und etwa in die Pupille eines Auges oder in das Objektiv eines Fernrohres oder eines photographischen Apparates dringt.

2. *Die Invariante für Meridionalstrahlen bei der Brechung an einer Kugelfläche.* — In Fig. 1 seien KAP und LBP zwei im Hauptschnitt einfallende unendlich benachbarte Strahlen — d. h. ein sogenanntes Meridionalbündel. Ihr Schnittpunkt P wird in der Sprache der geometrischen Optik der „meridionale Objektpunkt“ genannt. Dieses Bündel wird nun bei AB, wo es die brechende Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r trifft, nach dem Brechungsgesetz gebrochen. Die Strahlen, die vor der Brechung die Richtung AP und BP hatten, erhalten nach der Brechung die Richtung AP' und BP'. Der Punkt P' heißt der „meridionale Bildpunkt“.

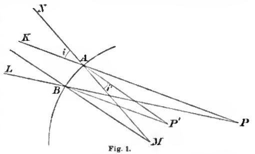


Fig. 1.

Da die Punkte A und B einander unendlich nahe liegen, kann man setzen:

$AP = BP = t$ = meridionale Schnittweite vor der Brechung
$AP' = BP' = t'$ = „ „ nach „ „
$AM = BM = r$.

Ferner sei der Einfallswinkel $KAN = MAP = i$,
„ „ „ Brechungswinkel $P'AM = i'$.

Die Brechungsexponenten vor und nach der Brechung seien n und n'. Die Beziehung zwischen t und t' ist nun bekanntlich durch den Ausdruck

$$(1) \qquad n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = Q^{\mathrm{I}}$$

gegeben. Q^{I} ist eine sogenannte „optische Invariante“, d. h. diese Größe hat vor und nach der Brechung denselben Wert, so daß man auch hat:

$$(2) \qquad n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = Q^{\mathrm{I}}.$$

Durch Vergleich der Formeln (1) und (2) kann man t' finden, wenn n, n', r, i und t gegeben sind, wobei noch das Brechungsgesetz:

$$(3) \qquad n \sin i = n' \sin i'$$

zu berücksichtigen ist.

3. *Neue Transformation der Invarianten.* — Die Lösung unserer eingangs gestellten Aufgabe beruht wesentlich auf einer zweckmäßigen Umformung der Invarianten (1), wozu uns Figur 2 dienen soll.

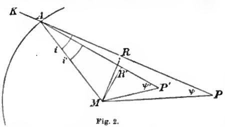


Fig. 2.

Hier sind das einfallende und gebrochene unendlich dünne Bündel der Übersichtlichkeit wegen einfach als gerade Linien KAP und AP' dargestellt, und von M aus Lote MR und MR' auf sie gefällt. Außerdem ist noch M mit den Punkten A, P und P' verbunden. Wir setzen $RP = \tau$, $R'P' = \tau'$. Dann ist offenbar, da $AP = t$ ist:

$$(4) \qquad t = \tau + r \cos i.$$

Setzen wir diesen Wert von t in (1) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen die neue Invariante:

$$(5) \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r \cos i}\right) = \frac{1}{r^2 Q^{\mathrm{I}}}.$$

Setzt man nun weiter: $\sphericalangle APM = \psi$, $\sphericalangle AP'M = \psi'$, so erhält man leicht aus Fig. 2:

(6) $$\tau = r \sin i \operatorname{cotg} \psi, \quad \tau' = r \sin i' \operatorname{cotg} \psi'.$$

Setzt man den Wert für τ in Gleichung (5) ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{r^2 Q^{\mathrm{I}}} = \frac{(\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi)}{n r \sin i}.$$

Bedenkt man, daß $n \sin i = Q$ auch eine optische Invariante ist, so erkennt man, daß

(7) $$\frac{Q}{r \cdot Q^{\mathrm{I}}} = \operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi$$

ebenfalls eine optische Invariante ist.
Man kann also schreiben:

(8) $$\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} \psi'.$$

4. *Satz über konzentrisch geschichtete Medien.* — Nehmen wir nun an, wir hätten ein System von brechenden Medien, die von um den Punkt M konzentrisch gelagerten Kugelflächen begrenzt werden.

Die Radien seien der Reihe nach $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$,
die Einfallswinkel $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda$,

Die meridionalen Schnittpunkte vor jeder einzelnen Brechung seien $P_1, P_2, P_3, \ldots P_\lambda$, die meridionalen Schnittpunkte nach jeder einzelnen Brechung $P_1', P_2', P_3', \ldots P_\lambda'$. Dann ist klar, daß die Punkte: P_2 und P_1', P_3 und $P_2', \ldots, P_\lambda$ und $P_{\lambda-1}'$ identisch sind.

Bildet nun ferner z. B. das nach P_k hingehende Bündel mit der Geraden MP_k den Winkel ψ_k und ensprechend das nach P_k' hingehende Bündel mit der Geraden MP_k' den Winkel ψ_k', wo k alle Werte von 1 bis λ annehmen kann, so erkennt man allgemein die Gültigkeit der Relation

(9) $$\psi_{k-1}' = \psi_k.$$

Denkt man sich jetzt die Gleichung (8) für alle Werte von $k = 1$ bis $k = \lambda$ aufgeschrieben und sämtliche Gleichungen addiert, so wird unter Berücksichtigung von (9)

(10) $$\operatorname{tg} \psi_1 + \sum_{k=\lambda}^{k=1} \operatorname{tg} i_k = \operatorname{tg} \psi_\lambda' + \sum_{k=\lambda}^{k=1} \operatorname{tg} i_k'.$$

Sind also bei dem Vorhandensein von k getrennten Flächen die Winkel

Digitized by Google

i und i' sämtlich bekannt, so ist durch (10) der Winkel ψ_λ' gegeben, falls ψ_1 bekannt ist.

Bemerkt sei hier noch einmal, daß ψ_λ' der Winkel ist, den das aus dem ganzen System austretende Bündel mit der durch M und den letzten Bildpunkt P_λ' gehenden Geraden bildet.

5. *Fall, daß der Brechungsexponent eine gegebene Funktion der Entfernung vom Zentrum ist.* — Ist das Medium konzentrisch derartig geschichtet, daß, wie bei der Atmosphäre, der Brechungsexponent eine stetige Funktion der Entfernung des betreffenden Punktes von M, d. h. in diesem Falle vom Mittelpunkt der Erde ist, so sind sowohl die Größen n_k und n_k' als auch i_k und i_k' nur um unendlich kleine Größen voneinander verschieden, ein Fall, für den wir jetzt Gleichung (10) transformieren wollen. Wir schreiben Gleichung (10)

$$(\operatorname{tg}\psi_\lambda' - \operatorname{tg}\psi_1) = \sum_{k=\lambda}^{k=1} \operatorname{tg} i_k' - \operatorname{tg} i_k. \tag{11}$$

Nun ist für jeden Wert von k, wenn wir

$$i_k' = i_k + d i_k' \tag{11a}$$

setzen:

$$\operatorname{tg} i_k' = \operatorname{tg} i_k + \frac{d i_k}{\cos i_k^2}. \tag{12}$$

Ferner erhält man aus

$$n_k \sin i_k = n_k' \sin i_k', \tag{13}$$

wenn man $n_k' = n_k + dn_k$ setzt, unter Berücksichtigung von (11a):

$$n_k \sin i_k = (n_k + dn_k)(\sin i_k + \cos i_k\, d i_k),$$

oder unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung der Kleinheit:

$$0 = dn_k \sin i_k + n_k \cos i_k\, d i_k, \tag{14}$$

und Gleichung 12 ergibt:

$$\operatorname{tg} i_k' - \operatorname{tg} i_k = -\frac{dn_k \sin i_k}{n_k \cos i_k^2}.$$

Gleichung (11) verwandelt sich demnach in:

$$\operatorname{tg}\psi_\lambda' - \operatorname{tg}\psi_1 = \int_{n=n_{\lambda+1}}^{n=n_1} \frac{\sin i\, dn}{n \cos i^2}. \tag{15}$$

6. *Einführung der Eulerschen Konstanten γ.* — Aus der Refraktionstheorie ist nun seit Euler bekannt, daß, wenn man sich längs eines

die Atmosphäre durchdringenden Lichtstrahles bewegt, das Produkt aus Brechungsexponent, Sinus des Einfallswinkels und Entfernung vom Erdmittelpunkt für jeden Punkt des Lichtweges dasselbe ist. Bezeichnen wir also mit γ eine Größe, die längs des Strahles (der Strahlenkurve) ihren Wert nicht ändert, und bezeichnen die Entfernung des in Frage kommenden Punktes vom Mittelpunkt der Erde mit r, so ist

$$(16) \qquad n r \sin i = \gamma\,.$$

Eliminiert man i aus (16) und (15) und setzt die in bezug auf den Integrationsweg konstante Größe γ vor das Integral, so wird:

$$(17) \qquad \operatorname{tg} \psi_1' - \operatorname{tg} \psi_1 = \gamma \int_{r=R+h}^{r=R} \frac{r^2 n\, dn}{(n^2 r^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß n als Funktion von r gegeben ist, so daß also in dem Integral (17) r allein als Integrationsvariable vorhanden angenommen wird. Dabei ist ferner R der Erdradius und h die Höhe der Atmosphäre. Denkt man sich umgekehrt r als Funktion vor n dargestellt, so hat man die Integration von n_0 bis n_1 auszudehnen, wo n_0 und n_1 die Brechungsexponenten der Luft an der Erdoberfläche sind. Da die Atmosphäre mit größter Wahrscheinlichkeit als kontinuierlich in den leeren Raum übergehend gedacht werden kann, so wird $n_1 = 1$ zu setzen sein. Die Feststellung des Zusammenhangs zwischen r und n ist als Aufgabe der Refraktionstheorie bekanntlich schon mehrfach gelöst worden. Uns kommt es hier wesentlich darauf an, zu zeigen, daß sich die Feststellung der Winkel ψ_1' auf eine Quadratur zurückführen läßt, womit die Aufgabe der Feststellung des meridionalen Bildpunktes vom Standpunkt der geometrischen Optik aus als gelöst betrachtet werden kann.

7. *Die Bestimmung der Lage des meridionalen und sagittalen Bildpunktes im austretenden Bündel.* — Nehmen wir nun an, auf Grund irgend einer der bekannten Refraktionstheorien (Newton, Simpson, Bradley, Euler, Lagrange, Oriani, Laplace, Kramp, Ivory, Ed. Schmidt, W. Lubbock, Bessel u. a.) sei das Integral der Gleichung (17) bewältigt, so kann man die rechte Seite dieser Gleichung als eine Funktion des Parameters γ auffassen, die wir mit A_γ bezeichnen wollen. Dann ist

$$(18) \qquad \operatorname{tg} \psi_1' - \operatorname{tg} \varphi_1 = A_\gamma\,.$$

Die besondere Art der Verwendung der allgemeinen Gleichung (18) hängt von den speziellen Forderungen der gerade vorliegenden Aufgabe

ab. Wir wollen hier noch kurz den wichtigsten Fall behandeln, daß ein punktförmiges Objekt (ein Fixstern) von einem Punkte B der Erdoberfläche aus (Fig. 3) beobachtet wird.

Es sei KA das einfallende Bündel, das sich im Äther mit dem Brechungsexponenten 1 fortpflanzt; von A bis B durchdringt das Lichtbündel als gekrümmte Linie die Atmosphäre. Eine Tangente in B an diese Linie ist durch BTT' dargestellt. Ein in B aufgestelltes Fernrohr, dessen Achse mit BT' zusammenfällt, würde also den betreffenden Fixstern gerade in der Mitte des Gesichtsfeldes zeigen. Der Winkel $T'BZ = z$, den BT' mit den Vertikalen MBZ bildet, heißt die scheinbare Zenitdistanz. Schneidet ferner die verlängerte KA die Gerade BT' in R, so ist $\sphericalangle KRT' = \Delta z$ die *Refraktion*.

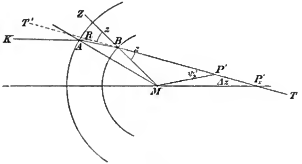


Fig. 3.

Die Tangente BT' ist im vorliegenden Falle als austretender Strahl aufzufassen; auf ihm befindet sich also der durch den Fixstern erzeugte meridionale Bildpunkt P'. Mit bezug auf Gleichung (18) ist $\sphericalangle BP'M = \psi_i'$, während der Winkel φ_1, da der Fixstern unendlich weit entfernt zu denken ist, der Null gleich wird. Aus (18) folgt also:

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tg} \psi_i' = A_\gamma .$$

Aus dem Dreieck BMP' folgt nun, wenn R der Erdradius und $BP' = t_i'$ die Entfernung des meridionalen Bildpunktes von B ist:

$$\text{(20)} \qquad t_i' = R\left(\cos z + \frac{\sin z}{\operatorname{tg} \psi_i'}\right).$$

Die Konstante γ bestimmen wir für den vorliegenden Fall, indem wir Gleichung (16) für den Punkt B gelten lassen. Dann wird

$$\gamma = n_0 R \cdot \sin z,$$

wo n_0 der Brechungsexponent der Luft an der Erdoberfläche ist. Gleichung (20) liefert dann:

$$t_i' = R\left(\cos z + \frac{\sin z}{A_{n_0 R \sin z}}\right), \tag{21}$$

wodurch t_i' für jede Zenitdistanz bestimmt ist.

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch die Lage des sagittalen Bildpunktes des austretenden Bündels bestimmen. Hierzu dient uns die bekannte Tatsache, *daß bei jedem konzentrisch geschichteten System eine Gerade, die vom Objektpunkt aus durch den Mittelpunkt M gezogen wird, das aus dem System austretende Bündel an der Stelle des sagittalen Bildpunktes schneidet.*

Im vorliegendem Falle muß also eine durch M zu KA parallel gezogene Gerade die Gerade BT im sagittalen Bildpunkt P_s' treffen. Setzt man die Entfernungen BP_s des letzteren von B gleich s_i', so findet man sofort aus der Fig. 3, da $\sphericalangle BP_s'M = \triangle z$ ist:

$$s_i' = \frac{R \sin(z + \triangle z)}{\sin \triangle z} \tag{22}$$

oder wegen der Kleinheit von $\triangle z$:

$$s_i' = \frac{R \sin z}{\triangle z}. \tag{23}$$

Außer den beiden astigmatischen Bildpunkten ist aber von dem austretenden Bündel noch ein Querschnitt gegeben, nämlich die Öffnung des in B aufgestellten Fernrohres. Es sind demnach jetzt alle Elemente bestimmt, welche zur Beantwortung der Frage dienen, in wieweit die Strahlenbrechung der Atmosphäre die Schärfe der optischen Abbildung beeinträchtigt, sei es bei visuellem Gebrauch des Fernrohres oder bei photographischen Aufnahmen.

Berlin, den 16. April 1905.

Digitized by Google

Rotation Cyclids and Lamé's Products.

By F. H. Safford, Philadelphia, U. S. A.

Dr. Haentzschel has answered[1]), in an article which has recently come to my notice, certain criticisms which I have made upon his statements in „Reduktion der Potentialgleichung“.[2])

As Dr. Haentzschel states: „Dr. Wangerin has shown[3]) that the reduction of the potential equation

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

to ordinary differential equations is possible for surfaces of revolution whose meridian curves are obtained from

$$\text{(2)} \qquad x + ir = F(t + iu), \quad \left(r = \sqrt{y^2 + z^2}\right)$$

if $F(t + iu)$ is the general integral of

$$\text{(3)} \qquad F'^2(t + iu) = AF^4 + 4BF^3 + 6CF^2 + 4B'F + A'.\text{“}$$

Both writers obtained (3) from

$$\text{(4)} \qquad \frac{F'(t + iu) \cdot F_1'(t - iu)}{[F(t + iu) - F_1(t - iu)]^2} = H(t) + H_1(u),$$

in which F and F_1 are conjugate imaginary functions. This equation is the condition that the reduction of (1) is possible. The families of meridian curves come from (2), and its conjugate form, by the elimination of t and u respectively.

Dr. Wangerin obtained surfaces of the fourth degree, while Dr. Haentzschel obtained surfaces of higher degrees, even of the thirty second degree.

My criticisms[4]), which I shall refer to as (I) and (II), following Dr. Haentzschel's usage, are to the effect that all of the latter's surfaces are of the fourth degree or resolvable into such surfaces, after excluding surfaces which do not satisfy the given conditions.

1) Archiv der Mathematik und Physik (III) **4**, 57—65. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

2) Haentzschel, Reduktion der Potentialgleichung, Berlin 1893.

3) Berliner Monatsberichte, Feb. **21**, 1878.

4) (I) Amer. Journ. of Math. Vol, 21 ,1. (II) Bulletin Am. Math. Soc. 2nd Series Vol **5**, June 1899.

Digitized by Google

Dr. Haentzschel has divided his answer into four parts which I shall proceed to consider in order.

1. The coefficients in (3) are stated by Dr. Haentzschel to be either real or complex, while in the portion of (II) depending upon (2) I have stated that they are real.

Dr. Haentzschel states that I have assumed this without proof, although in the paragraph from which he quotes I have proved my assertion as follows.

„After differentiating (4) successively with respect to t and u, the result is

$$(5)\quad \begin{cases}(F-F_1)[(F-F_1)(F'''F_1'-F'F_1''')+(F''F_1'-F'F_1'')(F'-F_1')\\ \qquad -2F'F_1'(F''+F_1'')-2(F'+F_1')(F'F_1''+F''F_1')]\\ -3(F'-F_1')[(F-F_1)(F''F_1'-F'F_1'')-2F'F_1'(F'+F_1')]=0.\end{cases}$$

This expression is next differentiated three times with respect to the argument of F and the derivatives of F_1 are eliminated. From this result, after integration, comes the following equation defining F:

$$(6)\qquad (F')^2=AF^4+4BF^3+6CF^2+4B'F+A'=R(F).$$

Corresponding to (6),

$$(7)\qquad (F_1')^2=\bar{A}F_1^4+4\bar{B}F_1^3+6\bar{C}F_1^2+4\bar{B}'F_1+\bar{A}'.$$

The conjugate imaginary constants in (6) and (7) come from integration, but must be taken *real*, since (5) is satisfied by F, F_1, and their derivatives from (6) and (7), when and only when the following condition holds:

$$(8)\qquad A-\bar{A}=B-\bar{B}=C-\bar{C}=B'-\bar{B}'=A'-\bar{A}'=0.\text{“}$$

Dr. Haentzschel then gives

$$(9)\qquad r+ix=\varphi(t+iu),$$

a second form which may replace (2) and from which curves may also be obtained. I have treated this case as far as necessary in II p. 437, stating that (8) *will be changed*, with no new results, although concerning this equation Dr. Haentzschel states that at this point I no longer maintain that which I had assumed. Of course (8) is a consequence of (2) only. Since in his book pp. 4, 6, Dr. Haentzschel has assumed that g_2, g_3, the invariants of $R(x)=0$ are real, his constants in (3) are not entirely arbitrary.

2. If α is any root of $R(x)=0$, then the integral of (3) is

$$(10)\qquad F(t+iu)=\alpha+\frac{\frac{1}{4}R'(\alpha)}{\wp(t+iu)-\frac{1}{24}R''(\alpha)}.$$

There are two cases according as α is real or complex. The curves given by

$$(11) \qquad F(t+iu) = \wp(t+iu)$$

also satisfy the given conditions as will appear later. Their equations are

$$(12) \quad \begin{cases} (x^2+r^2-2\varepsilon_1 x-\varepsilon_1^2-\varepsilon_2\varepsilon_3)^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)/(\varrho-\varepsilon_1) \\ +(x^2+r^2-2\varepsilon_2 x-\varepsilon_2^2-\varepsilon_3\varepsilon_1)^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)/(\varrho-\varepsilon_2) \\ +(x^2+r^2-2\varepsilon_3 x-\varepsilon_3^2-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\varrho-\varepsilon_3)=0. \end{cases}$$

$$\varrho = \wp(2t), \quad \wp(2iu).$$

The equations giving ε_1, ε_2, ε_3 in terms of the roots of $R(x)=0$ are

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{A}{12}[(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)], \\ \varepsilon_2 = \frac{A}{12}[(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)], \\ \varepsilon_3 = \frac{A}{12}[(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)]. \end{cases}$$

When α is real, the curves from (10), with the aid of (12) and (13), are

$$(14) \begin{cases} [(x^2+r^2)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)-2x(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\gamma-\beta\gamma\delta]^2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)/(\varrho-\varepsilon_1) \\ +[(x^2+r^2)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-2x(\alpha\gamma-\beta\delta)+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta]^2(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)/(\varrho-\varepsilon_2) \\ +[(x^2+r^2)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)-2x(\alpha\beta-\gamma\delta)+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta]^2(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)/(\varrho-\varepsilon_2)=0. \end{cases}$$

When α is complex, and β is its conjugate, the curves from (10) are

$$(15) \begin{cases} [(x^2+r^2)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-2x(\alpha\gamma-\beta\delta)+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta]^2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)/(\varrho-\varepsilon_1) \\ [(x^2+r^2)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)-2x(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\beta\delta+\alpha\delta\gamma-\alpha\beta\gamma-\beta\gamma\delta]^2(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)/(\varrho-\varepsilon_2) \\ \qquad -4r^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2/(\varrho-\varepsilon_3)=0. \end{cases}$$

From (14) and (15) we may obtain the „Wangerin" curves by the use of this transformation:

$$(16) \qquad x_1+ir_1 = \frac{a+b(x+ir)}{c+d(x+ir)} \qquad (a, b, c, d \text{ real}).$$

The resulting curves are

$$(17) \quad (x_1^2+r_1^2)^2 - Ax_1(x_1^2+r_1^2) \pm B^2x_1^2 \pm C^2r_1^2 + E^3x_1 = \pm D^4$$

and include, as a special case, the „Siebeck" curves, although Dr. Haentzschel implies that (14) are Siebeck curves. In place of (15) Dr. Haentzschel gives

$$(18) \quad \begin{cases} A(x_1^2+r_1^2)^2 + Bx_1(x_1^2+r_1^2) + Cr_1(x_1^2+r_1^2) + Dx_1^2 + Er_1^2 \\ \qquad + Fx_1r_1 + Gx_1 + Hr_1 + I = 0. \end{cases}$$

Reference to his book, p. 24, shows that (18) did not come from (10) directly, but only after a linear transformation followed by

$$(19) \qquad x_2 - \xi = x_1, \quad r_2 - \eta = r_1$$

which changes the axis of rotation.

Digitized by Google

This leads to the discussion of linear transformations with complex coëfficients, satisfying (4). These are treated in I pp. 11 .. 20, and the results are, briefly, that the axis of rotation must be an axis of symmetry of the curves, thus permitting only those transformations which preserve such an axis or transform into such an axis one of the circles of symmetry of the curves. The simplest case, that of real coefficients, leaves the axis of rotation unchanged. It follows that (14) and (15), are admissible curves, also (12), which may be considered as derived from (14), and (17) derived from (14) and (15). But (18) which, by the way, gives surfaces of the eighth degree, does not satisfy the conditions.

Dr. Haentzschel's results in his book, pp. 8 .. 11, apply to (12) and (15) but not to (18). A comparison of my methods with the results just mentioned shows that they could not have been derived by the incorrect comparisons which Dr. Haentzschel suspects.

3. The criteria which I obtained (I pp. 19, 20) are applicable, in the form in which they are stated, after the curves have been transformed so that both coördinate axes are axes of symmetry. But Dr. Haentzschel applies them to (10) directly, which is not permissible, and to that purpose devotes two pages. At the close of this section Dr. Haentzschel remarks that the most of my results in I pp. 11 .. 15, are due to Dr. Wangerin, although the latter states (Monatsberichte p. 165) that his coefficients are real, while mine are complex.

4. The earlier part of this section is devoted to a repetition of the statements which follow from erroneous assumptions in 3. The later part takes notice of the fact that in II I have shown that Dr. Haentzschel's thirty second degree surfaces are in fact of only the sixteenth degree but are resolvable into components of the fourth degree, as there given. This result he says is natural in view of my specialization of the original problem.

Having completed the discussion of Dr. Haentzschel's explicit statements, it might be well to consider separately the source of his erroneous results. Equation (3) defines F, except for the arbitrary constants, and these must be so restricted as to satisfy (4). Now Dr. Haentzschel's curves are obtained without regard to (4), though his resolutions of the first member of (4) are practically complete and are valid for the curves consistent with (4).

University of Pennsylvania, April 1905.

Digitized by Google

Bemerkung zu der vorstehenden Notiz.

Von Emil Haentzschel in Berlin.

Durch die Liebenswürdigkeit der Schriftleitung habe ich Einsicht in die Note des Hrn. *Safford* vor deren Drucklegung nehmen können. Aus der Überzeugung heraus, daß eine Einigung in betreff der Streitpunkte nicht zu erzielen ist, man müßte denn die strittigen Fragen noch einmal in extenso aufrollen, beschränke ich mich auf wenige Bemerkungen.

1. In dem Integral (10) der vorstehenden Differentialgleichung (3) haben bekanntlich die Invarianten g_2 und g_3 die Werte:

$$g_2 = AA' + 3C^2 - 4BB'$$
$$g_3 = ACA' - 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3.$$

Legt man denselben die Bedingung auf reell zu sein, wie es gewöhnlich geschieht, so können trotzdem die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ komplex oder imaginär sein. Auf den Fall

$$r + ix = \varphi(t + iu)$$

habe ich bereits in meinen „Studien" (Berlin, G. Reimer, 1893) und in meiner Abhandlung Band 4 des Archivs S. 58, hingewiesen, wo

$$B = \beta \cdot i; \quad B' = -\beta \cdot i$$

ist; ein anderer Fall ist

$$A = \alpha \cdot i; \quad A' = -\alpha i; \quad B = \beta \cdot i; \quad B' = -\beta \cdot i.$$

Ob sich dadurch neue Resultate ergeben, ist gleichgültig; ich hatte nur zu zeigen, daß die Bedingung (8) des Hrn. *Safford*, diese Koeffizienten müßten reell sein, *falsch* ist.

2. Die Darstellung des *Cartesischen Ovals* (12) durch *Dreikreiskoordinaten* habe ich zuerst in dieser Zeitschrift, II. Reihe, Bd. **69**, 1883 (Über das Cartesische Oval) geleistet. Ein gleiches gilt von den Kurven (14) und (15), vergl. „Studien", II. Teil, 1893. Eine *Siebeck*sche Kurve wird erhalten, wenn man einen σ-Quotienten im Sinne der konformen Abbildung deutet. Demnach schließt die Kurve (14) mindestens 4 *Siebeck*sche Kurven als Sonderfälle in sich.

3. Daß die Bedingungsgleichungen (S. 61, (11)) des Hrn. *Safford* falsch sind, habe ich streng erwiesen. Daran ändert der Einwand desselben nichts, daß ich *zwei* Seiten (S. 62—63) dazu gebraucht habe.

4. Eine *Meridiankurve 32. Grades*, die ich hergeleitet haben soll, wird man vergeblich in meinen „Studien" suchen. Ausdrücklich sage ich, sie wäre vom 16. Grade. Daß sie bei Spezialisierung der Konstanten sich in *Wangerinsche Kurven* zerfällen läßt, habe ich nie bestritten; im Gegenteil, dies ist notwendig.

Digitized by Google

Über Partialbruchzerlegung bei vielfachen Linearfaktoren des Nenners.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Für die Koeffizienten der Zähler bei Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion einer Variabeln, falls der Nenner vielfache Linearfaktoren besitzt, sind verschiedentliche rekurrierende Algorithmen aufgestellt worden. Vergl. Enzyklopädie der mathem. Wiss. I, p. 229.

Im folgenden soll eine *explizite* Darstellung gegeben werden; der Kern des Ergebnisses ist, daß die auftretenden Zahlfaktoren gewisse *Polynomialkoeffizienten* sind. Vergl. mein Lehrbuch der „*Integralrechnung*" (Leipzig, Göschen 1905), p. 326 ff.

1. Sei

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = R(x) \tag{1}$$

die vorgelegte rationale Funktion, wo Zähler und Nenner teilerfremd sind, und wo der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners sei; der letztere sei, in Linearfaktoren zerlegt:

$$\psi(x) = (x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}\ldots = (x-\alpha)^{\mu}\chi(x),^{1)} \tag{2}$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\mathsf{A}(x)}{(x-\alpha)^{\mu}} + \frac{\mathsf{B}(x)}{(x-\beta)^{\nu}} + \cdots, \tag{3}$$

$$\mathsf{A}(x) = A_0 + A_1(x-\alpha) + \frac{1}{2!}A_2(x-\alpha)^2 + \frac{1}{3!}A_3(x-\alpha)^3 + \cdots + \frac{1}{(\mu-1)!}A_{\mu-1}(x-\alpha)^{\mu-1}, \quad \text{etc.}, \tag{4}$$

demnach, unter Benutzung einer eckigen Klammer als Abkürzung:

$$\varphi(x) \equiv \mathsf{A}(x)\chi(x) + (x-\alpha)^{\mu}\,[\,]. \tag{5}$$

Es soll die ganze Funktion $\mathsf{A}(x)$ vom Grade $\mu - 1$ ermittelt werden. Analoge Formeln gelten dann für $\mathsf{B}(x)$ etc.

Differenziert man die Identität (5) einmal, zweimal, ..., $(\mu-1)$ mal nach x, und setzt sodann jedesmal $x = \alpha$, so fallen die mit $(x-\alpha)$ multipliziert gewesenen Glieder weg, und man erhält μ lineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_{\mu-1}$.

1) Im einfachsten Falle: $\psi(x) = (x-\alpha)^{\mu}$ ist natürlich $\varphi(x)$ selbst der fragliche Zähler: $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\mu}}$.

Digitized by Google

Sei $\omega(x)$ irgend eine Funktion von x, so führe man die Bezeichnung ein:

(6) $$\frac{\omega^{(i)}(x)}{i!} = \omega_i(x),$$

wo $\omega^{(i)}(x)$ der $i$te Differentialquotient ist.

Dann gilt für die n-malige Differentiation eines Produktes $f(x) \cdot g(x)$ die Formel ($f_0 = f(x)$, $g_0 = g(x)$, $f_i(x) = f_i$, $g_i(x) = g_i$):

(7) $$(fg)_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \cdots + f_{n-2} g_2 + f_{n-1} g_1 + f_n g_0,$$

wie man leicht durch vollständige Induktion beweist.

Wendet man (7) auf die wiederholte Differentiation von (5) an, bedient sich der Abkürzungen:

(8) $$\varphi_i(\alpha) = \varphi_i, \quad \chi_i(\alpha) = \chi_i, \quad (\varphi(\alpha) = \varphi_0, \ \chi(\alpha) = \chi_0),$$

und berücksichtigt, daß:

(9) $$\mathsf{A}_i(\alpha) = A_i, \quad (\mathsf{A}(\alpha) = A_0),$$

so lauten die fraglichen linearen Gleichungen für die A_i:

(I) $$\begin{cases} \varphi_0 &= A_0 \chi_0 \\ \varphi_1 &= A_0 \chi_1 + A_1 \chi_0 \\ \varphi_2 &= A_0 \chi_2 + A_1 \chi_1 + A_2 \chi_0, \\ \varphi_3 &= A_0 \chi_3 + A_1 \chi_2 + A_2 \chi_1 + A_3 \chi_0, \\ &\ \vdots \\ \varphi_{\mu-1} &= A_0 \chi_{\mu-1} + A_1 \chi_{\mu-2} + A_2 \chi_{\mu-3} + \cdots + A_{\mu-2} \chi_1 + A_{\mu-1} \chi_0. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich die A_i sukzessive entnehmen, was für praktische Rechnungen ausreicht.

Die $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$ lassen sich direkt durch Ableitungen der Nennerfunktion $\psi(x)$ ausdrücken.

Da $[(x-\alpha)^\mu]_\mu = 1$, $[(x-\alpha)^\mu]_{\mu+1} = 0$, etc., so folgt aus μ-maliger, $(\mu+1)$-maliger, ... $(2\mu-1)$-maliger Differentiation der Identität (2), unter Benutzung von (7), für $x = \alpha$:

(10) $$\chi_0 = \psi_\mu, \quad \chi_1 = \psi_{\mu+1}, \ \ldots \ \chi_{\mu-1} = \psi_{2\mu-1}.$$

Es mögen nunmehr die ersten der Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots$ aus (I) explizite berechnet werden. Die erste Gleichung (I) gibt direkt:

(A_0) $$A_0 \chi_0 = \varphi_0.$$

Setzt man diesen Wert von χ_0 in die mit χ_0 multiplizierte zweite Gleichung (I) ein, so kommt für $\chi_0 \varphi_1 - \chi_1 \varphi_0 = \delta_1$:

(A_1) $$A_1 \chi_0^2 = \chi_0 \varphi_1 - \chi_1 \varphi_0 = \delta_1.$$

Die Substitution von (A_0) und (A_1) in die mit χ_0^2 multiplizierte dritte Gleichung (I) liefert für $\chi_0\varphi_2 - \chi_2\varphi_0 = \delta_2$:

$$(A_2) \qquad A_2\chi_0^3 = \chi_0\delta_2 - \chi_1\delta_1.$$

Fährt man so fort, so gewinnt man für die beiden nächsten Koeffizienten A_3, A_4 die Ausdrücke:

$$(A_3) \qquad A_3\chi_0^4 = \chi_0^2\delta_3 - \chi_0\chi_1\delta_2 + \delta_1(\chi_1^2 - \chi_0\chi_2),$$

$$(A_4) \qquad A_4\chi_0^5 = \chi_0^3\delta_4 - \chi_0^2\chi_1\delta_3 + \chi_0\delta_2(\chi_1^2 - \chi_0\chi_2) - \delta_1[\chi_1(\chi_1^2 - \chi_0\chi_2) - \chi_0\chi_2\chi_1 + \chi_0^2\chi_3].$$

Auf diese Weise wird man durch unvollständige Induktion zu der Regel geführt:

„Man bilde sukzessive die Ausdrücke:

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} X_0 = 1, \quad X_1 = \chi_1 X_0, \quad X_2 = \chi_1 X_1 - \chi_0\chi_2 X_0, \\ X_3 = \chi_1 X_2 - \chi_0\chi_2 X_1 + \chi_0^2\chi_3 X_0, \\ X_4 = \chi_1 X_3 - \chi_0\chi_2 X_2 + \chi_0^2\chi_3 X_1 - \chi_0^3\chi_4 X_0, \\ X_5 = \chi_1 X_4 - \chi_0\chi_2 X_3 + \chi_0^2\chi_3 X_2 - \chi_0^3\chi_4 X_1 + \chi_0^4\chi_5 X_0, \\ \quad\vdots \\ X_{i+1} = \chi_1 X_i - \chi_0\chi_2 X_{i-1} + \chi_0^2\chi_3 X_{i-2} - \chi_0^3\chi_4 X_{i-3} + - \cdots \\ \qquad + (-1)^{i-1}\chi_0^{i-1}\chi_i X_1 + (-1)^i\chi_0^i\chi_{i+1} X_0, \qquad {\scriptstyle (i+1<\mu-2)} \end{cases}$$

dann bestimmt sich der Koeffizient A_k in (4) *durch die Formel* $(k = 1, 2, \ldots \mu - 1)$:

$$(\mathrm{III}) \quad A_k\chi_0^{k+1} = \chi_0^{k-1}\delta_k X_0 - \chi_0^{k-2}\delta_{k-1} X_1 + \chi_0^{k-3}\delta_{k-2} X_2 - \chi_0^{k-4}\delta_{k-3} X_3 + - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{k-2}\chi_0^1\delta_2 X_{k-2} + (-1)^{k-1}\delta_1 X_{k-1},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(11) \qquad \chi_0\varphi_k - \chi_k\varphi_0 = \delta_k,$$

oder auch, nach Substitution dieser Werte δ_k in (III)[1] $(k = 0, 1, \ldots \mu - 1)$:

$$(\mathrm{III}') \quad A_k\chi_0^{k+1} = \varphi_k X_0\chi_0^k - \varphi_{k-1} X_1\chi_0^{k-1} + \varphi_{k-2} X_2\chi_0^{k-2} - \varphi_{k-3} X_3\chi_0^{k-3} + - \cdots$$
$$+ (-1)^{k-2}\varphi_2 X_{k-2}\chi_0^2 + (-1)^{k-1}\varphi_1 X_{k-1}\chi_0^1 + (-1)^k\varphi_0 X_k.\text{“}$$

---

1) Die Formel (III) versagt für $k = 0$, und A_0 ist aus (A_0) zu entnehmen; die Formel (III′) dagegen behält für $k = 0$ ihre Gültigkeit.

Die Formel (III) werde nunmehr durch vollständige Induktion bewiesen. Angenommen, sie gelte bis zu einem gewissen $k\,(<\mu-1)$. Aus der $(k+2)$ten Relation (I) folgt dann zunächst:

$$
\begin{aligned}
(12)\quad A_{k+1}\chi_0^{k+2} = {} & \varphi_{k+1}\chi_0^{k+1} - \chi_0^k\chi_{k+1}\cdot(A_0\chi_0) - \chi_0^{k-1}\chi_k\cdot(A_1\chi_0^2) \\
& - \chi_0^k\chi_{k-1}\cdot(A_2\chi_0^3) - \chi_0^{k-2}\chi_{k-2}\cdot(A_2\chi_0^4) - \cdots \\
& - \chi_0^3\chi_4\cdot(A_{k-3}\chi_0^{k-2}) - \chi_0^2\chi_3(A_{k-2}\chi_0^{k-1}) - \chi_0^1\chi_2\cdot(A_{k-1}\chi_0^k) \\
& - \chi_1(A_k\chi_0^{k+1}).
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht auf (II) und (11) geht (12) über in:

$$
\begin{aligned}
(14)\quad A_{k+1}\chi_0^{k+2} = {} & \chi_0^k X_0\delta_{k+1} - \chi_0^{k-1}\chi_k X_0\delta_1 - \chi_0^{k-2}\chi_{k-1}\cdot(\chi_0\delta_2 X_0 - \delta_1 X_1) \\
& - \chi_0^{k-3}\chi_{k-2}(\chi_0^2\delta_2 X_0 - \chi_0\delta_2 X_1 + \delta_1 X_2) \\
& - \chi_0^{k-4}\chi_{k-3}(\chi_0^2\delta_4 X_0 - \chi_0^2\delta_2 X_1 + \chi_0\delta_2 X_2 - \delta_1 X_2) \\
& \qquad \vdots \\
& - \chi_0^2\chi_3(\chi_0^{k-3}\delta_{k-2}X_0 - \chi_0^{k-4}\delta_{k-2}X_1 + \chi_0^{k-5}\delta_{k-4}X_2 - \chi_0^{k-6}\delta_{k-5}X_3 + - \cdots \\
& + (-1)^{k-5}\chi_0^2\delta_2 X_{k-5} + (-1)^{k-4}\chi_0\delta_2 X_{k-4} + (-1)^{k-2}\delta_1 X_{k-3}) \\
& - \chi_0\chi_2(\chi_0^{k-2}\delta_{k-1}X_0 - \chi_0^{k-2}\delta_{k-2}X_1 + \chi_0^{k-4}\delta_{k-2}X_2 - \chi_0^{k-5}\delta_{k-4}X_2 + - \cdots \\
& + (-1)^{k-4}\chi_0^2\delta_2 X_{k-4} + (-1)^{k-2}\chi_0\delta_2 X_{k-2} + (-1)^{k-2}\delta_1 X_{k-2}) \\
& - \chi_1(\chi_0^{k-1}\delta_k X_0 - \chi_0^{k-2}\delta_{k-1}X_1 + \chi_0^{k-2}\delta_{k-2}X_2 - \chi_0^{k-4}\delta_{k-2}X_2 + - \cdots \\
& + (-1)^{k-3}\chi_0^2\delta_2 X_{k-2} + (-1)^{k-2}\chi_0\delta_2 X_{k-2} + (-1)^{k-1}\delta_1 X_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Ordnet man jetzt die rechte Seite von (13) nach δ_{k+1}, δ_k, δ_{k-1}, $\delta_{k-2}, \ldots, \delta_2$, δ_1, so ergibt sich, wiederum auf Grund von (II):

$$
\begin{aligned}
(14)\quad A_{k+1}\chi_0^{k+2} = {} & \chi_0^k\delta_{k+1}X_0 - \chi_0^{k-1}\delta_k X_1 + \chi_0^{k-2}\delta_{k-1}X_2 - \chi_0^{k-3}\delta_{k-2}X_3 + - \cdots \\
& + (-1)^{k-1}\chi_0^1\delta_2 X_{k-1} + (-1)^k\delta_1 X_k;
\end{aligned}
$$

d. i. aber in der Tat die Formel (III), wenn man den Index k durch den nächstfolgenden Index $k+1$ ersetzt. Aus (III) folgt aber auf Grund von (11) und (II) unmittelbar die Formel (III′).

2. Es erübrigt demnach noch, die Darstellung der X_k (II) zu einer expliziten auszugestalten, d. h. die X_k als Aggregate von Potenzen der χ allein zu gewinnen. Es wird nützlich sein, vorab eine Tabelle für die Anfangswerte von k, etwa von $k=0$ bis $k=8$, zu entwerfen. Die

sukzessive Einsetzung der jeweils bereits berechneten $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$ in die Formel für X_k liefert:

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & X_0=1, \quad X_1=\chi_1, \quad X_2=\chi_1^2-\chi_0\chi_2, \quad X_3=\chi_1^3-2\chi_0\chi_1\chi_2+\chi_0^2\chi_3, \\
& X_4=\chi_1^4-3\chi_0\chi_1^2\chi_2+2\chi_0^2\chi_1\chi_3+\chi_0^2\chi_2^2-\chi_0^3\chi_4, \\
& X_5=\chi_1^5-4\chi_0\chi_1^3\chi_2+3\chi_0^2\chi_1^2\chi_3+3\chi_0^2\chi_1\chi_2^2 -2\chi_0^3\chi_1\chi_4-2\chi_0^3\chi_2\chi_3+\chi_0^4\chi_5, \\
& X_6=\chi_1^6-5\chi_0\chi_1^4\chi_2+4\chi_0^2\chi_1^3\chi_3-\chi_0^3\chi_2^3 +\chi_0^4\chi_3^2 -\chi_0^5\chi_6 \\
& \qquad +6\chi_0^2\chi_1^2\chi_2^2-3\chi_0^3\chi_1^2\chi_4 +2\chi_0^4\chi_1\chi_5 \\
& \qquad -6\chi_0^3\chi_1\chi_2\chi_3+2\chi_0^4\chi_2\chi_4, \\
& X_7=\chi_1^7-6\chi_0\chi_1^5\chi_2+5\chi_0^2\chi_1^4\chi_3-4\chi_0^3\chi_1^3\chi_4+3\chi_0^4\chi_1^2\chi_5-2\chi_0^5\chi_1\chi_6+\chi_0^6\chi_7 \\
& \qquad +10\chi_0^2\chi_1^3\chi_2^2-4\chi_0^3\chi_1\chi_2^3+3\chi_0^4\chi_1\chi_3^2-2\chi_0^5\chi_2\chi_5 \\
& \qquad -12\chi_0^3\chi_1^2\chi_2\chi_3+3\chi_0^4\chi_2^2\chi_3-2\chi_0^5\chi_3\chi_4, \\
& X_8=\chi_1^8-7\chi_0\chi_1^6\chi_2+6\chi_0^2\chi_1^5\chi_3-5\chi_0^3\chi_1^4\chi_4+4\chi_0^4\chi_1^3\chi_5-3\chi_0^5\chi_1^2\chi_6+\chi_0^6\chi_4^2-\chi_0^7\chi_8 \\
& \qquad +15\chi_0^2\chi_1^4\chi_2^2-10\chi_0^3\chi_1^2\chi_2^3+4\chi_0^4\chi_1^2\chi_3^2-3\chi_0^5\chi_2^2\chi_4+2\chi_0^6\chi_1\chi_7 \\
& \qquad -20\chi_0^3\chi_1^3\chi_2\chi_3+12\chi_0^4\chi_1^2\chi_2\chi_4-3\chi_0^5\chi_2\chi_3^2+12\chi_0^6\chi_2\chi_6 \\
& \qquad +12\chi_0^4\chi_1\chi_2^2\chi_3-6\chi_0^5\chi_1\chi_2\chi_5+2\chi_0^6\chi_3\chi_5 \\
& \qquad -6\chi_0^5\chi_1\chi_3\chi_4.
\end{aligned}
$$

Ein Blick auf diese Tabelle führt zu einigen Teilgesetzen, die dann leicht beweisbar sind und in ihrer Zusammenfassung zu dem gewünschten Gesetze führen.

(A). „X_k *ist eine* **homogene** *ganze Funktion der* $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_k$ *vom Grade* k."

Für $k = 0, 1, 2 \ldots$ ist das Gesetz ersichtlich erfüllt. Gesetzt, es gelte bis zu einem gewissen Index k. Die Formel für X_{k+1} in (II) zeigt dann, daß die einzelnen Glieder $\chi_1 X_k, \chi_0\chi_2 X_{k-1}, \chi_0^2\chi_3 X_{k-2}, \ldots, \chi_0^{k-1}\chi_k X_1, \chi_0^k\chi_{k+1}X_0$ je ganz und homogen in den $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k+1}$ vom Grade $k+1$ werden, also auch das ganze Aggregat, d. h. in jedem Gliede von der Form $\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2} \ldots \chi_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ ist die Summe der Exponenten gleich $k+1$.

(B). „X_k *ist* **isobar** *in den* $\chi_0\chi_1 \ldots \chi_k$ *vom Gewichte* k."

Es ist also zu zeigen, daß in irgend einem Gliede $\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1} \ldots \chi_k^{\alpha_k}$ von X_k

$$(16) \qquad 0\cdot\alpha_0 + 1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k = k$$

ausfällt.

Für $k = 0, 1, 2$ ist das Gesetz evident. Es gelte wiederum bis zu einem gewissen Index k, so betrachte man die Formel für X_{k+1}

in (II). In ihr erscheint im $(i+1)$ten Gliede $(i=0, 1, \ldots k)$ X_{k-i} multipliziert mit $\chi_0^i\chi_{i+1}$; somit wird das Gewicht von X_{k-i} gemäß (16) erhöht um $(i+1)$, nimmt also den Wert $k+1$ an.

(C). *Das Vorzeichen irgend eines Gliedes* $\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\ldots\chi_k^{\alpha_k}$ *in* X_k *wird durch* $(-1)^{\alpha_0}$ *bestimmt.*"

Das Gesetz ist für $k=0, 1, 2$ richtig, und werde bis zum Index k inkl. als gültig angenommen. Aus dem Gliede $(-1)^{\alpha_0}\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\ldots\chi_k^{\alpha_k}$ in X_k entstehen auf Grund der Formel für X_{k+1} in (II) eine Reihe von Gliedern, durch sukzessive Multiplikation mit $\chi_1, -\chi_0\chi_2, \chi_0^2\chi_3, \ldots, (-1)^i\chi_0^i\chi_{i+1}, \ldots$

Das Vorzeichen irgend eines der neuen Glieder, z. B. des mit $(-1)^i\chi_0^i\chi_{i+1}$ multiplizierten, ist daher $(-1)^{\alpha_0+i}$, während zugleich der Exponent von χ_0 auf α_0+i gestiegen ist.

(D). *„Der absolute numerische Koeffizient irgend eines Gliedes* $\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2}\ldots\chi_k^{\alpha_k}$ *in* X_k *ist* $\frac{(k-\alpha_0)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$, *wo unter* 0! *die Einheit zu verstehen ist.*"

Die Tabelle (15) gibt zunächst zu folgenden Einzelbemerkungen Anlaß. Das einzige Glied in X_k, das χ_0 gar nicht enthält, ist χ_1^k mit dem Koeffizienten 1. Irgend ein Glied von der Form $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a^{\alpha}$ erscheint ebenfalls mit dem Koeffizienten 1 behaftet. Ein Glied von der Form $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a\chi_b$ hat den Faktor 2, ein solches von der Form $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a\chi_b\chi_c$ hat den Faktor 6; weiter kommt Gliedern $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a^{\alpha}\chi_b$ stets der Faktor $\alpha+1$ zu, solchen von der Gestalt $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a^{\alpha}\chi_b^{\beta}$ der Faktor $\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}$, und solchen von der Gestalt $\chi_0^{\alpha_0}\chi_a^{\alpha}\chi_b^{\beta}\chi_c^{\gamma}$ der Faktor $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$.

Auf Grund dieser Beobachtungen, die sich bei Weiterführung der Tabelle (15) bestätigen und analog ergänzen, wird man durch unvollständige Induktion zu der allgemeinen Anzahlformel (D) geführt.

Dieselbe soll wiederum durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Zu dem Zwecke werde eine *Hilfsbetrachtung* voraufgeschickt. Nach den Sätzen (A) und (B) gilt für irgend ein Glied in X_k von der Gestalt $\chi_0^{\alpha_0}\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2}\ldots\chi_k^{\alpha_k}$:

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=k, \\ 0\cdot\alpha_0+1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+\cdots+k\alpha_k=k, \end{cases}$$

also durch Subtraktion:

$$\alpha_0=1\cdot\alpha_2+2\cdot\alpha_3+\cdots+(k-1)\,\alpha_k. \tag{17}$$

Berücksichtigt man nur die Exponenten $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \ldots$, die >0 sind, so lautet (17):

$$\alpha_0=(a-1)\alpha_a+(b-1)\alpha_b+(c-1)\alpha_c+\cdots, \tag{17'}$$

d. h. man hat den *Hilfssatz: „Es ist notwendig α_0 nicht kleiner als $a-1$, $b-1$, ... etc.“* ($a, b, c, \ldots > 1$).

Die Regel (D) sei jetzt bis zu einem Index k als richtig angenommen und soll für den Index $k+1$ bewiesen werden.

Sei, wie oben, $\chi_1^{\beta_0}\chi_1^{\beta_1}\chi_2^{\beta_2}\ldots\chi_{k+1}^{\beta_{k+1}}$ irgend ein Glied von X_{k+1}. Man trenne die Fälle $\beta_1 > 0$ und $\beta_1 = 0$, und berücksichtige von den übrigen Exponenten nur diejenigen, die > 0 sind; schreibe also $\chi_0^{\beta_0}\chi_1^{\beta_1}\chi_a^{\alpha}\chi_b^{\beta}\chi_c^{\gamma}\ldots\chi_r^{\varrho}$, wo die auf 1 folgenden Indizes $a, b, c, \ldots$ der Größe nach geordnet seien.[1])

Im ersten Falle $\beta_1 > 0$ läßt sich dann von dem vorgelegten Gliede entweder ein Faktor χ_1 abspalten, oder aber ein Faktor $\chi_0^{a-1}\chi_a$, oder aber $\chi_0^{b-1}\chi_b$, etc., oder endlich $\chi_0^{r-1}\chi_r$. Jede dieser Abspaltungen ist möglich, da nach dem obigen Hilfssatze β_0 nicht kleiner ist als irgend eine der Zahlen $a-1$, $b-1$, etc.

Gemäß (II) treten dann die nach der jeweiligen Abspaltung aus $\chi_0^{\beta_0}\chi_1^{\beta_1}\chi_a^{\alpha}\chi_b^{\beta}\chi_c^{\gamma}\ldots\chi_r^{\varrho}$ verbleibenden Restfaktoren resp. in den Aggregaten X_k, $X_{k-(a-1)}$, $X_{k-(b-1)}$, etc. auf, und auf Grund von (C) muß die Summe der absoluten Koeffizienten jener Restfaktoren in X_k, $X_{k-(a-1)}$, $X_{k-(b-1)}$ etc., eben der gesuchte absolute Koeffizient M von $\chi_0^{\beta_0}\chi_1^{\beta_1}\chi_a^{\alpha}\ldots\chi_r^{\varrho}$ in X_{k+1} sein.

Für jeden der genannten Restfaktoren ist die Summe der Exponenten von $\chi_1, \chi_a, \chi_b, \ldots \chi_r$ um 1 kleiner als die ursprüngliche Summe $\beta_1+\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varrho = k+1-\beta_0$, mithin gleich $k-\beta_0$. Der zugehörige Zahlenkoeffizient enthält daher nach Voraussetzung stets denselben Zähler $(k-\beta_0)!$, während der jedesmalige Nenner der Reihe nach lautet:

$$(\beta_1-1)!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\varrho!,\ \beta_1!\,(\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\ldots\varrho!,\ \beta_1!\,\alpha!\,(\beta-1)!\,\gamma!\ldots\varrho!,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \beta_1!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots(\varrho-1)!$$

Demnach wird die Summe dieser Koeffizienten, d. i. aber der gesuchte Koeffizient M selber:

$$(18)\qquad M = \frac{(k-\beta_0)!}{(\beta_1-1)!\,(\alpha-1)!\,(\beta-1)!\ldots(\varrho-1)!}\left\{\frac{\beta_1+\alpha+\beta+\ldots+\varrho}{\beta_1\alpha\beta\gamma\ldots\varrho}\right\}$$
$$= \frac{(k+1-\beta_0)!}{\beta_1!\,\alpha!\,\beta!\ldots\varrho!}.$$

Das ist aber das Gesetz (D) für den Index $k+1$.

Im zweiten Falle $\beta_1 = 0$ ist das Verfahren genau das nämliche, nur daß die von β_1 abhängigen Terme von vornherein in Wegfall kommen. Man erhält die zu (18) parallele Formel:

$$(18')\quad M = \frac{(k-\beta_0)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!\ldots(\varrho-1)!}\left\{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varrho}{\alpha\beta\gamma\ldots\varrho}\right\} = \frac{(k+1-\beta_0)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\varrho!}.$$

1) Der Fall $\beta_0 = 0$, i. e. χ_1^{k+1} kann hier beiseite gelassen werden, da er nach obigem erledigt ist (Koeffizient $= 1$).

In beiden Fällen aber ist offenbar mit Rücksicht auf die Festsetzung $0! = 1$ die Fassung des Satzes (D) zulässig.

Um die vier Sätze (A), (B), (C), (D) zusammenzufassen, erscheint es am zweckmäßigsten, worauf schon die Tabelle (15) hinweist, den Ausdruck X_k nach steigenden Potenzen von χ_0 anzuordnen. Dann gilt der Satz:

(E). *„Denkt man sich den Ausdruck X_k in* (II) *nach steigenden Potenzen von χ_0 angeordnet, so erscheint er als ein alternierendes Aggregat von der Gestalt:*

$$(\mathrm{II}') \qquad X_k = P_k - \chi_0 P_{k-1} + \chi_0^2 P_{k-2} - \chi_0^3 P_{k-3} + - \cdots + (-1)^{k-2}\chi_0^{k-2} P_2 + (-1)^{k-1}\chi_0^{k-1} P_1,$$

wo die P von χ_0 frei sind. Dann ist P_i eine homogene und isobare ganze Form der $\chi_1 \chi_2 \ldots \chi_k$ vom Grade i und vom Gewichte k, und zwar enthält P_i die Gesamtheit aller positiven Glieder von der Form $\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2}\chi_3^{\alpha_3}\cdots\chi_k^{\alpha_k}$, wo die Exponenten α ($\geqq 0$) nur den beiden Bedingungen

$$(19) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k = i \\ 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \alpha_3 + \cdots + k\alpha_k = k \end{cases}$$

zu genügen haben, während der numerische Koeffizient des Gliedes $\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2}\chi_3^{\alpha_3}\cdots\chi_k^{\alpha_k}$ durch $\frac{i!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_k!}$ geliefert wird, wobei stets $0!$ *durch* 1 *zu ersetzen ist."*

Da die numerischen Koeffizienten dieses Satzes ersichtlich Polynomialkoeffizienten sind, so liegt es nahe, den Satz (E) in Beziehung zum polynomischen Satze zu setzen. Nach dem letzteren ist:

$$(20) \qquad (\chi_1 + \chi_2 + \cdots \chi_k)^i = \sum \frac{i!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\,\chi_1^{\alpha_1}\chi_2^{\alpha_2}\cdots\chi_k^{\alpha_k},$$

wo sich die Summe auf alle Zusammenstellungen von Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ bezieht, für die

$$(21) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = i.$$

Vergleicht man dies mit dem Satze (E), so erkennt man, daß der Ausdruck P_i ($i = 1, 2, \ldots k$) nichts anderes ist, als die Gesamtheit aller der Glieder in (20), die auch noch die zweite Bedingung (19) erfüllen, d. i. die das Gewicht k besitzen. Danach gilt noch der Satz:

(F). *„Der Ausdruck P_i im Satze* (E) *ist die Gesamtheit der Glieder in der polynomischen Entwicklung von $(\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_k)^i$, denen das Gewicht k zukommt."*

Durch die Formeln (III), (III') in Verbindung mit den Sätzen (E), (F), ist die Frage nach der expliziten Darstellung der Partial-

Digitized by Google

bruchzerlegung (3) völlig beantwortet. Es sei nocb bemerkt, daß auf Grund der Sätze (A), (B) der Faktor von φ_{k-i} $(i = 0, 1, \ldots k)$ in (III′) eine homogene und isobare Form der $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_i$ ist vom Grade k und vom Gewicbte i.

Es braucht wobl kaum bemerkt zu werden, daß mit Obigem aucb die entsprecbende Aufgabe der *Interpolationsrechnung* ihre explizite Lösung gefunden hat. Multipliziert man nämlich in (3) wieder mit $\psi(x)$ berauf, so erscbeint der Zäbler $\varphi(x)$ in der Gestalt:

$$(3') \qquad \varphi(x) = \sum_\alpha \mathsf{A}(x)\,\chi(x) = \psi(x) \sum_\alpha \frac{\mathsf{A}(x)}{(x-\alpha^\mu)} \cdot$$

Trägt man nunmebr in $\mathsf{A}(x)$ (4) für die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_{\mu-1}$ [und entsprechend in $\mathsf{B}(x)$ für die $B_0, B_1, \ldots B_{\nu-1}$ etc.] ihre Werte aus (III′) ein, und substituiert zugleich in (III′) für die $X_0, X_1, \ldots$ ihre Werte aus (E), wobei jetzt genauer unter $P_\varrho^{(k)}$ das Aggregat der Glieder vom Gewicbte k in der polynomiscben Entwicklung von $(\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_k)^\varrho$ zu verstehen ist, und ordnet sodann nacb den $\varphi_k = \varphi_k(\alpha)$, so nimmt $\varphi(x)$ in (3′) die Gestalt der Doppelsumme an:

$$(F) \quad \varphi(x) \equiv \sum_\alpha \sum_{k=0}^{k=\mu-1} \chi(x)\,\Phi_{\alpha,k}(x-\alpha)^k \varphi_k(\alpha)$$

$$\equiv \psi(x) \sum_\alpha \sum_{k=0}^{k=\mu-1} (x-\alpha)^{k-\mu} \Phi_{\alpha,k}\,\varphi_k(\alpha),$$

$$\Phi_{\alpha,k} = \frac{1}{k!}\chi_0^{-1} - \frac{1}{(k+1)!}\chi_0^{-2}(x-\alpha)\,P_1^{(1)} + \frac{1}{(k+2)!}\chi_0^{-3}(x-\alpha)^2\{P_2^{(2)} - \chi_0 P_1^{(2)}\} - + \cdots$$

$$+ (-1)^i \frac{1}{(k+i)!}\chi_0^{-(i+1)}(x-\alpha)^i\{P_i^{(i)} - \chi_0 P_{i-1}^{(i)} + \chi_0^2 P_{i-2}^{(i)} - \cdots + (-1)^{i-1}\chi_0^{i-1} P_1^{(i)}\}$$

$$+ \cdots + (-1)^{\mu-k-1}\frac{1}{(\mu-k-1)!}\chi_0^{-(\mu-k)}(x-\alpha)^{\mu-k-1}$$

$$\{P_{\mu-k-1}^{(\mu-k-1)} - \chi_0 P_{\mu-k-2}^{(\mu-k-1)} + \chi_0^2 P_{\mu-k-3}^{(\mu-k-1)} - \cdots + (-1)^{\mu-k-2}\chi_0^{\mu-k-2} P_1^{(\mu-k-1)}\},$$

wo sukzessive die Indizes α, μ durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ resp. $\mu, \nu, \pi, \ldots$ zu ersetzen sind.

Damit ist aber eine ganze Funktion $\varphi(x)$ von einem Grade $< \mu\alpha + \nu\beta + \pi\gamma + \cdots$ (oder näberungsweise eine beliebige Funktion) dargestellt, für die die Größen $\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \ldots \varphi_{\mu-1}(\alpha)$; $\varphi_0(\beta), \varphi_1(\beta), \ldots \varphi_{\nu-1}(\beta)$; $\varphi_0(\gamma), \varphi_1(\gamma), \ldots \varphi_{\pi-1}(\gamma) \ldots$, d. s. also *die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen* bis zur resp. Ordnung $\mu-1, \nu-1, \pi-1, \ldots$ für die beliebigen (ungleichen) Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebig vorgegebene (endliche) Werte besitzen.

Königsberg i. Pr., Februar 1905.

Einige Integralsätze.

Von O. Spiess in Basel.

Setzt man $1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1} = X_n$, so genügt X_n der Gleichung

(1) $$x^n - 1 = (x - 1) X_n.$$

Differenziert man k-mal nach x, und setzt $X_n^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} X_n$, so kommt

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = (x-1)X_n^{(k)} + k X_n^{(k-1)}.$$

Multiplizieren wir beiderseits mit $\frac{dx}{\sqrt[k]{[X_n^{(k-1)}]^{k-1}}}$, so steht rechts das vollständige Differenzial von $k(x-1)\sqrt[k]{X_n^{(k-1)}}$. Durch Integration ergibt sich also die Formel

(2) $$\int \frac{x^{n-k}dx}{\sqrt[k]{[X_n^{(k-1)}]^{k-1}}} = \frac{k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} \cdot (x-1)\sqrt[k]{X_n^{(k-1)}}.$$

Speziell für $k = 2$ erhalten wir

$$\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2 + \cdots (n-1)x^{n-2}}}$$
$$= \frac{2}{n(n-1)}(x-1)\sqrt{1 + 2x + 3x^2 + \cdots (n-1)x^{n-2}}.$$

Diese Formel hat schon Herr Kokott (Ztchr. f. Math. u. Ph., Bd. 45) auf dem Weg der Koeffizientenvergleichung hergeleitet. Für $n = 6$ kommt sie bei Abel vor. Geht man von der etwas allgemeineren Gleichung aus $$R(x) - R(1) = (x-1)\varphi(x),$$

so erhält man auf dem gleichen Weg die Formel

(3) $$\int \frac{R^{(k)}(x)\,dx}{\sqrt[k]{[\varphi^{(k-1)}(x)]^{k-1}}} = k(x-1)\sqrt[k]{\varphi^{(k-1)}(x)}.$$

Wir wollen nun die Bedingungen suchen, unter denen sich ein Integral der Form $\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt[n]{\varphi(x)^{n-1}}}$ algebraisch ausdrücken läßt. Bekanntlich kann dies dann nur in der Form geschehen

(4) $$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt[n]{\varphi(x)^{n-1}}} = f(x)\sqrt[n]{\varphi(x)}.$$

Digitized by Google

Da es uns nicht um die volle Allgemeinheit unserer Entwicklung zu tun ist, so setzen wir im folgenden $R(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ als *ganze* rationale Funktionen voraus. $R(x)$ betrachten wir als gegeben, $\varphi(x)$, $f(x)$ als gesucht. Durch Differentiation von (4) folgt

(5) $$R(x) = f'(x)\varphi(x) + \frac{1}{n} f(x)\varphi'(x).$$

Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus, daß $f(x)$ keine doppelten Faktoren enhalte, oder daß $f(x)$ und $R(x)$ teilerfremd sind. Multiplizieren wir beiderseits mit $f(x)^{n-1}dx$ und integrieren, so kommt

(6) $$\frac{1}{n}\varphi(x) = \frac{\int R(x) f(x)^{n-1} dx - c}{f(x)^n} = \frac{F(x) - c}{f(x)^n}.$$

Da $\varphi(x)$ ganz ist, so ist hiernach $f(x)$ aus der Bedingung zu bestimmen, daß $F(x) - C$, nach passender Wahl der Konstanten C, durch $f(x)^n$ teilbar sein soll. Da aber $F'(x)$ von selbst durch $f(x)^{n-1}$ teilbar ist, so genügt es offenbar zu sagen: *$F(x) - C$ soll durch $f(x)$ teilbar sein.* Ist $f(x)$ vom ersten Grade, etwa $= x - \alpha$, so hat man nur $C = F(\alpha)$ zu setzen, wo $F(x)$ irgend eine ganze Funktion ist. Damit kommen wir wieder zur Formel (3) zurück. Soll $f(x)$ von höherem Grade sein, so setzen wir

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_k). \qquad (k > 1)$$

Unser Ziel ist dann, die Gleichungen aufzustellen, die zwischen den Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ bestehen müssen, damit die obige Forderung erfüllt wird. Diese Bedingung kann man jetzt auch so aussprechen: *Es soll $F(x) = \int R(x) f(x)^{n-1} dx$ für sämtliche Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ denselben Wert C annehmen, in Zeichen*

(7) $$F(\alpha_1) = F(\alpha_2) = \cdots = F(\alpha_k) = C.$$

Das ist die erste Form der $(k-1)$ gesuchten Relationen. Der Grad dieser Gleichungen ist aber noch zu hoch; wie wir zeigen werden, enthält nämlich jede der Differenzen $F(\alpha_\lambda) - F(\alpha_\mu)$ den Faktor $(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)^{2n-1}$, der für $\lambda \neq \mu$ nach Annahme von Null verschieden ist und wegdividiert werden darf. Um zu einer einfacheren Gestalt zu gelangen, setzen wir

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_\lambda} = f_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k)$$

und schreiben die obigen Bedingungen in Form der Kongruenz

$$F(x) = \int R(x) f_\lambda(x)^{n-1}(x - \alpha_\lambda)^{n-1} dx \equiv C \pmod{(x - \alpha_\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k).$$

Indem wir partiell integrieren und die durch $(x - \alpha_\lambda)$ teilbaren Glieder weglassen, ergibt sich

$$F(x) \equiv (-1)^{n-1}(n-1)! \int^{(n)} R(x) f_\lambda^{n-1}(x)\, dx^{(n)} \equiv C \pmod{(x - \alpha)}.$$

Die Integrationen denken wir uns hier im folgenden stets so durchgeführt, daß keinerlei Konstanten hinzugefügt werden, so daß also durch jede Integration der Faktor x einmal mehr hinzutritt. Betrachten wir auch α_λ als variabel und setzen $x = \alpha_\lambda$, so wird die Kongruenz zur Gleichung

$$(8) \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} F(\alpha_\lambda) - \int^{(n)} R(\alpha_\lambda) f_\lambda^{n-1}(\alpha_\lambda)\, d\alpha_\lambda^n = C, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots k)$$

wobei wieder C für $\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} C$ geschrieben ist. Der Wert von C ist willkürlich, muß aber in allen Gleichungen derselbe sein. Statt $f_\lambda(\alpha_\lambda)$ kann man auch $f'(\alpha_\lambda) = (\alpha_\lambda - \alpha_1)(\alpha_\lambda - \alpha_2) \dots (\alpha_\lambda - \alpha_k)$ schreiben.

Um diese neue Gestalt unserer Bedingungsgleichungen noch weiter umformen zu können, beweisen wir erst den folgenden *Integralsatz: Ist u eine beliebige integrierbare Funktion von x, so gilt für alle positiven ganzen Zahlen λ, ν:*

$$(9) \qquad \int^{(\nu)} u(x-a)^\lambda dx^\nu = (x-a)^{\lambda+\nu} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left\{\frac{\int^{(\lambda+\nu)} u\, dx^{\lambda+\nu}}{x-a^\nu}\right\}.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz direkt für $\nu = 1$ und wenden dann die vollständige Induktion an. Dabei schreiben wir der Kürze halber D_λ für $\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}$, und $\int^{\lambda} u$ für $\int^{(\lambda)} u\, dx^\lambda$. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int u(x-a)^\lambda dx = (x-a)^\lambda \int u - \lambda (x-a)^{\lambda-1} \int^2 u + \cdots (-1)^\lambda ! \int^{\lambda+1} u$$

$$= (x-a)^{\lambda+1}\left\{\frac{\int u}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2} \cdot \lambda \int^2 u + \cdots \frac{(-1)^\lambda \lambda!}{(x-a)^{\lambda+1}} \int^{\lambda+1} (u)\right\}$$

$$(9\text{a}) \qquad = (x-a)^{\lambda+1} D^\lambda \left\{\frac{\int^{\lambda+1} u}{x-a}\right\}.$$

Hiermit ist der Satz für $\nu = 1$ bewiesen. Angenommen, er sei schon für ein gewisses ν nachgewiesen, so zeigen wir durch zweimalige Anwendung der speziellen Formel (9a), daß er auch für $\nu + 1$ gilt. Setzen wir für den Augenblick $D^\lambda \left\{\frac{\int^{\lambda+1} u}{x-a}\right\} = D^\lambda(v) = w$, so folgt durch Integration der Gleichung (9) mit Hilfe von (9a)

$$\int^{(\nu+1)} u(x-a)^\lambda dx^{\nu+1} = \int (x-a)^{\lambda+\nu} v = (x-a)^{\lambda+\nu+1} D^{\lambda+\nu} \left\{\frac{\int^{\nu+\lambda+1} v}{x-a}\right\}$$

$$= (x-a)^{\lambda+\nu+1} D^\lambda D^\nu \left\{\frac{\int^{\nu+1} w}{x-a}\right\}.$$

Nun ist wiederum nach (9)

$$D^{\nu}\left\{\frac{\overset{\nu+1}{\int} w}{x-a}\right\}=\frac{\int w\,(x-a)^{\nu}}{(x-a)^{\nu+1}}=\frac{\overset{\lambda+\nu+1}{\int} u}{(x-a)^{\nu+1}}.$$

Führen wir dies auf der rechten Seite der vorigen Gleichung ein, so geht sie über in $(x-a)^{\lambda+\nu+1} D^{\lambda}\left\{\frac{\overset{\lambda+\nu+1}{\int} u\,dx^{\lambda+\nu+1}}{(x-a)^{\nu+1}}\right\}$, q. e. d. Versteht man unter $\overset{(-\nu)}{\int}$ einen νten Differentialquotienten, unter $D^{-\lambda}$ ein λ-faches Integral, so gilt die Formel (9) auch für negative Werte von ν und λ, und zwar ist genauer zu bemerken: Der Satz (9) *gilt* für *negatives* ν *und positives* λ, lautet dann also in gewöhnlicher Schreibweise

$$D^{\nu} u\,(x-a)^{\lambda}=(x-a)^{\lambda-\nu} D^{\lambda}(x-a)^{\nu}\overset{\lambda-\nu}{\int} u. \tag{9b}$$

Dies wird leicht direkt durch Ausführung der Differentiation eingesehen, folgt übrigens für $\nu>\lambda$ schon aus der Formel (9) selbst.

Ferner *gilt* der Satz für *negatives* ν *und negatives* λ, was man sofort erkennt, wenn man in (9) u für $\overset{\lambda+\nu}{\int} u$ schreibt. *Er gilt aber nicht* für *positives* ν *und negatives* λ, wie man sich leicht überzeugt.

Den so bewiesenen Integralsatz wenden wir nun auf die Gleichungen (8) an. Ist $\lambda \neq \mu$, also $\alpha_{\lambda} \neq \alpha_{\mu}$, so setzen wir

$$\frac{f'(\alpha_{\lambda})}{\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu}}=f_{\lambda,\mu}(\alpha_{\lambda})=(\alpha_{\lambda}-\alpha_{1})(\alpha_{\lambda}-\alpha_{2})^{(\lambda,\mu)}(\alpha_{\lambda}-\alpha_{k}).$$

Wir erhalten dann für die linke Seite von (8) nach (9)

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}F(\alpha_{\lambda}) &= \overset{(n)}{\int} R(\alpha_{\lambda}) f_{\lambda,\mu}^{n-1}(\alpha_{\lambda})(\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu})^{n-1} d\alpha_{\lambda}\\ &=(\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu})^{2n-1}\frac{d^{n-1}}{d\alpha_{\lambda}^{n-1}}\left\{\frac{\overset{2n-1}{\int} R(\alpha_{\lambda}) f_{\lambda,\mu}^{n-1}(\alpha_{\lambda})\, d\alpha_{\lambda}^{2n-1}}{(\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu})^{n}}\right\}\\ &=(\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu})^{2n-1}\frac{\partial^{2n-2}}{\partial\alpha_{\lambda}^{n-1}\partial\alpha_{\mu}^{n-1}}\left\{\frac{P_{2n-1}(\alpha_{\lambda})}{\alpha_{\lambda}-\alpha_{\mu}}\right\},\end{aligned} \tag{10}$$

wo wir die ganze rationale Funktion von x

$$\overset{2n-1}{\int} R(x) f_{\lambda,\mu}^{n-1}(x)\, dx^{2n-1}=P_{2n-1}(x) \tag{11}$$

Digitized by Google

gesetzt haben. Vertauschen wir λ mit μ und subtrahieren die neue Gleichung von der ursprünglichen, so kommt

$$(12)\quad F(\alpha_\lambda)-F(\alpha_\mu)=(\alpha_\lambda-\alpha_\mu)^{2n-1}\frac{\partial^{2n-2}}{\partial\alpha_\lambda^{n-1}\partial\alpha_\mu^{n-1}}\left\{\frac{P_{2n-1}(\alpha_\lambda)-P_{2n-1}(\alpha_\mu)}{\alpha_\lambda-\alpha_\mu}\right\}$$

$$\left(\begin{matrix}\lambda,\mu=1,2,\ldots k\\ \lambda\neq\mu\end{matrix}\right).$$

In der Klammer rechts steht jetzt aber eine ganze Funktion der Variablen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$; die Differenz $F(\alpha_\lambda)-F(\alpha_\mu)$ ist also, wie oben behauptet wurde, durch $(\alpha_\lambda-\alpha_\mu)^{2n-1}$ teilbar. Da das Verschwinden dieser Differenz für alle Paare von Wurzeln α_λ, α_μ die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung (4) enthält, so können wir also den Satz aussprechen:

Soll zwischen drei ganzen Funktionen $\varphi(x)$, $f(x)$, $R(x)$, wovon die zwei letzten teilerfremd sein sollen, die Integralgleichung bestehen

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt[n]{(\varphi(x))^{n-1}}}=f(x)\sqrt[n]{\varphi(x)},$$

so müssen die Wurzeln von $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$ das System der $\frac{k(k-1)}{2}$ Gleichungen befriedigen

$$(13)\qquad \frac{P_{2n-1}(\alpha_\lambda)-P_{2n-1}(\alpha_\mu)}{\alpha_\lambda-\alpha_\mu}\qquad\left(\begin{matrix}k>1\\ \lambda,\mu=1,2,\ldots k\\ \lambda\neq\mu\end{matrix}\right).$$

Hierin ist $P_{2n-1}(x)$ die durch Gleichung (11) bestimmte ganze Funktion.

Umgekehrt, genügen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ diesem Gleichungssystem, so ist der Quotient

$$\frac{n\int\limits_{\alpha_1}^{x}R(x)f(x)^{n-1}dx}{f(x)^n}=\varphi(x)$$

eine ganze Funktion, welche zusammen mit $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)=f(x)$ die obige Integralgleichung befriedigt.

Die $\frac{k(k-1)}{2}$ Gleichungen (13) haben die Eigenschaft, daß $\frac{k(k-1)}{2}-(k-1)$ eine Folge sind von je $(k-1)$ unter ihnen, die zu einem konstanten Wert von μ gehören Durch geeignete Kombination derselben gelangt man in jedem Fall zu einem mit (13) äquivalenten System von $(k-1)$ Gleichungen, die in den Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ symmetrisch sind und somit in Relationen zwischen den Koeffizienten von $f(x)$ umgeschrieben werden können. Ich verspare diese Diskussion auf ein andermal und will nur noch bei dem Fall $k=2$ etwas verweilen, bei

Digitized by Google

dem bloß eine einzige Bedingungsgleichung auftritt. Schreiben wir α, β statt α_1, α_2, so lautet dieselbe

$$(13\text{a}) \qquad \frac{\partial^{2n-2}}{\partial\alpha^{n-1}\partial\beta^{n-1}}\left(\frac{R_{2n-1}(\alpha)-R_{2n-1}(\beta)}{\alpha-\beta}\right)=0. \qquad \left(R_{2n-1}(x)=\int^{2n-1} R(x)\,dx^{2n-1}\right)$$

Dieselbe ist symmetrisch und homogen in α, β, deren Verhältnis durch sie bestimmt ist. Besonders interessant ist der Fall $Rx = x^p$, doch gehen wir hier nicht mehr darauf ein.

Erfüllen α, β die Gleichung (13a), so gilt für $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ nach Gleichung (5) die Relation

$$(5\text{a}) \qquad n\,R(x) = f(x)\cdot\varphi'(x) + nf'(x)\,\varphi(x).$$

Indem nun $f'''(x) = 0$ ist, hat die rechte Seite dieser Gleichung die Besonderheit, als Differentialquotient eines Ausdrucks der Form $f(x)\cdot\Phi'(x) - \lambda f'(x)\,\Phi(x)$ dargestellt werden zu können. Differenziert man diesen Ausdruck nämlich ν-mal, so kommt $f\Phi^{(\nu+1)} + (\nu-\lambda)f'\Phi^{(\nu)} + \left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} - \lambda\nu\right]f''\Phi^{(\nu-1)}$ und wird in der Tat mit der rechten Seite von (5a) identisch, wenn man setzt $\nu = 2n-1$, $\lambda = n-1$, $\Phi^{(\nu)}(x) = \Phi^{(2n-1)}(x) = \varphi(x)$. Integriert man also die Gleichung (5a) $(2n-1)$-mal und setzt

$$R_{2n-1}(x) = \int^{(2n-1)} R(x)\,dx^{2n-1}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \int^{(2n-1)} \varphi(x)\,dx^{2n-1},$$

so erhält man

$$(14) \qquad nR_{2n-1}(x) = f\cdot\varphi'_{2n-1} - (n-1)f'\cdot\varphi_{2n-1},$$

woraus

$$(15) \qquad \int \frac{R_{2n-1}(x)\,dx}{f(x)^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\varphi_{2n-1}}{f^{n-1}}.$$

D. h.: *Ist $P(x)$ eine beliebige ganze Funktion, so ist die Bedingung dafür, daß sich das Integral $\int \frac{P(x)\,dx}{(x-\alpha)^n(x-\beta)^n}$ durch rationale Funktionen ausdrücken läßt, in der Gleichung enthalten*

$$\frac{\partial^{2n-2}}{\partial\alpha^{n-1}\partial\beta^{n-1}}\left\{\frac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}\right\} = 0. \qquad (\alpha \neq \beta)$$

Der Wert des Integrals erscheint dann in der Form $\frac{1}{n}\cdot\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{n-1}}$.
Die ganzen Funktionen $P(x)$ und $\psi(x)$ haben noch die Eigenschaft, daß ihre $(2n-1)$ten Differentialquotienten der Gleichung genügen

$$\int \frac{P^{(2n-1)}(x)\,dx}{\sqrt[n]{[\psi^{(2n-1)}x]^{n-1}}} = (x-\alpha)(x-\beta)\sqrt[n]{\psi^{(2n-1)}(x)}.$$

Basel, 20. Oktober 1903.

The Development of the Theory of Transfinite Numbers.

Part 1.—The growth of the Theory of Functions up to the year 1870.

By PHILIP E. B. JOURDAIN (Broadwindsor, Dorset, England).

During the nineteenth century, the two great branches of the theory of functions developed and gradually separated. The rigorous foundation of the results of Fourier on trigonometric series, which was given by Dirichlet, brought forward the general conception of a (one-valued) function of a real variable, and the (in particnlar, trigonometrical) development of functions, as subjects of investigation. On the other hand, Cauchy was gradually led to recognise the importance of what was subsequently recognised as a more special conception of function of a complex variable, and, to a great extent independently of Cauchy, Weierstrass built up his theory of analytic functions of complex variables.

These tendencies of both Cauchy and Dirichlet combined to influence Riemann; his works on the theory of functions of a complex variable carry on and greatly develop the work of Cauchy, while his Habilitationsschrift of 1854 has the intention of generalising as far as possible Dirichlet's partial solution of the problem of the development of a function of a real variable in a trigonometric series.

Both these sides of Riemann's activity left a deep impression on Hankel. In his Tübinger Programm of 1870, Hankel attempted to exhibit the theory of functions of a real variable as leading, of necessity, to the restrictions and extensions from which one starts in Riemann's theory of functions of a complex variable; on the other hand, Hankel's researches entitle him to be called the founder of the independent theory of functions of a real variable. At about the same time, Heine initiated, under the direct influence of Riemann's Habilitationsschrift, a new series of investigations on trigonometric series.

Finally, soon after this, we find Georg Cantor both studying Hankel's memoir and applying to theorems on the uniqueness of trigonometrical developments those conceptions of his on irrational numbers and the derivates of point- or number-aggregates which developed from the rigorous treatment of such fundamental questions given by Weierstrass at Berlin in the introduction to his lectures on analytic functions. The theory of point-aggregates soon became an

independent theory of great importance, and finally, in 1882, the transfinite numbers were defined independently of the aggregates to which they belonged and by means of which they first appeared in mathematics.

These successive stages in the history of our subject will now be sketched in greater detail. In the subsequent parts of this paper will be given an account of the development of the theory of transfinite numbers from 1883 to the present day.

1.

The problems of trigonometric series up to and including the time of Dirichlet's memoirs (1829, 1837).

The investigations of the eighteenth century on the problem of vibrating cords[1]) led to a controversy, owing to the fact that the (d'Alembert's) general integral of the equation of the problem referred to involve arbitrary functions, while, on the other hand, Daniel Bernoulli judged his own solution in the form of a trigonometric series to be general because it served to explain all the phenomena. As Euler pointed out, these two conclusions could be reconciled if every arbitrary function $\varphi(x)$ (which, in this case, represents the initial form of the cord, which may be a" functio discontinua"; for example, a curve formed of broken lines) were developable in a series of the form

$$\varphi(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \sin \frac{\nu \pi x}{l}.$$

1) See E. Mach, "Die Prinzipien der Wärmelehre", 2. Aufl., Leipzig 1900, pp. 92—102, 122—123; M. Cantor, "Geschichte der Math.", Bd. III, Leipzig 1898, pp. 363—370. On the history of the researches on trigonometric series up to Dirichlet's time, see Riemann, "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen", Habilitationsschrift, Göttingen 1854 (*Ges. Werke*, pp. 266 sqq. 1892; French translation in *Œuvres de Riemann*, Paris 1898, pp. 226—239), and Reiff, "Gesch. der unendl. Reihen", Tübingen 1889, pp. 124—126, 132—135, 182—192. The dissertation of Sachse ("Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen", Göttingen 1879; *Abh. zur Gesch. der Math.* **III**, 1880, pp. 230—276; French trans. in *Bull. des sci. math* (2) **4**, 1880, pp. 43—64, 83—112) is especially concerned with Riemann and after Riemann (see below 5). On the history of the conception of a function, in which history this controversy has an important place, see Pringsheim, *Encykl. der math. Wiss.*, II. A 1, pp. 3—8. Cf. also Riemann, "Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen ... bearb. und hrsgeg. von K. Hattendorff", Braunschweig 1869, pp. 198—201.

Digitized by Google

That this was, indeed, the case, even when $\varphi(x)$ is not necessarily developable in a power-series, was first shown by Fourier, who was led to study the same mathematical problem as the above one by his researches (the first of which were communicated to the French Academy in 1807) on the conduction of heat.[1]) To Fourier is due also the determination of the coefficients in the trigonometric series

$$(1) \qquad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots$$

in the form

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\cos \nu\alpha \, d\alpha, \qquad a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\sin \nu\alpha \, d\alpha;$$

a determination which was probably independent of Euler's prior determination[2]) and Lagrange's analogous determination of the coefficients of a *finite* trigonometrical series[3]); and a geometrical proof of the convergence of his series, which, though not formally exact, contains the germ of Dirichlet's proof.[4])

To Dirichlet[5]) is due the first exact treatment of Fourier's

1) See Mach, *op. cit.*, pp. 82—92, 115—119, 102—114. There does not seem to be justification for Mach's statement (pp. 104, 111) that Fourier first applied *infinite* periodic series. For (cf. Riemann, "Partielle Differentialgleichungen", pp. 43—44) Bernoulli, in support of his statement that, however a curve may be drawn, the ordinates must always be representable in the form of a trigonometric series, remarked that in the series an *infinite* number of coefficients occur. Euler disputed this, because, in the infinite series $a + bx + cx^2 + \cdots$, one cannot so determine the coefficients that the line suddenly changes its direction at a definite point.

2) See Reiff, *op. cit.*, pp. 138—140.

3) See Riemann, *op. cit.* ("Über die Darstellbarkeit"), § 2, Mach, *op. cit.*, pp. 109—111, Sachse, *op. cit.*

4) See Reiff, *op. cit.*, pp. 184—186.

5) G. P. Lejeune-Dirichlet: "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données", *Journ. für Math.* **4**, 1829, 157—169; *Ges. Werke*, Bd. I, pp, 117—132). According to Riemann (*op. cit.*, § 3), Dirichlet arrived at the discovery of the method to follow for the solution of his problem by his remark (cf. Reiff, *op. cit.*, pp. 206—207) that an infinite series may or may not have the same sum if the order of its terms is altered, and, with Fourier's series, the latter is the case.

On the conceptions (Cauchy's) of the "continuity" of a function and of the definite integral, used here by Dirichlet, see below § 2.

The word "function", in consequence of the preceding researches, had then attained the present meaning ("Dirichlet's function-concept"), and "continuous" function had the meaning assigned to it by Cauchy (see Brill and Noether, "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen . . .", *Jahresber. d. D. M.-V.* **III** (1894), 162—163).

series. He brought the sum of the first $2n + 1$ terms of the series (1) to the form

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha, \tag{2}$$

and proved that the limit of (2), when n is infinite, is $\varphi(x)$, provided that $\varphi(x)$ is a continuous function, except, possibly, at a finite number of points between $-\pi$ and $+\pi$, and has only a finite number of maxima and minima between these limits. Further, the value of the function at a point of discontinuity $x = a$, must be, in the symbols first used by Dirichlet,

$$\tfrac{1}{2}[\varphi(a - 0) + \varphi(a + 0)],$$

when a lies between $-\pi$ and $+\pi$; and, when a is $-\pi$ or $+\pi$,

$$\tfrac{1}{2}[\varphi(\pi - 0) + \varphi(-\pi + 0)].$$

For such functions, then, the problem of trigonometric representation between the limits $-\pi$ and $+\pi$ is solved[1]), and these limits can be altered by a change of variable.

Dirichlet also considered other possibilities in the function $\varphi(x)$. When the above suppositions cease to hold, we get singular cases which, according to Dirichlet, can always be brought to those cases already considered. It is only necessary, in order that

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

should have a meaning when the solutions of continuity are infinite in number, that $\varphi(x)$ should be such that, if a and b are any two quantities between $-\pi$ and π, we can always place between a and b other quantities r and s so near to one another that $\varphi(x)$ remains continuous in the interval $r \cdots s$. "We can easily see the necessity of this by considering that the terms of the [Fourier's] series (1) are definite integrals, and by going back to the fundamental concept of the definite integral. Then we see that the integral has no meaning unless $\varphi(x)$ satisfies the above conditions." Dirichlet gave the following example of a function not fulfilling the above condition: Let $\varphi(x)$

1) The solution of this problem becomes much simpler when what is known as the "second theorem of the mean-value" of O. Bonnet and P. du Bois-Reymond is used for Dirichlet's integral (Dirichlet used the "first theorem of the mean-value alone").

take any determined constant value (c) when x has a rational value and any other determined constant value (d) when x is irrational; the function thus defined has a finite and determined value for every x, but the integrals have no meaning. "This restriction on $\varphi(x)$, and that of not becoming infinite, are the only ones to which it is subject; and such cases can always be brought back to the above ones. But this, to be done with the required clearness, requires some details connected with the principles of the infinitesimal calculus which will be exposed in another note, in which I will also treat some other remarkable properties of the [Fourier's] series."

It was Cauchy's definition of the definite integral, the integrand being *continuous*[1]), which thus rendered possible this completion, indicated by Dirichlet, of these researches, but, as we shall see later, Riemann showed that Cauchy's condition of the continuity of the integrand, though sufficient, is *not necessary* for the existence of a definite integral defined in Cauchy's way as the limit of a certain sum. From Riemann's memoir dates not only a new period of development of the theory of trigonometric series but also the rise of much of importance in the theory of aggregates.

The projected note, which was to be concerned with the principles of the infinitesimal calculus, Dirichlet never published. But Lipschitz[2]) proposed to himself the problem of finding the traces of this investigation in Dirichlet's published works.[3])

Lipschitz here started from Dirichlet's extended Cauchy's conception of the definite integral, and proved that Fourier's series still represents the function when there are an infinite number of maxima

1) "Résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal", 1823, (*Œuvres* (2), t. IV, pp. 5—261), leçon 21. Dirichlet himself, in the in some respects fuller exposition of his researches which he gave in 1837 ("Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Kosinusreihen", *Repertorium der Physik von Dove und Moser* 1, 152—174, 1837; *Ges. Werke*, Bd. I, pp. 133—160; Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Nr. 116, pp. 3—34), shortly indicated (§ 1) that the integrand is to be continuous.

On the origin of Cauchy's sum-conception of the definite integral, see below § 2.

2) "De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio" ["Scripsi Bonnae die X. M. Aprilis A. MDCCCLXIV"], *Journ. für Math.*, Bd. LXIII., 1864, pp. 296—308.

3) The two papers on trigonometric series mentioned above, and the memoir: "Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données", *Journ. für Math.*, 17., p. 35.

Digitized by Google

and minima, when the number of points, in the immediate neighbourhood of each of which are an infinite number of maxima and minima, is finite.[1])

2.

The Theory of Functions with Cauchy (1814—1846) and Gauss (1811—1813).

Fourier's researches had led him to establish analytical expressions, in the form of infinite trigonometric series, for certain functions — such as the "functio discontinua"[2]) formed by a series of broken lines — which were totally different in behaviour from the algebraic functions which where, before him, tacitly considered to be the type of the functions which can occur in analysis. Accordingly, functions included in Euler's concept of functions as analytically representable are not always "functiones continuae".

This result of the work of Fourier appears in the memoir of 1814 of Cauchy on definite integrals. Cauchy's object was to find a secure foundation for that "passage from the real to the imaginary" used in the evaluation of certain definite integrals. For example, Laplace[3]) had found the integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\cdot dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2}$$

by the substitution

$$\cos 2bx = \tfrac{1}{2}(e^{2\sqrt{-1}bx} + e^{-2\sqrt{-1}bx}).$$

The integral sought then becomes a sum of two integrals, which, on the respective substitutions

$$x = t + \sqrt{-1}b \quad \text{and} \quad x = t - \sqrt{-1}b,$$

becomes

$$\tfrac{1}{2}e^{-b^2}\left\{\int_{-\sqrt{-1}b}^\infty e^{-t^2}dt + \int_{+\sqrt{-1}b}^\infty e^{-t^2}dt\right\};$$

1) Lipschitz's method was extended by H. Lebesgue ("Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives", Paris, 1904, pp. 9—14). P. du Bois-Reymond had pointed out (*Math. Ann.*, 16, 1880, 128, note) that the widest extension of Dirichlet's conception is narrower than Riemann's.

2) Cf. Lebesgue, *op. cit.*, pp. 1—3; Brill and Noether, *op. cit.*, p. 162; Pringsheim, *Encykl. der math. Wiss.*, II. A 1, pp. 4—7.

3) See Stäckel in the translation of Cauchy's memoir of 1825 in "Ostwald's Klassiker der exakten Wiss.", Nr. 112, p. 74, and *Bibliotheca Mathematica* (3) 1 (1900), 116—117.

Digitized by Google

putting, now $-t$ for $+t$ in the first integral, we get

$$\tfrac{1}{2} e^{-t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = e^{-t^2} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt .$$

This secure foundation is, according to Cauchy, afforded by the splitting of a single imaginary equation into two real equations; he thus, to use the phrasing of his "Cours d'Analyse" of 1821, where these views on imaginaries were further developed, regarded imaginary equations as merely the "symbolical representation" of two real equations. He started from the equation

$$(3) \qquad \int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dx\, dy = \int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} dx\, dy ,$$

where $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$ (and so $\varphi dy + \chi dx$ is a complete differential, $f(z) dz$, where z is a function of x and y), and one of the integrations on each side can be at once effected. Since, now,

$$\varphi = f(z)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \chi = f(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

(3) becomes

$$\int_{Y_0}^{Y} \left[\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{X=X_0} - \left(f(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{X=Y_0} \right] dy = \int_{X_0}^{X} \left[\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{Y=X_0} - \left(f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{Y=Y_0} \right] dx ,$$

which splits into two real equations when

$$z = M(x, y) + \sqrt{-1}\, N(x, y), \quad f(z) = P(x, y) + \sqrt{-1}\, Q(x, y),$$

which equations serve to determine many definite integrals.

Cauchy also remarked that reversal of the order of integration, even when the limits are constant, ceases to be a valid process when the integrand becomes indeterminate between the limits of integration. In this case, (3) is replaced by an equation of the form

$$\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\, dy = \int\int \frac{\partial \chi}{\partial y} dx\, dy + \Delta,$$

where the correction Δ consists of one or more single integrals taken over an infinitely small range infinitely near a singular point.

In the memoir of 1814, we also find a mention of the possibility of a function undergoing sudden passages from one value to another at certain points (and such functions, for whose consideration Fourier, breaking with Euler, had prepared the way, were called "discontinuous"

Digitized by Google

in Cauchy's „Cours" of 1821) and the mention of Cauchy's reinstatement of the sum-definition of the definite integral.[1])

The discovery that Δ could be found *generally* when $M = x$, $N = y$, seems to have led Cauchy to consider the variable z in this simple form, and not to separate in (3) real and imaginary. This led, in 1825, to the theorem on complex integration which Cauchy long afterwards recognised as the fundamental theorem of a theory of (synectic) functions of an imaginary variable. Gauss had obtained this theorem and its most important consequences in 1811, and hence discovered part of Cauchy's result on the reversal of the order of integrations.

Thus, finally, the memoir of 1814 is the source of some of Cauchy's most important contributions to the theory of functions (both synectic, and more general ones); and, as I have shown elsewhere[2]), even the proof given by Cauchy in 1846 of his fundamental theorem, which is identical with that of Riemann (which is generally derived from Green's theorem in the plane), is reducible to the ideas and methods of 1814. However, neither with Gauss nor with Cauchy is there clearness about the restrictions necessary that a function $f(z)$ should be such that Cauchy's theorem

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

holds of it. Cauchy even thought that continuity was sufficient. With Riemann and Hankel came the beginning of clearness, and with it the division of the theory of functions into the theory of functions of real variables and of (analytic) functions of complex variables. The exact period begins with Weierstrass, who was free from the geometrical way of thinking, that Cauchy had, but which was partly hidden by his striving after purely analytical expression (this geometrical way of thinking appears when we examine Cauchy's doctrine of limits and irrational numbers).

1) Fourier's investigations had made this reinstatement necessary, as I have pointed out in a paper on the origin of Cauchy's sum-definition which is to appear shortly. In fact, certain discontinuous (in the sense of Bolzano and Cauchy) functions are representable by a trigonometric series (e. g., the function defined for $-1 < x < 1$ by $f(x) = 1$ $(x > 0)$, $f(x) = -1$ $(x < 0)$, $f(0) = 0$), of which the integral must have and evidently has a meaning and is a continuous (in Cauchy's sense) curve. Yet, since this curve has *no determinate differential quotient* at $x = 0$, Euler's definition of the integral as the inverse of the differential fails to give a meaning to this integral.

2) In a paper on "The theory of functions with Cauchy and Gauss", (*Bibliotheca Mathematica* (3), 6, 1905, 190—207), where fuller details on the subject of this section are to be found.

Digitized by Google

3.

Riemann's Theory of Functions of a Complex Variable (1851), and his Memoir on Trigonometric Series.

Riemann's theory of functions of a complex variable was a development of Cauchy's theory of "synectic" functions, a development which was mainly brought about by the striking analogy which Riemann perceived between this theory and the theory of potential[1]) in a plane.

In his inaugural dissertation of 1851 entitled: "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse"[2]), Riemann first remarked that, with the most general definition of a one-valued and continuous function (w) of a real variable (z), there is no necessary connexion between the different values of the function in the sense that, when the function has been determined for a given interval, the manner in which it is to be continued outside this interval remains quite arbitrary.[3])

The manner in which w depends on z may be given by a mathematical law, so that, by determinate operations of calculation, we may, for each given value of z, deduce the corresponding value of w.

The property of being defined for all the valnes of z in a given interval by the same law of dependence was formerly attribnted only to the functions of a certain class (Euler's "functiones continuae"); but modern researches have shown that there are analytical expressions by which every continuous function can be represented in a given interval.[4]) It is, then, a matter of indifference whether we define the dependence of w on z as given arbitrarily or as resting on determined operations of calculation.[5])

---

1) Riemann owed to his teacher Dirichlet the leaning he had both towards the theory of potential and that of trigonometric series.

2) *Ges. Werke*, pp. 3 sqq., *Oeuvr.* pp. 1—60.

3) This seems to have heen the passage which led Lebesgue (*op. cit.* p. 4) to attribute to Riemann the general conception of a function usually credited to Dirichlet. It is true that Dirichlet (*Ges. Werke*, Bd. 1., p. 135) only framed his conception, at first, for *continuous* functions, hut his example of a non-integrable fonction, referred to above, shows that he had the general conception.

4) It seems that Riemann referred, in this, to Fourier's series, and Hankel (See § 4 below) was of the same (incorrect, as we shall see later) opinion.

5) Riemann's phrasing here is rather loose: the values of a *continuous* w cannot he assigned quite arbitrarily. It will he seen later that it was one of Hankel's objects to show, or at least make probahle, that the above statement is *literally* (even when w is not necessarily continuous, and the valnes quite arbitrary) true. But this is not so (cf. § 4 below).

Digitized by Google

But the case is different when z is allowed to take *complex* values, of the form $x + yi$, also. Let $x + yi$ and $x + yi + dx + idy$ be two infinitely near values of z, and $u + iv$ and $u + iv + du + idv$ the corresponding values of w; then, when the dependence of w on z is taken arbitrarily, the ratio $\frac{du + idv}{dx + idy}$ will, in general, vary with the values of dx and dy, for, putting

$$dx + idy = \varepsilon e^{\varphi i},$$

we have

$$\frac{du + idv}{dx + idy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] e^{-2\varphi i}$$

But, in whatever manner w may be determined as a function of z by a combination of the elementary operations of calculation, the value of the derivate $\frac{dw}{dz}$ is always independent of the particular value of the differential dz.[1]) It is, then, evident that by this way we cannot express any dependence of w on z.

Now, Riemann took this common characteristic of all the functions which can be determined in any manner by operations of calculation as the basis of his theory of functions of a complex variable, where such a function was considered independently of its expression, and a variable complex magnitude w was said to be a "function of a complex variable z" when it varies with z in such a manner that the value of the derivate $\frac{dw}{dz}$ is independent of the value of the differential dz.

With this definition of functionality, Riemann showed that the z-plane is a conformal representation on the w-plane and that the conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ and } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

are necessary and sufficient that w should be a function of z. From the latter equations, he deduced

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

1) Riemann remarked that this statement is evidently justified in all the cases where we can obtain from the expression of w in terms of z, by the rules of differentiation, an expression of $\frac{dw}{dz}$ in terms of z; but, as to its rigorous and general legitimacy, he dismissed the question for the moment. However, Weierstrass showed that the class of analytic functions is within, and not coincident with, the class of analytic expressions (see, further, below).

Digitized by Google

which form the basis for the study of the properties of one of the two terms of such a function considered separately. For such functions the theorem of Cauchy on complex integration, which Riemann proved in Cauchy's *second* way, which is the same as that obtained from Green's theorem in the plane, holds, and Riemann's (geometrical) theory of functions was built up in the well-known manner[1]). The progress which his researches made in the theory of functions of a complex variable was indicated by Riemann[2]) as follows:

"The methods hitherto used for the treatment of these functions always set out from the principle which consists in taking for definition an *expression* of the function, its value being thus given for *each* value of its argument. Our researches have showed that, in consequence of the general character of a complex variable, one part of the elements of determination are, in a definition of this nature, a consequence of the remaining part, and, indeed, the totality of these elements is here reduced to those necessary to the determination.

"That essentially simplifies the treatment of the qnestion. Thus, to prove, for example, the equality of two expressions of the same function one had, formerly, to transform the one into the other, that is to say show that they both coincided for every value of the variable; now it snffices to show that they coincide in a much more restricted domain.

"A theory of these functions, based on the principles introduced here, would establish the configuration of the function (that is to say, its valne for every valne of its argument), independently of a method for determining the function by means of operations on magnitudes; one would attain to the general definition of a function of a complex variable by adding only the characteristics necessary to determine the particular function; and then only would one pass from this theory to the study of the different expressions of which the function is susceptible.

"The individual character of a class of functions which are expressed in a like manner by the help of operations on magnitudes, presents itself then for these functions under the form of conditions relative to the boundary and to the discontinuities. For example, if the domain of variability of the magnitude z covers simply or mnltiply the whole indefinite plane **A**, and if the function has discontinuities

---

1) See Brill and Noether, *op. cit.*, pp. 256—265; W. F. Osgood, *Encykl. der math. Wiss.*, II. B 1, pp. 58—76.

2) *Op. cit.*, § 20.

only in isolated points, and in these points only infinities of finite orders (for z infinite this magnitude itself, for z' finite the magnitude $\frac{1}{(z-z')}$ being considered as an infinity of the first order), then the function is necessarily an algebraic function and, reciprocally, every algebraic function satisfies these conditions.

"We will not enter here upon the development of this theory which, by what we have remarked, is destined to throw light on simple laws of dependence ruled by operations on magnitudes; in fact, we will leave on one side the study of the expression of a function.

"For the same reason, we will not employ ourselves here in establishing the possibility of applying our theorems when they are taken as principles of a *general* theory of these laws of dependence; it would then be necessary to show that the conception of function of a complex variable which we here take as starting-point coincides completely with the idea of a dependence expressible by operations on magnitudes." To this Riemann added the note: "By dependence expressible by operations on magnitudes, we understand every dependence governed by a finite or infinite number of the four simplest operations of calculation, addition and subtraction, multiplication and division. The expression *operations on magnitudes* (in opposition to *operations on numbers* indicates that in such operations the commensurability of the magnitudes plays no part".[1])

In 1854, Riemann presented to the philosophical faculty, for his habilitation at the University of Göttingen, a work[2]) on the representability of a function (of a real variable) by a trigonometric series, which started from the general problem of which Dirichlet only solved a particular case: If a function is developable in a trigonometric series, what results on the variation of the value of the function (that is to say, what is the most general way in which it can become discontinuous and have maxima and minima) when the argument varies continuously? This question was not completely answered, and, perhaps

1) Weierstrass first showed that this "dependence" embraces a wider class of functions than the class of analytic functions (which are Riemann's "functions of a complex variable" ("Zur Funktionentheorie", *Berl. Ber.*, 1880, *Ges. Werke*, Bd. 2., pp. 201 sqq.); and Weierstrass' theory of analytic functions has also shown that Riemann's elements of determination are far from being all necessary (cf. Jourdain, *Journ. f. Math.* 128, 1905, 171—173, 177, 195—196).

2) "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen", *Ges. Werke*, 2. Aufl., 1892, pp. 266 sqq., *Oeuvr.*, pp. 225—279.

in consequence of this, the work was not published in Riemann's lifetime; but fortunately that part of it which concerns us more particularly, and which seems more than to fill the place of Dirichlet's contemplated revision of the principles of the infinitesimal calculus, has the finality obtained by the giving of the necessary and sufficient conditions for the integrability of a function $f(x)$, which was a necessary preliminary to Riemann's investigation.

The problem of finding these conditions was thus stated: Let a and b be two finite real numbers, and take between a and b a series of values $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ arranged in order of magnitude, from a to b, and call $x_1 - a, x_2 - x_1, \cdots, b - x_{n-1}$ respectively $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$; let ε_i be a positive number smaller than unity; then the value of the sum

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

depends on the choice of the intervals δ and the fractions ε. If it has the property of approaching indefinitely a fixed limit A when all the δ's tend towards zero, in whatever manner the δ's and ε's may have been chosen, this limit is called *the value of the definite integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Let D_r be the greatest oscillation of $f(x)$, i. e. the difference between its greatest and least values[1]) in the interval $x_{r-1} \cdots x_r$; then the sum

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

must become infinitely small with the quantities δ. Suppose that the greatest value that this sum can take, when all the δ's are smaller than d, is Δ; Δ will be a function of d, diminishing and becoming infinitely small with d. If this be so, the sum (s) of the intervals for which the oscillations are greater than a quantity σ can also be made infinitely small by a suitable choice of d, and reciprocally.[2]) Hence the necessary and sufficient conditions that S converges, when the δ's tend to zero, are that $f(x)$ remains finite[3]) and that the sum of the

1) [Rather, the difference between the upper and lower limits, which $f(x)$ need not take.]

2) Riemann completed his proof of the sufficiency (*op. cit.*, § V.) in a subsequent note (2) by considering two different methods of division and superposing them, in the manner already used by Cauchy („Résumé des leçons .... leçon 21).

3) More precisely, $f(x)$ must remain between finite limits; since a function which is finite at every point in an interval need not have a finite (upper or lower) limit in that interval (for example, $f(x) = \frac{1}{x}$ when $x \lessgtr 0$, $f(0) = 0$).

Riemann also considered the extension of the integral-definition to those

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

intervals for which the oscillations are greater than σ (however small the positive σ may be) can be made infinitely small by a suitable choice of d.[1])

Riemann constructed an integrable function which becomes discontinuous an infinity of times between any two limits, as close together as wished, of the independent variable, in the following manner: If, where x is a real variable, (x) denotes the (positive or negative) excess of x over the nearest integer, or zero of x is mid-way between two integers, (x) is a one-valued function of x[2]) with discontinuities at the points $x = n + \frac{1}{2}$, where n is an integer (positive, negative, or zero), and with $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$ for upper and lower limit respectively. Further, (νx), where ν is an integer, is discontinuous at the points $\nu x = n + \frac{1}{2}$ or $x = \frac{1}{\nu}\ n + \frac{1}{2})$. Consequently, the series

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu x)}{\nu^2},$$

where the factor $\frac{1}{\nu^2}$ is added to ensure convergence for all values of x, may be supposed to be discontinuous for all values of x of the form $x = \frac{p}{2n}$, where p is an odd integer, relatively prime to n. That this is the case may be seen by direct calculation: if $x = \frac{p}{2n}$,

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2};$$

cases in which the integrand becomes infinite (uneigentliche Integrale), according to the *general* definition of Cauchy for such cases. But on the *particular* conception of the „principal value" Riemann remarked that its arbitrariness would alone prevent it from being generally accepted (*op. cit.*, § 4.).

1) On the development of the conception of the definite integral with Hankel, Harnack, Volterra, Dini, du Bois-Reymond, Smith, Darboux, Jordan, Ascoli, de la Vallée Poussin, Hölder, and Lebesgue, see Schoenflies („Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", Leipzig, 1900 pp. 177—217, 87—97, 101—102), Nr. 4 and 5 below, and Lebesgue (*op. cit.*).

2) Indeed, (nx) can be represented by the trigonometrical series

$$(nx) = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin 2\nu n x\pi}{\nu}$$

(U. Dini, „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe", deutsch bearb. von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig, 1892, p. 201).

Digitized by Google

while, for all other values of x,

$$f(x+0)=f(x), \quad f(x-0)=f(x).$$

However, the number of oscillations which are greater than a given quantity σ is always finite, and hence, because, on both sides of every x, there are limiting values $f(x+0)$ and $f(x-0)$, $f(x)$ is integrable.[1])

Riemann[2]) showed, by an example, that there are integrable functions which cannot be represented by a Fourier's series, since this series does not converge, and then proceeded to give some functions which are not integrable and yet which are such that the series

$$\Omega = \tfrac{1}{2}b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x),$$

which determines a function $f(x)$ for these values (only) of x which make the series converge, converges for an infinity of values of x taken between two limits as near together as wished.[3]) Thus, the function represented by the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu x)}{\nu}$$

exists for every rational x, and is represented by the trigonometrical series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{\theta}[-(-1)^{\theta}]}{\nu\pi}\sin 2\nu x\pi,$$

where we must put in the place of θ all the divisors of ν, but does not remain between finite limits in any interval, however small, and is not, consequently, integrable.

We get other examples of the same class by putting for $c_0, c_1, c_2, \ldots$ in the series

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu \cos \nu^2 x, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu \sin \nu^2 x,$$

1) On the methods of the "condensation of singularities", which arose out of this example, see Dini, *op. cit.*, pp. 157—204, and § 4 and the end of § 3 below.

2) *Op. cit.*, § XIII.

3) It is to be noticed that Riemann was the first to consider functions defined for an argument-aggregate which is not a continuum (of real or complex numbers).

Digitized by Google

positive quantities always decreasing and becoming infinitely small, but for which

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu$$

becomes infinitely great. For if the ratio of x to 2π is rational, and has (in its lowest terms) m for denominator, these series are evidently convergent or divergent, according as

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \nu^2 x, \quad \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin \nu^2 x$$

are zero or different from zero. Both cases present themselves, by a well-known theorem on the division of the circle[1]), for an infinity of values of x between two limits as close together as wished.

A trigonometric series may also converge an infinity of times in an interval as small as wished without its terms becoming infinitely small with $\frac{1}{\nu}$ for every value of x. For example, the series

(5) $$\sum_{\nu=1}^{x} \sin (\nu!)\, x\pi$$

converges, not only for every rational value of x, since it is then limited, but also for an infinite number of irrational values, of which the simplest are $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$, and their multiples, the odd multiples of e, and so on.[2])

The study of the method used by Riemann in forming the function (4), in which the singularities of the single terms of the infinite series are, so to speak, „condensed" on the argument-domain of the sum led to Hankel's (1870) method of "condensation of singularities", which is fully treated below (§ 4); while H. A. Schwarz gave in 1873[3]) an example, formed more closely after Riemann's pattern, of a monotonous, continuous function which is not differentiable for an infinity of e's in *any* interval, and a more general study of such functions was made by Darboux.

Also Riemann's remark on the series (5) led[4]) to the consideration of series of the forms

$$\sum c_\nu \cdot \sin (\nu!\, \pi x), \quad \sum c_\nu \cdot \cos (\nu!\, \pi x),$$

1) Gauß, „Disquisitiones arithmeticae" (Werke, Bd. 1), art. 356.

2) Cf. the note (9) (of Dedekind) to Riemann's paper.

3) *Ges. Abh.*, Bd. 2, p. 269.

4) Pringsheim, *Encykl. der math. Wiss.*, II. A. 1, pp. 38—39.

and the more general

$$\sum c_\nu \cdot \sin\, m_\nu x, \quad \sum c_\nu \cdot \cos m_\nu x,$$

where m_ν and $\frac{m_\nu}{m_{\nu-1}}$ are integers greater than 1, which may represent continuous functions which have a definite derivate at no point.[1])

4.

Hankel's Work on the Theory of Funotions of a Real Variable and its motives.

Riemann, as we have seen, had studied not only the theory of "functions of a complex variable," — that is to say, those functions of a complex variable (z) for which a derivative exists at every point of the z-domain under consideration independent of dz, — but also the general theory of functions, in which, however, the variable was restricted to be real. The general theory of functions in Dirichlet's sense does not suffice for all the needs of analysis, since there is no necessary connexion between the values of the function at different points, and thus no "common properties" (such as the existence of differential quotients at all points, except perhaps at isolated ones); and also there only appears by the introduction of the complex variable and the limitation of the function-concept as exemplified in the works of Cauchy and Riemann a general criterion which permits us to decide whether *any*[2]) two expressions which have a meaning only in two intervals which exclude one another[3]) are to be regarded as parts of *one* function and not as "curvae mixtae".

1) Riemann is said to have announced the existence of such continuous functions, but the first published example is due to Weierstrass (see Part. 2 below). Darboux, in whose memoir of 1875 („Mémoire sur les fonctions discontinues", *Ann. de l'éc. norm.* (2), t. IV., 1875, pp. 57—112) Weierstrass was *never* mentioned, gave the example

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin[(\nu+1)!\, x]}{\nu!}$$

(cf. Dini, *op. cit.*, pp. 205—229).

2) That is to say, the expressions need not be capable of summation so as to appear evidently as the *same* function in the different intervals (as $\frac{1}{1-x^2}$ exists as two series converging in the domains $|x| < 1$ and $|x| > 1$).

3) For example, two series, the one converging when $|x| < 1$, the other when $|x| > 1$.

Now, it was Hermann Hankel's object to show how the needs of mathematics compel us to go beyond Dirichlet's concept, to introduce the complex variable, and finally to reach that concept from which Riemann started in his inaugural dissertation. For this purpose Hankel began his "Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen; ein Beitrag zur Feststellung des Begriffes der Function überhaupt" of 1870[1]) by a thorough examination of the various possibilities contained in Dirichlet's function-concept. But further, in Riemann's example appeared an *analytical expression* — and therefore a 'function' also in Euler's sense — which, on account of its manifold singularities, allowed of no such general properties as Riemann's 'functions of a complex variable', and Hankel gave a method, whose principles were suggested by this example, of forming analytical expressions with singularities at every rational point, and was thus led to state, with some reserve, that every 'function' in Dirichlet's sense is also a 'function' in Euler's sense.

In the introduction of Hankel's memoir, the development of the conception of a function was traced from the introduction, by Descartes, of the idea of *variability*, through the first explicit formulation of the concept by Leibniz and Johann Bernoulli, through the use of this concept by Euler as the starting-point for analysis[2]), through the death-blow given to Euler's concept given by Fourier's discovery that also functions following different laws in different intervals could be represented by periodic series, to the formulation, to which Dirich-

1) Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870 (Einladungsprogramm zum Geburtsfeste des Königs); reprinted in the *Math. Ann.*, **20** (1882), 63—112. Hankel's article "Grenze" (Ersch and Gruber's "Allgemeine Encyclopädie," 1. Section, Teil XC., pp. 185—211, Leipzig, 1871) also mentions these investigations, and, what is particularly interesting, gives us (p. 202) information which leads us to place the discovery of the principle of condensation *after* his classification of functions (whereas these are respectively § 4 and § 7 of the "Untersuchungen").

2) Here Hankel remarked that the general properties remarked in algebraic functions (their special continuity, their singularities, their special manner of becoming discontinuous or infinite) were transferred without scruple to all functions: Further, curves contained in one equation were called "curvae continuae", and the "curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares", were supposed to be in no way analytically representable; and when the ordinate of such a curve was introduced, in the problem of vibrating cords, as an arbitrary "function" of its abscissa, this was leaving the original function-concept. This happened also when, in determining the logarithmus of negative numbers, the attempt was made to continue a function of a real variable. Thus, even at the beginning of the 19th century the fundamental concept of function was still indeterminate.

Digitized by Google

let was thus led, of the *general* function-concept, independent of any prerequisite of analytical representation.

A Dirichlet's function has no general properties, and so all relations of function-values for different values of the argument are excluded. It was thus necessary to go beyond Dirichlet's concept; a step taken first by Cauchy. However, Riemann laid the foundations anew by attaining, from Dirichlet's concept, to that of a (monogenic) function of a *complex variable*, "and so again gave that empty definition a content, which approximated to that of the older concept".

Considering a real, one-valued, function $f(x)$ of a real variable x defined for an interval (say $\alpha \leqq x \leqq \beta$), it is *discontinuous* at $x = a$ ($\alpha < a < \beta$) when the positive ε can *not* be chosen so small that $|f(a+\delta) - f(a)| < \sigma$, where σ is a predetermined arbitrarily small positive magnitude, and δ is only subject to the restriction that $|\delta| < \varepsilon$. Now $f(a+\varepsilon)$ may, with decreasing ε, approach a limit different from $f(a)$, as Fonrier's series at the points of discontinuity. If, then, the positive ε cau be so small that for $0 < \delta < \varepsilon$,

$$|f(a+\varepsilon) - f(a+\delta)| < \sigma,$$

$f(x)$ need not be continnons *at* $x = a$, and is merely continuous "*in the immediate neighbourhood* of the point $x = a$ (on the right-hand side)"; but not inversely. Further $f(x)$ can be continuous at every point $x = a + \varepsilon$ approaching $x = a$ arbitrarily closely without being so at $x = a$, only in its immediate neighbourhood. For example,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a},\ f(a) = 0$$

is continuous "np to the immediate neighbourhood of $x = a$", but not at $x = a$, nor in its immediate neighbourhood; for ε can never be taken so small that, for every $\delta (0 < \delta < \varepsilon)$,

$$|f(a+\varepsilon) - f(a+\delta)| = \left|\sin \frac{1}{\varepsilon} - \sin \frac{1}{\delta}\right| < \sigma,$$

since this difference continually fluctnates between $+1$ and -1. Inversely, as an example below will show, $f(x)$ can be continuous at $x = a$ and in its immediate neighbourhood, without being so up to its immediate neighbonrhood.

The values $f(a+0)$ and $f(a-0)$ (if they exist, and differ from $f(a)$ and from one another) are the "leap-values", or such values to the right or left if (respectively)

$$f(a+0) = f(a) \text{ or } f(a+0) = f(a).$$

If $f(a+0) = f(a-0)$ but is not equal to $f(a)$, the discontinuity is "removable" (Riemann).

A function continuous at every point of a finite interval may either have a *finite* number of oscillations (i. e., the pieces of the function between a maximum and a minimum), or an *infinite* number of 'infinitely small amplitude' in the immediate neighbourhood of a point; for example, the function

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \gtrless 0), \; f(0) = 0$$

is continuous at $x = 0$, but always oscillates as x approaches this value. However, a continuous function can have in no arbitrarily small interval oscillations whose amplitude is greater than a certain positive σ; for, if for the point $x = a$ no interval exists in which, for all ε's,

$$|f(a+\varepsilon) - f(a)| < \delta,$$

δ being arbitrarily small, but always oscillates about the amplitude greater than σ, $f(x)$ is not continuous at $x = a$.

A function $f(x)$ is called discontinuous at the point $x = a$ when, among the values of $f(a+\delta) - f(a)$, when $|\delta| < \varepsilon$, there are always some numerically $> a$ certain finite positive σ, however small ε is. Then we say: $f(x)$ makes at $x = a$ *leaps* (*Sprünge*), which $> \sigma$. Also the *fluctuation* (*Schwankung*, Riemann) of $f(x)$ in a certain interval is the difference of its greatest and least values in that interval. The fluctuation of a function inside an interval containing the point $x = a$ at which $f(x)$ makes leaps $> \sigma$ is thus $> \sigma$. If the leaps are $< \sigma$, one can always find a small interval round the point inside which the fluctuation $< 2\sigma$.

Functions which are discontinuous, at infinitely many points of a finite line are called linearly continuous, as opposed to *punctual* (punktuelle) discontinuity (at a *finite* number of points). Either, now, the number of points at which leaps $> \sigma$ occur is infinite, or only tends to infinity when σ decreases without limit; an example of the first case is given by the (Dirichlet's) function which is zero for all rational x's $(0 \leqq x \leqq 1)$, 1 for all irrational points. Let, next, $f(x) = 1$ for the line $(0 \cdots 1)$ except at infinitely many intervals of length ζ^ν, of which the centres are the points $x = (\frac{1}{2})^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty)$; but in every such interval $f(x)$ is as described in the former example. The total length of the intervals in which fluctuations $= 1$ occur everywhere is

$$s = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Between two such intervals lies a line (if, say, $\zeta < \frac{1}{4}$) in which the function is continuous.

Thirdly, let $f(x) = 1$ for all x's in $(0 \cdots 1)$ except at $x = (\frac{1}{2})^\nu$ $(\nu = 1, \cdots \infty)$ where $f(x) = 0$. There is nowhere an interval filled wholly with discontinuities, and the total length of all intervals containing discontinuities, is, if ε^ν is the interval containing $x = (\frac{1}{2})^\nu$,

$$s = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

which can be made arbitrarily small with ε.

Fourthly, from $x = (\frac{1}{2})^\nu$ to $x = (\frac{1}{2})^{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots \infty)$, let $f(x) = (\frac{1}{2})^\nu$. The leaps are only at the points $x = (\frac{1}{2})^\nu$ and amount to $(\frac{1}{2})^\nu$, and the number of points at which the leaps $> \sigma$ only tends to infinity when σ decreases without limit. The totality of the intervals in which leaps occur can be made as small as wished for every σ.

Thus we are led to consider two classes of points, which have a certain property[1]), on a line:

(1) The points *"fill the line"* (there is no interval in which no point of the aggregate (Schar) considered lies);

(2) They do *not* fill it, but lie *scattered* (*zerstreut*) on it (between any two points of the line, however near, an interval can be given in which no poiut of the aggregate lies).

In the second case, Hankel concluded that *the totality s of the interval in which the fluctuations $> 2\sigma$, can be taken arbitrarily small.* We need only consider more closely the case of the scattered points of discontinuity being *infinite* in number. Then divide the whole line considered into intervals of which every one surrounds one of these points of discontinuity with leaps $> \sigma$, and choose this interval so large that together the intervals fill the whole line. Imagine every interval drawn together to (auf) the nth part, so, however, that the point of discontinuity is still surrounded. Then the remaining part of the line is free from leaps $> \sigma$; but the sum of those intervals in which leaps $> \sigma$ occur, is the nth part of the whole line and can thus, by increasing n, be made arbitrarily small.[2])

1) Here this is: at which leaps $> \sigma$ occur.

2) Dini noticed in 1878 the lack of rigour in this proof of Hankel's that every point-wise (punktiert) function is integrable (*op. cit.*, p. 341), while Smith ("On the integration of discontinuous functions", *Proc. Lond. Math. Soc.*, **6**, 1875, 140—153) had already given an example of an aggregate of points which, although intervals containing no points lie in *every* interval, has a positive „content" (the limit of the sum of the intervals containing points), and thus showed that a point-

Inversely, if s can be made arbitrarily small, the points at which the leaps $> \sigma$ can only occur sparsely (zerstreut). For if these points fill the interval h, s could never $< h$. Analogously, if the points of leap $> \sigma$ fill a line, no interval in which the fluctuation $< \sigma$ can be found in it; and inversely, if in every interval the fluctuation $< \sigma$, the line is filled with points at which there are leaps $> \frac{1}{2}\sigma$.

Conseqnently, linearly discontinuons functions fall into two classes:

(1) *Point-wise* discontinuous (*punktiert* or *punkt-weise unstetig*), when the points with leaps $> \sigma$ fill no line, however small $\sigma > 0$ is. It is necessary and sufficient that s can be made arbitrarily small for every $\sigma > 0$; or all such functions are *integrable.*[1]) These functions are continuous at infinitely many points, and indeed in the immediate neighbourhood of every point of discontinuity. They can have differential quotients at their points of continuity.

(2) *Totally* discontinuous, when points with leaps $> \sigma$ fill whole intervals. It is necessary and sufficient that s has a definite lower limit > 0; or all such functions are non-integrable.[2]) In the first example above, the function is totally discontinnons in all parts of the line; in the second it is continuous in infinitely many lines. Everywhere where a function is totally discontinuous it has also no differential qnotient; bnt snch a function may be analytically representable.

To construct functions in the form of convergent infinite series of functions, of which each has one singularity, so that the sum-function has a singularity at *every rational point* (Hankel's "principle of the condensation of singularities"), Hankel started from the real function $\varphi(y)$ of the real variable y, which, for all values of y between $+1$ and -1, has a definite value lying between $+1$ and -1 and shows "the normal behaviour of analytic functions" of being developable in

wise discontinuons function need not be integrable (see, further, Pringsheim, *op. cit.*, pp. 39—42).

Accordingly, Harnack (*Math. Ann.*, **19**, 1882, 246) modified Hankel's definition and called $f(x)$ "punktiert unstetig" when the points with leaps $> \sigma$ form a content-less ("discrete") aggregate. In this sense, every such $f(x)$ is, of course, integrable.

1) Cf. the preceding note.

In the third example above, the number of points with leaps $> \sigma$ is already infinite for a finite σ; in the fourth, the number only increases beyond all limit with a σ decreasing indefinitely (as do all linearly discontinnons functions which have only a finite number of maxima and minima on a finite line).

2) In the first example above, the functiou is totally discontinnous in all parts of the line; in the second, it is continnous in infinitely mauy lines.

Digitized by Google

Taylor's series except at $y = 0$; and $\varphi'(0) = 0$. The function $\varphi(\sin \nu\pi x)$, where x is a rational number is thus singular for some integer ν, so that Hankel formed the function

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin \nu\pi x)}{\nu^s},$$

where $s > 3$, to bring about convergence, and then proceeded to prove that all the singularities of the terms are transferred to $f(x)$.

To investigate the singularities of $f(x)$, we have, since

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} < \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(s-1)m^{s-1}},$$

the equality

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi(\sin \nu x\pi)}{\nu^s} + \frac{h}{m^{s-1}} \qquad (0 < h < 1),$$

Thus, if h' also denotes a positive proper fraction,

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi(\sin \nu[x+\varepsilon]\pi) - \varphi(\sin \nu\pi x)}{\nu^s} + \frac{h'}{m^{s-1}}.$$

Here m denotes an arbitrarily large, ε an arbitrarily small number, whose increase and decrease can be put in any connexion with one another. We will suppose that, however great m is, $m\varepsilon$ always lies below an arbitrarily small magnitude. Since, then, *à fortiori*, $\nu\varepsilon$ is arbitrarily small, the development

$$\varphi(\sin \nu[x+\varepsilon]\pi) = \varphi(\sin \nu x\pi) + \nu\varepsilon\pi \cos \nu x\pi \cdot \varphi'(\sin \nu[x+\varkappa\varepsilon]\pi),$$

where $\varkappa$ is a proper fraction, is permissible, if $\sin \nu x\pi$ is not zero. Substituting in the above expression, $f(x)$ is seen to be continnous at every irrational point; and also has a definite finite differential quotient at every such point; for

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \pi \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi'(\sin \nu[x+\varkappa\varepsilon]\pi)}{\nu^{s-1}} \cos \nu x\pi + \frac{h'}{\varepsilon m^{s-1}}.$$

When ε decreases; if the relation of ε and m is determined so that εm decreases infinitely, but εm^{s-1} increases infinitely (e. g., if $m = \frac{1}{\varepsilon q}$, $1 > q > \frac{1}{s-1}$), then the remainder vanishes so that at every irrational x, $f(x)$ has a determinate differential quotient, independent of the decrease of ε:

$$f'(x) = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin \nu x\pi)}{\nu^{s-1}} \cos \nu x\pi.$$

Digitized by Google

In the series which determines $f(x+\varepsilon)-f(x)$:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi(\sin \nu[x+\varepsilon]\pi)-\varphi(\sin \nu x \pi)}{\nu^s},$$

the terms for which $\nu=\mu r$ (r an integer), since $\varphi\left(\sin \nu \cdot \frac{\varpi}{\mu}\right)=\varphi(\sin r \varpi \pi)$ $=\varphi(0)=0$, give the series;

$$\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\left(\text{greatest integer in } \frac{m}{\mu}\right)} \frac{\varphi(\pm \sin r \mu \varepsilon \pi)}{r^s},$$

the sign being positive or negative according as r is even or odd.

For this we can write, when ε decreases and $m\varepsilon$ always remains arbitrarily small:

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm r \mu \varepsilon \pi)}{r^s}.$$

Now the manner in which the singularity of φ is transferred to $f(x)$ appears; for s can always be taken so large that the first term of this series,

$$\frac{1}{\mu^s}\varphi(\pm \mu \varepsilon \pi)$$

essentially determines the singularity.

Then $f(x)$ has no derivates for rational points; and if $\varphi(y)$ is *continuous* at $y=0$, $f(x)$ is continuous at *all* points, but has no differential quotient at rational points.[1])

Hankel's researches have, then, shown that — Dirichlet's concept of function having clearly no general properties — even Euler's concept includes functions which are discontinuous, infinite in the most different ways, or indeterminate at infinitely many points of a finite interval, and thus we cannot assert that such functions have a number of common properties, in especial: continuity, differentiability, determinateness, and developability by Taylor's theorem — single singular points excepted. In short, both concepts have not shown themselves to be essentially different in so far as we are in a position to represent analytically functions "of all possible kinds (this is to be understood

1) On Hankel's method, see Dini (*op. cit.*, pp. 157—188) and Pringsheim (*of. cit.*, pp. 36—38). I enter fully into the consideration of the functions which Hankel constructed in an edition of Hankel's memoir which has been prepared by me for "Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften".

Digitized by Google

cum grano salis; for it is not yet made out whether single *thinkable* cases do not escape analysis)".[1])

"Thus, both concepts are insufficient to form the foundation of a general theory of functions. For the problem of all mathematics is to derive new relations from given relations which refer to a domain of objects, by applying the general properties of the concept under which all those objects are subsumed. But if such general properties do not exist, every transformation of the given relations remains an empty tautology."

For example; to determine $f(x)$ from the functional equation

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

we get for every *rational* x

$$f(x) = xf(1);$$

but a *general* determination of how $f(x)$ depends on its argument is not possible. If, however, $f(x)$ is supposed to be *continuous*, the latter equation holds generally, for the function-values for irrational x's "ordnen sich stetig ein" between the values for rational x, s.

Again, if

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

for all x's between 0 and 1, the question: what values has $f(x)$ for other x's? is not to be answered by Dirichlet's concept. Some '*law*' by which, "from a series of characteristics, we can conclude the presence of others not given or observed."

This law, said Hankel, must, if it is to correspond to the needs of the analyst, be obtained by the general *principle of permanence of formal laws*. Here, for functions, algebraic expressions, as obtained (completely calculated) by the four elementary operations are to be the permanent types. In this way, we are led to postulate that the functions

1) This quotation really certains the gist of Hankel's argument. If the statement were correct; of which Hankel seems to have had little doubt, and of which even in 1878 Dini ("Fondamènti per la teoria ...", p. 37; "Grundlagen ..." (1892), p. 49) asserted the possibility, which is not, however, to be answered "in a perfectly satisfactory way in the present state of science"; it would follow at once that there is no essential difference between the two concepts. [That there is a fundamental difference; which brings Euler's concept closer to that of an "analytic" function; is easily proved by comparing the (transfinite) cardinal numbers of the aggregates of the classes of functions considered. In this manner, Jourdain (Journ. für Math., 128, 1905, 179—180) proved that there are functions in Dirichlet's conception which are not capable of analytical representation.]

Digitized by Google

should be developable by Taylor's theorem. If, now, we consider only real variables, the line is *closed* by two singular points; but, by introducing the *complex* variable, we can, so to speak, *go round* these points and solve the problem of 'continuation'.

Then, to define that a function w shall be built up from the complex variable $(x+yi)$ regarded as a whole, has only a meaning for algebraic function; bnt the property of these that

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

may instead be regarded as 'permanent', and this is Riemann's concept of a "function of a complex variable".

Cantor[1]), in a review of Hankel's memoir (1871), remarked that Hankel's proof that his functions are continnous and have a derivate at all irrational points seems incorrect. For the conditions imposed on ε constrain it to such a degree of smallness that $\varepsilon \cdot m^{s-1}$ does not increase *ad infinitum*. "Thus the function $f(x)$ would be still more singular than the anthor says, and the qnestion arises as to which irrationalities x the existence of the differential quotient is limited by it. So also the further development connected with this section can only be accepted with foresight." This criticism, however, does not appear to be valid.

On recurring to the snbject in 1882[2]), Cantor might be taken to have stated that, in this review, he had pointed out that Hankel's principle has three fanlts: firstly, each singularity is brought about by an infinite number of terms of the series so that the possibility of a compensation enters[3]); secondly, the oscillations introduced by the use of the sine have no connexion with the problem and needlessly complicate the course of the function; thirdly, the aggregate of singular points, being restricted to the aggregate of the rational points, is not sufficiently arbitrary.

1) *Literarisches Zentralblatt*, 18. Febr. 1871, pp. 150—151. The review is unsigned, but Cantor (*Math. Ann.* **19**, 1882, 589), at the beginning of an article communicating the Weierstrass-Cantor principle, referred to it as his own. It may be remarked that in this review Cantor describes Hankel's object wrongly in saying that it is to establish Riemann's function-concept between the too wide concept of Dirichlet and the too narrow (sic) one of Euler. Further Hankel's classification is mentioned, but no objection made.

2) *Math. Ann.* **19**, 588 sqq.

3) This was shown to be actually possible by Ph. Gilbert (*Bruxelles mém. couronnées*, 1873).

Digitized by Google

Is has seemed proper to remark that the statement in question was not made by Cantor, nor does the statement appear to be true. This is pointed out here at some length, both because Cantor has sometimes been misunderstood[1]), and because every indication that can be found of Cantor's work is of importance in our present subject.

5.

The problems of trigonometric series arising from Riemann's work; Heine, Cantor, Ascoli, du Bois-Reymond, Harnack, and Hölder.

The first important step made, after Riemann, in the new period of development of the theory of trigonometric series inaugurated by Riemann resulted from Weierstrass' discovery[2]) of the conception of uniform convergence, and that the integral of a sum can only be equated to the sum of the integrals of the terms without further examination when the series is uniformly convergent. In consequence of this, as Heine[3]) remarked, Riemann's proof of the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric series, which depended on this term-by-term integration, failed. Heine thereupon gave a proof for those functions which satisfy Dirichlet's conditions, using the simplified proof of Dirichlet's theorem which results when the "second theorem of the mean value" of Dirichlet's integral is used.[4]) But the more general problems, to establish the uniqueness of *any* trigonometrical development, and to show under what conditions a trigonometrical series is a Fourier's series, that is to say, whose coefficients are of the (Fourier's) integral form, led back, in the works of Georg Cantor[5]), Ascoli[6]) and Paul du Bois-Reymond[7]) to

1) E. g., by Pringsheim (*op. cit.*, p. 37).

2) Weierstrass had made this discovery by 1841, but did not then publish it (see Pringsheim, *op. cit.*, p. 36). The conception was found (and published) independently by Stokes and Seidel in 1847 (see Reiff, *op. cit.*).

3) "Über trigonometrische Reihen", *Journ. für Math.*, Bd. LXXI (1870), pp. 353 sqq.; "Handbuch der Kugelfunktionen" (2te Aufl., Berlin 1878), Teil I, pp. 57 sqq.

4) The theorem in question was discovered, and its use in the theory of trigonometric series shown, by Bonnet ("Remarques sur quelques intégrales définies", *Journ. de Math.*, t. 14, 249), and later, independently, by P. du Bois-Reymond.

5) Cantor's memoirs (*Math. Ann.*, 4, 5) are fully treated in Part. 3 below.

6) *Atti della Accad. dei Lincei* (3), t. II, p. 584; *Math. Ann.*, 6.

7) *Abh. d. bayer. Akad.*, 2. Cl., Bd. XII, Abth. I. 1875.

Riemann's investigation. Riemann's theorem in the eighth article of his memoir has remained, unaltered, the foundation for the theory of trigonometric series, and his thirteenth article led the way to the finding of limits of representability, which du Bois-Reymond[1]) first showed to exist even for *continuous* functions.[2])

For the further development of the theory of trigonometric series, the memoirs of Harnack[3]) and Hölder[4]), which generalise the results of Cantor and du Bois-Reymond, respectively, are of importance. We shall have occasion later to consider more particularly that part of Harnack's writings which is concerned with the point-aggregates studied by him, but otherwise the theory of trigonometric series does not seem, after 1871, to have contributed to the development of the theory of infinite point-aggregates.

Before considering more closely the work of Cantor on trigonometric series, which was the occasion for his first publication on the theory of aggregates (1871), we must summarise the work of Weierstrass, which had an important influence on the formation of Cantor's conceptions.

---

1) *Ibid*, Abth. II, and *Math. Ann.*, **10**.

2) See also Schwarz (Ostwald's Klassiker, Nr. 116, pp. 54—55) and E. W. Hobson (*Proc. Lond. Math. Soc.* (2), vol. **3**, 1905, pp. 48—61).

3) "Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Funktionen", *Math. Ann.*, **17** (1880), p. 122—132; "Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourierschen Reihe", *ibid.*, **19** (1882), pp. 235—279, and "Berichtigung" on pp. 524—528. Cf. his "Théorie de la Série de Fourier", Paris, 1883 (reprinted from the *Bull. des sc. math.* (2), 6, 1882).

4) *Math. Ann.*, **24** (1884), p. 208.

On the development of the theory of trigonometric series since Heine, see Schoenflies, *op. cit.*, pp. 245—250.

Digitized by Google

Über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze (Transfiguration).

Von Josef Herzog in Budapest nnd Clarence Feldmann in Delft.

Die Berechnung der Spannungs- und Stromverteilung in Leitergebilden war im Prinzipe schon längst von Gauß, Kirchhoff, Maxwell n. A. gegeben worden, als die Elektrotechniker durch die unterirdischen Leitungen für große Stadtanlagen das Bedürfnis fühlten, auf einfachste Weise in diese Probleme einzudringen. Es zeigte sich, daß mit jenen allgemeinen Erkenntnissen den speziellen technischen Anforderungen nicht ohne weiteres gedient war. Der Fall lag ähnlich wie in der Mechanik, wo der d'Alembertsche Satz zwar eine allgemeine Regel für das Gleichgewicht von Kräften bot, doch dem Ingenieur zum Verständnis nnd zur Anwendung immer nur die einfachen Hebelgesetze nötig sind.

1. *Der Komponentensatz.* — Es sei, Fig. 1, AB ein Leiter eines Netzes, an dessen Endknoten die Spannungen V_1 und V_2 herrschen, und in welchem bei C unter der Spannung V eine Stromentnahme J stattfindet. Wir setzen Gleichstrom oder bei Wechselstrom nicht induktive Widerstände nnd Stromentnahmen für die Praxis voraus. Der Widerstand des ganzen Leiters AB sei r und

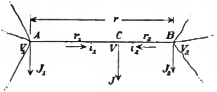


Fig. 1.

seiner Teile r_1 und r_2, deren Ströme i_1 nnd i_2 zufolge der Kontinnität in der Strömung in Snmme der Abnahme in C gleich sein müssen: $J = i_1 + i_2$. Für die Spannung V dieses Mittelknotens gilt: $V = V_1 - i_1 r_1 = V_2 - i_2 r_2$. Aus diesen Bedingungen ergeben sich die Leiterströme:

$$(1) \qquad i_1 = J\frac{r_2}{r} + \frac{V_1 - V_2}{r}, \quad i_2 = J\frac{r_1}{r} - \frac{V_1 - V_2}{r}.$$

Das Vorderglied dieser Ausdrücke bedeutet jene Stromstärken, welche in den Teilen r_1 und r_2 bei gleichhohen Endspannungen $V_1 = V_2$ auftreten würden. A und B können dann als zusammenfallend gedacht werden (Fig. 2) wobei der resultierende Widerstand R die Teile r_1 und r_2

nach $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ersetzen kann. Das zweite Glied stellt hingegen denjenigen Strom i_0 vor, der ohne Stromentnahme bei C, also $J = 0$, auftreten würde. Diesen kann man als Leerlaufstrom bezeichnen. Fassen wir $J\frac{r_1}{r}$ und $J\frac{r_2}{r}$ als Komponentenströme von J auf (gleichwie bei parallelen Kräften), so können wir diese als in A und B wirkend ansehen, ohne außerhalb des Leiters AB im Netze eine Zustandsänderung herbeizuführen.

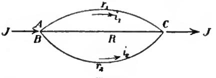


Fig. 2

Wenn wir J (Fig. 3) in diese Komponenten spalten, so können wir sogar den Knoten C zerschneiden. Ergibt die Rechnung einen der beiden Teilströme negativ, so bedeutet dies, daß im Knoten diese physikalische Trennung nicht möglich ist. Von A nach B wird Energie übertragen und ein Teil davon in C abgegeben, während in dem wahren Schnittknoten von A und von B nach C die Ströme führen.

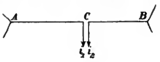


Fig. 3.

Die Komponentenströme lassen sich noch anders ausdrücken. Denn es ist $i_2 = J\frac{r_1}{r} = J\frac{r_1}{r_1 + r_2} = J\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2) r_2} = J\frac{R}{r_2}$, was mit Bezug auf Fig. 2 die Gleichheit des Strommomentes $J \cdot R$ mit dem $i_2 \cdot r_2$, ganz wie in der Mechanik der parallelen Kräfte, erkennen läßt.

Die Gleichung (1) weist durch ihren linearen Charakter darauf hin, daß die Strom- und Spannungsverteilung aus zwei Einzelbildern zusammensetzbar ist. Einmal ohne Stromabnahme und ungleiche Spannungen, dann mit Abnahmen und gleichen Knotenspannungen. Dieses wichtige Prinzip der Aufeinanderlagerung oder Superposition rührt von Smaasen, Helmholtz u. a. her. Seine klare Erkenntnis eröffnet eine tiefe Einsicht in die Netzprobleme.

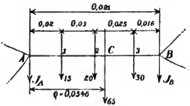


Fig 4.

Vorstehende Sätze sollen an zwei Beispielen erläutert werden. Ein Netzleiter AB (Fig. 4) hat drei Stromabnahmen von 15, 20 und 30 Ampere; diese sollen auf die Endknoten versetzt werden. Die Abnahme von 15 gibt in A die Komponente $15\frac{0{,}03 + 0{,}025 + 0{,}016}{0{,}091} = 11{,}7$; in B

$15 - 11{,}7 = 3{,}3$. Die Abnahme 20 zerlegt sich in $20\frac{0{,}025 + 0{,}016}{0{,}091} = 9$ und in $20 - 9 = 11$; ebenso die dritte Abnahme 30 in 5,274 und 24,726. Daher in A die Summe $11{,}7 + 9 + 5{,}274 = 25{,}974$ und in B $3{,}3 + 11 + 24{,}726 = 39{,}026$ Ampere.

Man kann auch den resultierenden (im Schwerpunkte wirkenden) Strom von 65 Ampere in seine Komponenten zerlegen. Es ist das Strommoment $65 \cdot \varrho = 15 \cdot 0{,}02 + 20 \cdot (0{,}02 + 0{,}03) + 30 \cdot (0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}025)$; woraus sich $\varrho = \frac{3{,}55}{65} = 0{,}0546$ Ohm und die Komponenten der Resultierenden $J_B = 65 \cdot \frac{0{,}0546}{0{,}091} \doteq 39$; $J_A \doteq 26$ berechnen.

Als zweites Beispiel diene eine geschlossene Leitung, Fig. 5, die bei A 390 Ampere empfängt und in drei Knoten 1, 2 und 3 abgibt. Nehmen wir an, im Knoten 1 wäre die richtige (physikalische) Schnittstelle. Die diesem Knoten entsprechende Gleichung ist alsdann: $x_1 \cdot 0{,}003 = (130 - x_1)[0{,}002 + 0{,}004 + 0{,}004] + 110[0{,}002 + 0{,}004] + 150 \cdot 0{,}002$, woraus sich $x_1 = 173{,}84$ und $130 - x_1 = -43{,}84$ Ampere ergibt.

Damit hat man bereits die richtigen Werte, sowie die Richtung der Ströme gefunden. Da nämlich der Strom x_1 positiv ist, fließt er in der angenommenen und durch den Pfeil angedeuteten Richtung nach 1 zu, und da der Strom $(130 - x_1)$ sich negativ ergibt, fließt er

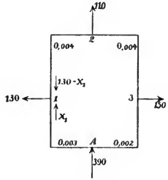


Fig. 5.

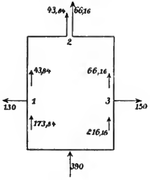


Fig. 6.

entgegengesetzt der angenommenen Pfeilrichtung, also von 1 weg. In der Teilstrecke $A1$ fließt also ein Strom von 173,84 Ampere bis zur Abzweigstelle 1, welche 130 Ampere abnimmt; in der Strecke 12 fließen $173{,}84 - 130 = 43{,}84$ Ampere in der Richtung gegen 2 weiter, in welchem Knoten 110 abgeführt werden. Es müssen sich also hier die

von der einen Seite zuströmenden 43,84 Ampere mit 66,16 von der anderen Seite zu 110 ergänzen. Zwischen 2 und 3 herrscht also ein Strom 66,16 mit der Richtung gegen 2. Man sieht, daß dies die Schnittstelle ist (Fig. 6). Diese Schnittmethode, geschlossene Netze durch beliebige Schnitte in Knoten in offene Leitungen zu verwandeln und für diese die Stromgleichungen aufzustellen, hat in der Praxis vielfache Verwendung gefunden.

Dieser Komponentensatz bleibt für Knoten mit mehr als zwei Schenkeln erhalten.

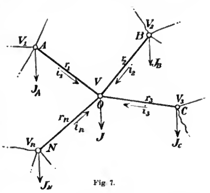


Fig. 7.

Fig. 7 erklärt die nachfolgend gewählte Bezeichnung. Die Einzelströme, welche dem n-schenkligen Knoten mit der Abnahme J in den Leitern $r_1 \ldots r_n$ zufließen, sind

$$i_1 = \frac{V_1 - V}{r_1};\; i_2 = \frac{V_2 - V}{r_2} \;\cdots;\; i_n = \frac{V_n - V}{r_n};$$

für deren Summe J gilt also

$$\text{(N)}\quad J = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \cdots + \frac{V_n}{r_n} - V \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}\right).$$

Der Klammerausdruck bedeutet $\frac{1}{R}$, die Leitfähigkeit der parallelgeschalteten Schenkelwiderstände. Aus der letzteren Gleichung findet sich die Spannung des Mittelknotens

$$V = \left(\frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \cdots + \frac{V_n}{r_n} - J\right) R,$$

welcher Wert in $i_1 = \frac{V_1 - V}{r_1}$ eingesetzt, für den Leiterstrom gibt:

$$i_1 = \left[\frac{V_1}{r_1} - \frac{R}{r_1}\left(\frac{V_1}{r_1} + \frac{V_2}{r_2} + \cdots + \frac{V_n}{r_n}\right)\right] + J\frac{R}{r_1},$$

d. h. die zuführenden Ströme bestehen also aus den Leerlaufströmen, welche bei $J = 0$ auftreten und nur von den Knotenspannungen V_1, V_2, $\cdots V_n$ und den Schenkelwiderständen r_1, r_2, $\cdots r_n$ abhängen, und aus den Komponentenströmen $J_A = J \cdot \frac{R}{r_1}$, $J_B = J \cdot \frac{R}{r_2}, \cdots J_N = J \cdot \frac{R}{r_n}$, welche von den Knotenspannungen unabhängig sind. Demnach kann die Entlastung eines Mittelknotens O vorgenommen werden, ohne die Spannung in seinen Nachbarknoten A, B, ... zu beeinflussen, ein neuer für die Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze wichtiger Satz.

Bezeichnet man das Produkt einer Spannnung V mit der Leitfähigkeit $1/r$ als Spannungsmoment, so läßt sich Gleichung (N) für $J = 0$ kurz so ansspreehen: Das Spannungsmoment eines unbelasteten Mittelknotens auf seine Nachbarknoten ist der Summe der Spannungsmomente dieser letztern auf erstern gleich.

2. *Widerstandstreue Umbildung eines Dreiecksnetzes.* — Ein dreiknotiges Netzstück mit den Eckspannungen A, B und C Volt und den Seitenwiderständen a, b und c Ohm soll durch Einfügung eines nenen Knotens von der Spannung D mit den Schenkelwiderständen α, β und γ in einen Stern derart umgebildet werden, daß das übrige Netz unbeeinflußt bleibt (Fig. 8). Hieraus finden sich die Ströme in den Dreieckseiten i_a, i_b nnd i_c nnmittelbar. Der Eckstrom $J_A = i_b + i_c$ gibt mit dem Schenkelwiderstand α das Spannungsgefälle vom Knoten A nach D. Es ist also:

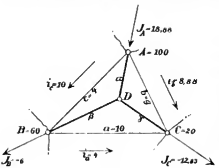


Fig. 8.

$$(2) \qquad \alpha J_A = \alpha \cdot (i_c + i_b) = \alpha \left(\frac{A-B}{c} + \frac{A-C}{b} \right) = A - D,$$

analog für β und γ. Jedem beliebig gewählten Werte D ließen sich drei zusammengehörige Schenkelwiderstände $\alpha\beta\gamma$ znweisen. Um das Verständnis zu erleichtern, werde die weitere Entwicklnng an Hand eines Zahlenbeispiels durchgeführt, dem die in Fig. 8 eingetragenen Zahlenwerte entsprechen. Nehmen wir für D beispielweise die Spannung mit 80 Volt an, so ergibt sich für $\alpha = 1{,}06$; $\beta = 4{,}66$ und $\gamma = 3{,}33$ Ohm.

Um den inneren Zusammenhang dieser Werte mit den Seitenwiderständen aufzudecken, fragt es sich, wie der Stern aus dem Dreieck organisch entwickelt werden kann. In jeder Seite suchen wir je einen Punkt mit der Spannung D auf (hier 80) und ziehen diese D_a, D_b und D_c zu einem einzigen, dem neuen Mittelknoten, zusammen. Die drei Seiten tragen also sechs Widerstandsstücke, welche die merkwürdige Eigenschaft besitzen, daß das Produkt je dreier nicht benachbarter einander gleich ist (bis auf den Zeichenwechsel); außerdem liegen diese drei Spannungspunkte auf der Niveaulinie $D = 80$ Volt, sofern es sich um die Widerstandsfigur handelt (was dem alten Satze von Menelaus und dem reziproken Ceva-Carnotschen Satze der Geometrie entspricht). In Fig. 9 ist das Nivean Null nnd jenes von 80 mit den

gleichhohen Spannungspunkten D_A, D_B und D_C eingezeichnet, welche die sechs Stücke 2,0, 2,0; 2,25, 6,75 und 15, — 5 ergeben, (Fig. 10). Werden

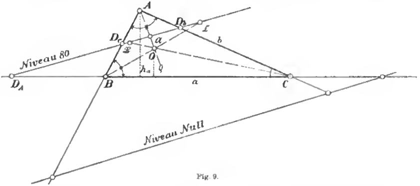


Fig. 9.

nun die in einem Knoten zusammenstoßenden Widerstände durch ihre Resultierende ersetzt, so müssen die Schenkelwiderstände wieder erscheinen. In der Tat gibt:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2,25} = \frac{1}{1,06}$ für den Knoten A; ferner $\frac{1}{-5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3,33}$ für B und $\frac{1}{6,75} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4,66}$ für C, was mit den obigen Werten für α, β und γ übereinstimmt.

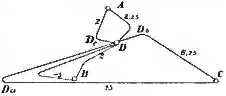


Fig. 10.

Diese Parallelschaltung können wir nach Fig. 11 vornehmen. Sind die Widerstände r' und r'' auf den Schenkeln eines Winkels aufgetragen, so zählt der aus den Einheiten gezogene Mittelstrahl $A\mathfrak{A}$ ihre Parallelschaltung. (Wird der Nebenwinkel berücksichtigt, so findet sich der zweite Wert entsprechend dem negativen Seitenwiderstand.)

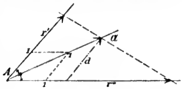


Fig. 11.

Es sind demnach bei A, B, C die Winkel zu halbieren und mit der Niveaulinie 80 Volt zum Schnitt zu bringen; durch diese Schnittpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind nach Fig. 11 die diesem Niveau entsprechenden Schenkelwiderstände α, β und γ sofort bestimmt. Für die bevorzugte Niveaulinie, welche durch den Mittelpunkt des Inkreises O führt, fallen

jedoch diese getrennten Punkte 𝔄, 𝔅, ℭ zusammen und ihre Sonderwerte α, β, γ sind demnach von der Richtung der Niveaulinie unabhängig, d. h. sie sind auch von den Spannungswerten A, B und C selbst nicht beeinflußt. Um den Spannungswert D des Punktes O zu ermitteln, werde der Einfachheit halber das neue Null-Niveau durch BC, Fig. 9, gelegt. Dann verhalten sich die Spannungen $A : D = h_a : \varrho = a + b + c : a$. Hieraus findet sich $D = \frac{A \cdot a}{a + b + c}$, und dieser Wert, sowie $B = C =$ Null, in Gleichung (2) eingesetzt, liefert für den gesuchten Schenkelwiderstand $\alpha = \frac{b \cdot c}{a + b + c}$ und analog für β und γ, d. h. der Widerstand eines Schenkels ist gleich dem Produkte der beiden nachbarlichen Seitenwiderstände durch den Umfangswiderstand. Auf kürzerem Wege führt der Satz über Punktsummen (oder der Momentensatz der Mechanik zum Ziele. Läßt man z. B. die drei Seiten a, b, c in den Ecken als Maßzahlen (resp. als Gewichte) wirken, während D den Mittel- (oder Schwer-) Punkt bildet, so hat man

$$Aa + Bb + Cc = D \cdot (a + b + c),$$

woraus sich D findet. In Gleichung (2) substituiert, führt dies zu derselben Lösung.

Aus den drei Ausdrücken für α, β und γ rechnen sich diejenigen für a, b und c in Funktion von α, β, γ heraus; es ergibt sich für $a' = a^{-1} = \frac{\beta^{-1} \cdot \gamma^{-1}}{\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1}} = \frac{\beta' \cdot \gamma'}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$ und analog für b' und c', wobei die Leitfähigkeiten, welche mit Strichen bezeichnet wurden, nun dieselbe Rolle spielen, wie früher die Widerstände. Nach dem erklärten Momentensatz eines unbelasteten Knotens muß auch $A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D(\alpha' + \beta' + \gamma')$ bestehen.

Die Wichtigkeit dieser Transformierungs-Formeln, welche von Kennelly zur Übertragung der Dreieckschaltung bei Drehstrom in die Sternschaltung bestimmt waren, rechtfertigt die Anführung weiterer Beweise.

Sollen Netzstücke für dieselben Knoten A, B, C, ... in bezug auf das übrige Netz ersetzbar sein, so müssen sie gleichen Widerstand von jedem Knoten zu einem neuen aufweisen, der durch Zusammenlegen der übrigen erzeugt wird. Für den uns jetzt beschäftigenden Fall von dreiknotigen Netzstücken heißt dies folgendes: Die Widerstände vom Knoten A aus zu B und C, als zusammenfallend, müssen für beide Netzformen einander gleich sein; ebenso vom Knoten B und C. Setzen wir nämlich die Spannung in B und C auf Null und lassen nur A wirken, so ergibt sich ein Verteilungsbild. Ebenso ein

zweites von B aus, wobei A und C Nullspannung haben und desgleichen ein drittes Bild für C mit A und B gleich Null. Nach dem Superpositionsprinzip setzen sich diese Einzelbilder zum Gesamt-

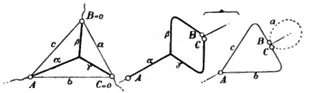


Fig. 12

bild zusammen. Wird also, Fig. 12, $B = C =$ Null gesetzt, so ist der Widerstand bezüglich des Knotens A für die Dreiecksform $\frac{1}{b' + c'}$, und für die Sternform $\alpha + \frac{1}{\beta' + \gamma'}$, welche gleich zu setzen sind:

$$\frac{1}{b'+c'} = \alpha + \frac{1}{\beta'+\gamma'} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'+\gamma'} = \frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{\alpha'(\beta'+\gamma')} = \frac{S'}{\alpha'(\beta'+\gamma')}.$$

Aus

$$S'(a'+b') = \gamma'(a'+\beta'), \qquad S'(b'+c') = \alpha'(\beta'+\gamma')$$

folgt durch Subtraktion $S'(a' - c') = \beta'(\gamma' - \alpha')$; diese Gleichung führt mit der 3. Gleichung

$$S'(c'+a') = \beta'(\gamma'+\alpha')$$

zur Beziehung

$$Sa' = \beta'\gamma'$$

oder

$$a' = \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}.$$

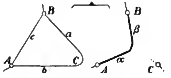


Fig. 13.

Hätten wir jedoch die Äquivalenz zweier Netzstücke definiert durch die Gleichheit ihrer beziehlichen Widerstände zwischen je zwei Knoten, A und B, A und C, usw., so hätte sich obige Rechnung, nach Fig. 13, entsprechend dem folgenden Ansatze wiederholt:

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{\alpha+\beta}; \quad \frac{a+b+c}{c(a+b)} = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{S}{c(a+b)}$$

oder

$$S(\alpha+\beta) = c(a+b),$$

was direkt zur Formel

$$\alpha = \frac{bc}{a+b+c}$$

führt.

Die auffallende Reziprozität zwischen beiden Umwandlungsformeln ist in den bekannten Kirchhoffschen Gleichungen begründet. Im Stern muß die Summe der Ströme, im Dreieck, d. i. in einer Masche, die Summe der Umfangs- oder Seitenspannungen gleich Null sein.

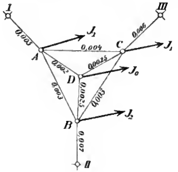


Fig. 14.

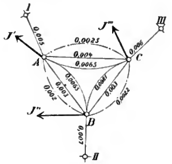


Fig. 15.

Dies führt zu reziproken Strom- und Spannungs-Diagrammen, wie sie in der Geometrie und Graphostatik durch Maxwell, Cremona, Culmann u. a. völlig erforscht wurden.[1])

3. *Beispiele zur Transfiguration.* — 1. *Beispiel.* Es sei das in Fig. 14 dargestellte Netz mit 3 Speisepunkten I, II, III gleicher oder ungleicher Spannung und mit 4 Netzknoten A, B, C, D gegeben, in welchen die Entnahmen J_1, J_2, J_3 und J_0 erfolgen.

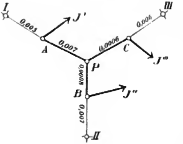


Fig. 16.

Entlasten wir den Knoten D von seiner Last J_0, indem wir seine Nachbarknoten A, B und C mit den Komponentenströmen

$$J_A = J_0 \frac{0{,}00077}{0{,}002} = 0{,}385\, J_0\,,$$

$$J_B = J_0 \frac{0{,}00077}{0{,}0025} = 0{,}308\, J_0$$

und

$$J_C = J_0 \frac{0{,}00077}{0{,}0025} = 0{,}308\, J_0$$

beschweren, wobei der Zähler 0,00077 den Widerstand der Parallelschaltung von $AD = 0{,}002$, $BD = 0{,}0025$, $CD = 0{,}0025$ bedeutet, demnach gleich $1 : \left(\frac{1}{0{,}002} + \frac{1}{0{,}0025} + \frac{1}{0{,}0025}\right) = 0{,}00077$ ist. Die in den End-

1) Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis von Herzog-Feldmann, 2. Aufl. I. Teil, Seite 201.

Digitized by Google

punkten vereinigten Ströme (Fig. 15) mögen heißen: $J_1 + J_A = J'$, $J_2 + J_B = J''$ und $J_3 + J_C = J'''$.

Der Stern (0,002, 0,0025, 0,0025) in Fig. 14 wird nun durch das Dreieck (0,0065, 0,0065, 0,0081) in Fig. 15 ersetzt, indem seine Seiten $\frac{\frac{1}{0,002} + \frac{1}{0,0025} + \frac{1}{0,0025}}{\frac{1}{0,002} \cdot \frac{1}{0,0025}} = 0,0065$ usw. berechnet werden.

Die parallelen Zweige (0,004, 0,0065), (0,003, 0,0065), (0,004, 0,0081) werden nun durch die äquivalenten 0,0025, 0,002, 0,0022 und das aus diesen neuerdings gebildete Dreieck (0,0025, 0,002, 0,0022) in Fig. 15 durch den Stern (0,0007, 0,0008, 0,0006) in Fig. 16 widerstandstreu ersetzt.

Werfen wir den Strom J' auf die Knoten I und P, ebenso J'' auf II und P und J''' auf III und P, so erhalten wir für die Komponenten:

$$J_I' = J' \frac{0,00077}{0,005 + 0,0007} = 0,123\,J', \quad J_P' = J' - 0,123\,J' = 0,877\,J',$$

$$J_{II}'' = J'' \frac{0,0008}{0,007 + 0,0008} = 0,102\,J'', \quad J_P'' = J'' - 0,102\,J'' = 0,898\,J'',$$

$$J_{III}''' = J''' \frac{0,0006}{0,006 + 0,0006} = 0,09\,J''', \quad J_P''' = J''' - 0,09\,J''' = 0,91\,J'''.$$

Und daher: $J_P = 0,877\,J' + 0,892\,J'' + 0,91\,J''$.

Jetzt vermag man bei gleichen Spannungen diese Speisepunkte I, II, III zusammenzulegen, wodurch sich der Ersatzleiter der Parallelschaltung von (0,005 + 0,0007), (0,007 + 0,0008), (0,006 + 0,0006) zu 0,0022 ergibt und die in den Leitern I P, II P und III P fließenden Ströme resultieren:

$$J_P \cdot \frac{0,0022}{0,0057} = 0,37\,J_P, \quad J_P \cdot \frac{0,0022}{0.0078} = 0,29\,J_P \quad \text{und} \quad J_P \cdot \frac{0,0022}{0,0066} = 0,33\,J_P.$$

Die in den Leitern I A, II B, III C fließenden Ströme siud demnach:

$$(0,37\,J_P + 0,123\,J'), \quad (0,29\,J_P + 0,102\,J''), \quad (0,33\,J_P + 0,09\,J'''),$$

und wenn man statt J', J'', J''' die Werte

$$J' = J_1 + 0,385\,J_0, \quad J'' = J_2 + 0,308\,J_0, \quad J''' = J_3 + 0,308\,J_0,$$

sowie statt $J_P = 0,877\,J_1 + 0,898\,J_2 + 0,910\,J_3 + 0,893\,J_0$ substituiert, erhält man für die gesuchten Ströme:

$$J_{IA} = 0,447\,J_1 + 0,330\,J_2 + 0,337\,J_3 + 0,337\,J_0$$

$$J_{IIB} = 0,254\,J_1 + 0,359\,J_2 + 0,264\,J_3 + 0,290\,J_0$$

$$J_{IIIC} = J_1 + J_2 + J_3 + J_0 - J_{IA} = J_{IIB}$$

in Abhängigkeit von den *veränderlichen Belastungen* J_0, J_1, J_2, J_3. Selbstverständlich kann man diesen einmaligen Rechnungsgang durch vier einzelne, welche der Superposition von vier Einzelwirkungen ent-

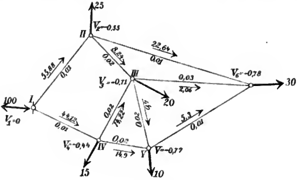


Fig. 17.

sprechen, ersetzen, wie sich dies ja auch in den linearen Ausdrücken ausprägt. Sind die Speisepunktspannungen in I, II, ... ungleich groß, so muß man nochmals den Stern in ein Dreieck verwandeln.

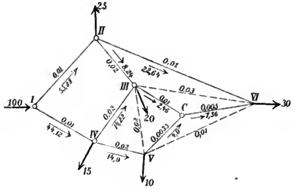


Fig. 18.

2. *Beispiel.* — Fig. 17 stellt ein Netz mit vier Maschen und sechs Knotenpunkten dar. Ersetzen wir nun das Dreieck III, V, VI durch den widerstandtreuen Stern *C*III, V, VI, dann erhalten wir Fig. 18, welches Netz schon nur drei Maschen enthält. Die Schenkelwiderstände des Sternes berechnen sich zu

$$\mathrm{III}\,C = \frac{0{,}02 \times 0{,}03}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03} = 0{,}01 \text{ Ohm}$$

$$\mathrm{V}\,C = \frac{0{,}01 \times 0{,}02}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03} = 0{,}0033 \text{ Ohm}$$

$$\mathrm{VI}\,C = \frac{0{,}01 \times 0{,}03}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03} = 0{,}005 \text{ Ohm}.$$

Jetzt verlegen wir den Stromabnehmer in V gleich 10 Amp. auf die Knoten IV und *C*. Die auf *C* fallende Komponente berechnet sich

$$10 \frac{0{,}02}{0{,}02 + 0{,}0033} = 8{,}58,$$

und die auf IV fallende ist $10 - 8{,}58 = 1{,}42$ Amp. In IV wird dem-

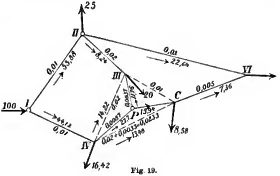


Fig. 19.

nach der Strom $15 + 1{,}42 = 16{,}42$ Amp. abgenommen. Nach Verlegung der Abnahme in V wird IV, V und V*C* in Serie geschaltet, und jetzt kann das Dreieck III IV *C* durch den Stern *P* III IV *C* ersetzt werden (Fig. 19). Die Sternwiderstände berechnen sich wie folgt:

$$\mathrm{III}\,P = \frac{0{,}01 \times 0{,}02}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}0233} = 0{,}0037 \text{ Ohm}$$

$$\mathrm{IV}\,P = \frac{0{,}02 \times 0{,}0233}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}0233} = 0{,}0087 \text{ Ohm}$$

$$C\,P = \frac{0{,}01 \times 0{,}0233}{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}0233} = 0{,}0043 \text{ Ohm}.$$

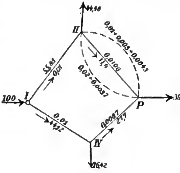


Fig. 20.

Das Netz hat nach diesem Schritte schon bloß zwei Maschen. Versetzen wir nun die in III, VI und *C* angreifenden Ströme auf die

Knotenpunkte II und P; hiernach können dann die Widerstände II III und IIIP, resp. II VI, VIC und CP in Serie geschaltet werden. Die Ströme in dem Knotenpunkt II und P berechnen sich zu

$$25 + 20\,\frac{0{,}0037}{0{,}02 + 0{,}0037} + 30\,\frac{0{,}0043 + 0{,}005}{0{,}0043 + 0{,}005 + 0{,}01}$$

$$+ 8{,}58\,\frac{0{,}0043}{0{,}0043 + 0{,}005 + 0{,}01} = 25 + 3{,}12 + 14{,}45 + 1{,}91 = 44{,}48\ \text{Amp.}$$

resp.

$$0 + (20 - 3{,}12) + (30 - 14{,}45) + (8{,}58 - 1{,}91)$$

$$= 16{,}88 - 15{,}55 + 6{,}67 = 39{,}1\ \text{Amp.}$$

Indem wir (0,02 + 0,0037) und (0,01 + 0,005 + 0,0043) parallel schalten, erhalten wir den in Fig. 20 dargestellten Kreis, wobei

$$\frac{(0{,}02 + 0{,}0037) \times (0{,}01 + 0{,}005 + 0{,}0043)}{(0{,}02 + 0{,}0037) \times (0{,}01 + 0{,}005 + 0{,}0043)} = 0{,}0106\ \text{Ohm}$$

die Resultierende ist.

Die Ströme in I II bezw. in I IV berechnen sich nun als Summe der bezüglichen Komponentenströme. Demnach

$$J_{\mathrm{I\,II}} = 44{,}48\,\frac{0{,}01 + 0{,}0087 + 0{,}0106}{0{,}01 + 0{,}0087 + 0{,}0106 + 0{,}01} + 39{,}1\,\frac{0{,}01 + 0{,}0087}{0{,}01 + 0{,}0087 + 0{,}0106 + 0{,}01}$$

$$+ 16{,}42\,\frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}0087 + 0{,}0106 + 0{,}01} = 33{,}14 + 18{,}57 + 4{,}17 = 55{,}88\ \text{Amp.}$$

und

$$J_{\mathrm{I\,IV}} = (44{,}48 - 33{,}14) + (39{,}1 - 18{,}57) + (16{,}42 - 4{,}17)$$

$$= 11{,}34 + 20{,}53 + 12{,}25 = 44{,}12\ \text{Amp.}$$

Werden die Spannungen der Knotenpunkte von $V_1 = 0$ gezählt, dann ergeben sich die Spannungen der Knotenpunkte II und IV wie folgt:

$$V_2 = -\,55{,}58 \times 0{,}01 = -\,0{,}55\ \text{Volt}$$

und

$$V_4 = -\,44{,}12 \times 0{,}01 = -\,0{,}44\ \text{Volt.}$$

Da nun die Strom- und Spannungsverteilung des Netzes Fig. 20 ermittelt ist, gehen wir auf das Netz Fig. 19 zurück.

IIP = 0,0106 Ohm entstand durch Parallelschaltung zweier Widerstände.

In diesen einzelnen Widerständen verteilt sich der Gesamtstrom gleich 11,4 Amp. im umgekehrten Verhältnisse zu den Teilwiderständen. Der Strom im Widerstande II VI C P berechnet sich demnach

$$11{,}4\,\frac{0{,}02 + 0{,}0037}{(0{,}02 + 0{,}0037) + (0{,}01 + 0{,}005 + 0{,}0043)} = 6{,}28\ \text{Amp.,}$$

demnach der Strom im Leiter II III P gleich 11,4 — 6,28 = 5,12 Amp. Der im Leiter II VI fließende Strom ergibt sich als Summe dieses Leiterstromes und der bezüglichen, bereits ermittelten Stromkomponenten

$$6{,}28 + 14{,}45 + 1{,}91 = 22{,}64 \text{ Amp.}$$

Im Knoten VI werden 30 Amp. abgeführt und muß derselbe von C aus 30 — 22,64 = 7,36 Amp. erhalten. Im Leiter PC fließt der Strom 8,58 + 7,36 = 15,94 Amp.

Der Leitstrom des Leiters II III C beträgt 11,4 — 6,28 = 5,12 Amp., demnach ist der Strom im Leiter II III die Summe dieses Leitstromes und der auf II fallenden Komponente des Stromes von 20 Amp.

$$5{,}12 + 3{,}12 = 8{,}24 \text{ Amp.}$$

Vom Knoten P fließt zum Knoten III der Strom 20—8,24 = 11,76 Amp. und von IV gegen P

$$11{,}76 + 15{,}94 = 44{,}12 - 16{,}42 = 27{,}7 \text{ Amp.}$$

Die Spannungen der Knoten III und VI berechnen sich wie folgt:

$$V_3 = V_2 - 8{,}24 \times 0{,}02 = -0{,}55 - 0{,}16 = -0{,}71 \text{ Volt}$$

und

$$V_6 = V_2 - 22{,}64 \times 0{,}01 = -0{,}55 - 0{,}23 = -0{,}78 \text{ Volt.}$$

Die Stromverteilung des Stromes III IV CP Fig. 19 ist nun bekannt, so daß wir die Stromverteilung des widerstandstreuen Dreieckes III IV C bestimmen können. Der Strom in IV III ergibt sich zu

$$\frac{27{,}7 \times 0{,}0087 + 11{,}76 \times 0{,}0087}{0{,}02} = 14{,}22 \text{ Amp.}$$

Im Leiter III C fließt der Strom 14,22 + 8,24 — 20 = 2,46 Amp. und in dem Leiter IV C 44,12 — (14,22 + 16,42) = 13,48 Amp.

Jetzt ist die Stromverteilung des in Fig. 19 dargestellten Netzes vollkommen bekannt; wir gehen auf das Netz Fig. 18 über.

Im Leiter IV V fließt der Strom 13,48 + 1,42 = 14,9 Amp., wo 13,48 der Leitstrom und 1,42 die auf den Knoten IV versetzte Komponente von 10 Amp. ist.

Die Spannung des Knotenpunktes V wird erhalten:

$$V_5 = V_4 - 14{,}9 \times 0{,}02 = -0{,}44 - 0{,}3 = -0{,}77 \text{ Volt.}$$

Da die Stromverteilung des Sternes III V VI C bekannt ist, gehen wir auf die Stromverteilung des Dreieckes III V VI über.

Der im Leiter V VI fließende Strom ist gleich

$$\frac{4{,}9 \times 0{,}0083 + 7{,}36 \times 0{,}005}{0{,}01} = 5{,}3 \text{ Amp.}$$

Hierdurch ergibt sich der Strom in III VI gleich 30 — (22,64 + 5,3) = 2,06 Amp. und endlich in III V gleich (10 + 5,3) — 14,9 = (8,24 + 14,22) — (2,06 + 20) = 0,4 Amp.

Die auf diese Weise ermittelte Spannungs- und Stromverteilung ist in die Fig. 17 eingetragen. Dieselbe wurde ohne Anwendung jeder Gleichnng nnd ausschließlich mit Zuhilfenahme der Transfigurationsbehelfe ermittelt. Der hier eingeschlagene Weg war ein rekursiver; wir vereinfachen den zusammengesetzten Fall, um von diesem wieder auf den ursprünglichen zurückzukehren.

4. *Vierecks-Transfiguration.* — Die bisherigen Betrachtungen haben sich nur auf Ohmsche Widerstände bezogen. Sie gelten jedoch dem Wortlaute nach auch für induktive oder Richtungswiderstände, sofern man sie als Komplexe oder Richtungszahlen und die Operation des Addierens usw. im erweiterten Sinne auffaßt. So z. B. würde das Gesetz der Superposition unverändert bleiben. Es ist das Verdienst von Ch. Pr. Steinmetz, diese Gebiete in die praktische Elektrotechnik eingeführt zu haben.

Es gelten nach Vorhergehendem also die Transfigurations-Gesetze auch für Widerstände mit negativen Zeichen (wohin auch die graphische Lösung Fig. 11 hinweist, indem der Mittelstrahl den Nebenwinkel zwischen r_1 und r_2 teilt).

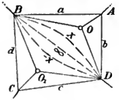


Fig. 21.

Dies vorausgeschickt, läßt sich die Frage der Transfiguration des *einfachen* Viereckes durch Einfügung einer Hilfsdiagonale auf die Dreiecktransfiguration zurückführen. Fig. 21 stellt ein Viereck mit den Eckspannungen A, B, D, C und den Widerständen a, b, c, d dar. Die nicht vorhandene Diagonale von B nach D von unendlichem Widerstande kann durch zwei parallel geschaltete Widerstände x und $(-x)$ ersetzt gedacht werden, da $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(-x)}$.

Dadurch zerfällt das Viereck in die beiden Dreiecke a, b, (x) und c, d, $(-x)$, welche in die Sterne O und O_1 transfigurierbar sind. Die Spannung in den Punkten O und O_1 ist von der Wahl des Widerstandes x abhängig. Es ist $O = \frac{Ax + Bb + Ca}{x + b + a}$ und $O_1 = \frac{D(-x) + Bd + Cc}{(-x) + c + d}$. Wenn nun diese Werte O und O_1 einander gleichgesetzt werden, so können diese Punkte zusammenfallen; aus dem Viereck wird tatsächlich der gewünschte Stern entstehen, aber zugleich ergibt sich ein *bestimmtes x in Abhängigkeit* von den Eckspannungen, was bei der

Digitized by Google

unbeschränkten Transfigurierung ausgeschlossen sein soll. Diese Transfigurierung ist daher in diesem Sinne unmöglich.

Alle für das dreiknotige Netz gegebenen Rechnungen lassen sich fürs Viereck sofort erweitern und zeigen das gleiche Resultat. Für n Knoten lassen sich n Gleichungen, als Widerstandsbedingung von jedem Knoten aus, aufstellen und $\frac{1}{2}n \cdot (n-1)$ als solche zwischen je zwei Knoten. Es müßte aber $n = \frac{1}{2}n(n-1)$ erfüllt sein, was *nur* für $n = 3$ zutrifft.

5. *Über Netzspaltung.* — Die in der Praxis vorkommenden Netze lassen sich oft in solche Netzstücke spalten, die einzeln durch Transfiguration völlig gelöst werden können. Um aber die Verteilung des Stromes und der Spannung fürs gesamte Netz zu finden, wird für den *Zusammenhang* der Netzteile eine gesonderte Untersuchung gepflogen.

Ein spezielles Beispiel soll vorerst in den Gedankengang einführen. In Fig. 22 ist ein Viereck $ABCD$, welches von den Speisepunkten I, II, III und IV durch die Spannungen V_1, V_2, V_3, V_4 mit Strom versehen

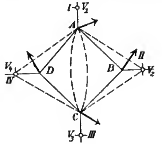


Fig. 22.

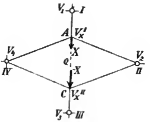


Fig. 23.

wird. Werden die Stromentnahmen von den Knoten B und D abgehoben und die Sterne B und D in widerstandstreue Dreiecke verwandelt, so ergibt sich das Netz der Fig. 23, welches nun durch Zerschneiden des Verbindungsleiters ϱ zwischen A und C und Einfügung eines unbekannten Ersatzstromes X resp. $-X$ für die Sterne A bez. C leicht weiter behandelt werden kann. Die Spannung ist $V_x^{\mathrm{I}} = a_1 + b_{\mathrm{I}} J_x$ und $V_x^{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{II}} - b_{\mathrm{II}} J_x$; die Differenz daher $(a_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}}) + (b_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}) J_x = J_x \varrho_x$; woraus sich der fragliche Strom J_x berechnet. Nach denselben Erkenntnissen behandelt man komplizierte Fälle.

In Fig. 24 ist ein Netz dargestellt, welches aus den Teilen I und II besteht, die durch zwei Leiter ϱ_x und ϱ_y verbunden sind. Zerschneiden wir diese, dann müssen als Ersatz die Ströme J_x, J_y und $-J_x$, $-J_y$

auftreten, welche als Belastungen der Teile I und II anzusehen sind. Da nun die Knotenspannungen lineare Funktionen der Belastungen sind, so können die Spannungen in den vier Verbindnngsknoten folgenderweise ausgedrückt werden:

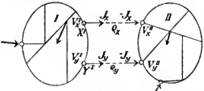


Fig. 24.

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} V_x^{\mathrm{I}} = a_1^{\mathrm{I}} J_x + b^{\mathrm{I}} J_y + c_1^{\mathrm{I}} \\ V_y^{\mathrm{I}} = b^{\mathrm{I}} J_x + a_2^{\mathrm{I}} J_y + c_2^{\mathrm{I}} \end{cases}$$

und

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} V_x^{\mathrm{II}} = a_1(-J_x) + b^{\mathrm{II}}(-J_y) + c_1^{\mathrm{II}} \\ V_y^{\mathrm{II}} = b^{\mathrm{II}}(-J_x) + a_2^{\mathrm{II}}(-J_y) + c_2^{\mathrm{II}}, \end{cases}$$

wobei sich die Konstanten a, b, c aus den bezüglichen Widerständen der Leiter bilden. a_1^{I} ist beispielsweise gleich der Spannung im Knoten X^{I}, wenn alle übrigen Knoten des Teiles I (demnach auch Y^{I}) unbelastet wären und J_x der Stromeinheit gleich wäre. So stellt ferner b^{I} den Spannungswert im Knoten Y^{I} dar, wenn in Y^{I} der Strom Eins abgenommen wird, während alle übrigen unbelastet bleiben. Aus den Gleichungen (I) und (II) ergeben sich folgende:

$$J_x \varrho_x = (a_1^{\mathrm{I}} + a_1^{\mathrm{II}}) J_x + (b^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{II}}) J_y + (c_1^{\mathrm{I}} - c_1^{\mathrm{II}})$$

$$J_y \varrho_y = (b_1^{\mathrm{I}} + b_1^{\mathrm{II}}) J_x + (a_2^{\mathrm{I}} + a_2^{\mathrm{II}}) J_y + (c_2^{\mathrm{I}} - c_2^{\mathrm{II}})$$

nnd daraus:

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} (\varrho_x - a_1^{\mathrm{I}} - a_1^{\mathrm{II}}) J_x - (b^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{II}}) J_y = c_1^{\mathrm{I}} - c_1^{\mathrm{II}} \\ -(b^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{II}}) J_x - (\varrho_y - a_2^{\mathrm{I}} - a_2^{\mathrm{II}}) J_y = c_2^{\mathrm{I}} - c_2^{\mathrm{II}}. \end{cases}$$

Aus (M) berechnen sich J_x und J_y, wobei die Koeffizienten zur Diagonale symmetrisch sind. Sind mehr als zwei Verbindungswiderstände, so steigt entsprechend die Zahl dieser Gleichungen. Werden einige dieser Widerstände Null, so heißt dies: die Netze hängen mit Knoten direkt zusammen oder deutlicher: die Trennung der Netze in Teilstücke erfolgte in mehrfachen Knoten. Ja, diese Methode bleibt im Wesen völlig ungeändert, wenn statt der Verbindungsleiter ϱ ganze Netzstücke eingesprengt sind.

Man kann sich auf zwei gegensätzliche Weisen die Entstehung der Netzgebilde erklären. Die erste greift vorerst auf die Knoten und sieht in den Leitern nur die Verbindungen dieser Knoten, welche entweder gegebene Speisepunkte, also mit bekannter Spannung versehen sind, oder freie Knoten sind, denen die Spannung durch die Strömung von den ersteren aufgedrückt wird. Die zweite Bildung nimmt zunächst selbständige Maschen an und denkt sich in diesen Ströme kreisen. Durch Aneinandersetzen dieser Maschen entstehen die Knoten

mit ihren Spannungen. Diesen Vorgängen entspricht die analytische Rechnungsweise nach der Strom- und Spannungs-Methode. Bei ersterer sucht man unmittelbar die Ströme in den Leitern, bei letzterer die Spannungen in den Knoten.[1]) Die Auflösung der hierbei auftretenden linearen Gleichungen führt zu Determinanten, die umständlich werden; und schon Kirchhoff war bemüht sie zu erleichtern.[2]) Neuerdings haben dies Feußner[3]) und Verhoeckx[4]) erfolgreich bearbeitet Unsere hier vorgebrachte Methode der Transfiguration entspricht einer physikalischen Elimination von Unbekannten aus mangelhaften linearen Gleichungen. Geht man vom Dreieck zum Stern über, so öffnet man eine Masche; transformiert man den Stern zum Dreieck, so läßt man einen Knoten, also seine unbekannte Spannung, verschwinden. In dieser Art genügt die widerstandstreue Umbildung der Strom- und Spannungsmethode.

Die Transfiguration wird aber infolge ihrer Bedürfnislosigkeit zur Vereinfachung gegebener Netze sicherlich immer angewendet werden. Da die praktischen Netze den Verband zwischen den Knoten zufolge der Straßenbildung doch nur unvollkommen enthalten können, so reicht sie mit dem Prinzipe der Superposition der Spannungen (angewendet auf die einzelnen Speisepunkte) und mit dem Prinzipe der Netzspaltung meist schon allein zur Lösung aus.

Budapest und Delft, den 1. Februar 1906.

1) Herzog-Feldmann, Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze. II. Aufl., S. 192 und Teichmüller, die elektrischen Leitungen I. Bd.

2) Kirchhoff, Pogg. Annal. 72, 1847.

3) W. Feußner, Über Stromverzweigung in netzförmigen Leitern. Annalen der Physik 1902, Nr. 13.

4) Verhoeckx, L'éclairage électr. Bd. 39, 1904.

Rezensionen.

Ernesto Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Gerhard Kowalewski. 97 Textfiguren. 894 Seiten. Leipzig, 1904. B. G. Teubner.

In neuerer Zeit spielen die Anwendungen im Universitätsunterrichte eine größere Rolle. Dem entspricht bei dem vorliegenden Werke die ungewöhnliche Menge von Übungsbeispielen, an denen der Studierende erkennt, welchen gewaltigen Hebel er sogar nur mit den Anfangsgründen der genannten Wissenschaft erhalten hat. Der Verfasser legt geringeren Wert auf die Prinzipien, die er anderswo ausgezeichnet bearbeitet weiß; er will vielmehr schnell zu einer reichen Ernte analytischer und geometrischer Tatsachen führen. Eine strengere, durchaus kritische Darstellung kann ja dem Studierenden später gegeben werden.

Etwas abstrakt beginnt das Buch mit der Theorie der Determinanten, der linearen und quadratischen Formen. Es ist aber gut, daß diese Formalitäten gleich im Anfang auf 79 Seiten abgemacht werden. Dann folgen die irrationalen Zahlen, die Grenzwerte, die unendlichen Reihen und Produkte in einer den neueren Anschauungen durchaus entsprechenden Weise, wobei die Anwendungen bereits eine Rolle spielen. Die Irrationalität von e z. B. wird auf vier Zeilen abgemacht. Die Berechnung der natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen wird auf die Formel

$$\lg(n+1) = \lg n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right)$$

gegründet, bei der schon die acht ersten Glieder eine Genauigkeit auf acht Stellen geben, da der Fehler kleiner als $\frac{1}{10^8}$ ist. Auch auf die Formel

$$\lg(n+2) = 2(\lg n + 1) - 2\lg(n-1) + \lg(n-2) + \frac{4}{n^3 - 3n},$$

die, wenn n mehr als drei Ziffern hat, den gesuchten Logarithmus auf 24 Dezimalstellen gibt. (Verfehlte Anleitungen zum Berechnen der Logarithmen, die ganze Bücher anfüllen, haben wir leider bis in die neueste Zeit erscheinen sehen.)

Daran schließt sich die Lehre von den Funktionen einer und mehrerer reeller Variabeln unter Anlehnung an die Weierstraßsche Behandlungsweise, wobei die Derivation schnell zur Geltung kommt. Zu den Reihenentwickelungen werden zahlreiche Beispiele gegeben. So wird z. B. die

Formel angeführt, die es W. Shanks ermöglichte, π anf 707 Stellen zu berechnen. Anch die Bernoullischen und Enlerschen Zahlen und ihre Anwendungen werden eingehend behandelt. Der Verfasser lieht es, bisweilen an die Grenzen der Forschung zu führen, z. B. bei der Formel

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} B_{2p} \pi^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p}$$

darauf hinzudenten, daß es noch nicht gelungen ist, für die Exponenten $(2p+1)$ eine ähnliche geschlossene Formel zu finden, so daß hier nur schnell konvergierende Reihen zu Gehote stehen.

Die komplexen Zahlen werden in der üblichen elementaren Weise eingeführt und geometrisch verwertet. Auch die Quaternionen werden auf zehn Seiten gestreift, und am Schluß wird heispielsweise gezeigt, wie schnell eine einfache Formel gefunden wird, welche gewisse kompliziertere Enlersche Relationen als Sonderfälle in sich enthält. Bei der zunehmenden Wichtigkeit der Vektorenrechnung ist der Hinweis jedenfalls zweckmäßig. Die algehraischen Gleichnngen werden nach dem augenblicklichen Standpunkte der Wissenschaft dargestellt. Der Fundamentalsatz von der Existenz mindestens einer Wurzel wird nicht im Anschluß an die geometrische Darstellung von Gauß hewiesen, sondern rein arithmetisch nach Clifford. Diesem Kapitel werden etwa 120 Seiten gewidmet. Geschlossen wird mit dem Theorem, daß die allgemeinen Gleichungen höheren als vierten Grades nicht mit Hilfe von Wnrzelzeichen aufgelöst werden können.

Den Rest des Werkes bildet die eigentliche Differential- und Integralrechnung mit Anwendungen auf die verschiedensten Gebiete, hesonders auf geometrische Gehilde. Nach dem, was auf den vorhergegangenen 485 Seiten, einer vorzüglichen Interductio in analysin infinitorum, gesagt ist, kann die hier erstrebte Begründung der eigentlichen Infinitesimalrechnung verhältnismäßig kurz erfolgen und das Hauptgewicht auf die Anwendungen gelegt werden. Daß stetige Funktionen existieren, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten hesitzen, wird schon bei der ersten Einführung in die Derivation angedentet, im Anhang wird das hekannte Beispiel von Weierstraß kurz hehandelt und auf eine Folgerung Wieners für die darstellende Geometrie hingewiesen, die das Paradoxon einer Fläche betrifft, die, ohne Regelfläche zu sein, ahwickelbar ist, die aber nicht durch Tangentialebenen umhüllt werden kann, weil sie nirgends eine solche hat. Sonst bringt der Anhang noch einige Fortschritte der Differenzenrechnung und der Lehre von den Bernoullischen Zahlen, die Adams mittels einer einfachen Formel his B_{124} getriehen hat. Den Schluß bilden Bemerkungen üher sukzessive Derivierte der Fnnktionen und über Variationsrechnung.

Zahlreiche Hinweise auf die ältere und neueste Literatur, auch solche kritischer Art, machen das Buch zu einem wertvollen Kompendium des behandelten Wissenschaftszweiges. Die Klarheit der Darstellung hat durch die Übersetzung nichts eingebüßt, denn das Ganze liest sich wie ein Originalwerk. Das dem Andenken Beltramis gewidmete Buch sei als eine wesentliche Bereicherung der mathematischen Literatur, die dem internationalen Zusammenwirken zu danken ist, jedem Mathematiker empfohlen.

Hagen i. W. G. Holzmüller.

Digitized by Google

J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris, 1903. A. Hermann. XIII u. 375 S. 8°.

Die Vorlesungen, die in den Jahren 1898—1900 am Collège de France gehalten sind, beschränken sich nicht darauf, bekannte Theorien darzulegen; sie geben in vielen Punkten wesentliche Erweiterungen jener Theorien, erörtern den inneren Zusammenhang der Untersuchungen verschiedener Forscher, beleuchten die Prinzipien kritisch, stellen neue Gesichtspunkte auf und gewähren damit einen tieferen Einblick in das Wesen der behandelten Probleme. Sie bilden ein würdiges Seitenstück zu den bekannten Vorlesungen Poincarés über verschiedene Teile der mathematischen Physik.

Die Hauptaufgabe, die sich der Verf. stellt, ist, zu erörtern, wie der Einfluß der Grenzbedingungen auf die Bewegung der Flüssigkeiten sich gestaltet. Speziell legt er dar, wie bei der Bewegung der Gase durch die Grenzbedingungen diskontinuierliche Bewegungen bedingt werden, und wie sich solche diskontinuierlichen Wellen ausbreiten.

Ehe er sich dieser seiner Hauptaufgabe zuwendet, bespricht er im I. Kapitel die sogenannte zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie: diejenige Potentialfunktion eines Gebietes zu finden, deren normale Ableitungen an der Grenze vorgeschriebene Werte annehmen, eine Aufgabe, die für die Hydrodrodynamik eine grundlegende ist. Es werden die wichtigsten Eigenschaften der sogenannten harmonischen Funktionen kurz zusammengestellt, dann wird der Versuch von Lord Kelvin besprochen, die Existenz der Lösung in ähnlicher Art zu beweisen, wie man das Dirichletsche Prinzip zu beweisen pflegt. Dabei werden die Bedenken gegen eine solche Beweisführung erörtert, und an Beispielen wird gezeigt, daß ein Problem der Variationsrechnung nicht notwendig eine Lösung zu besitzen braucht. Für die Ebene ergibt sich die Lösung der Randwertaufgabe sofort aus den Untersuchungen von Dini, für den Raum führt die Methode von C. Neumann und insbesondere deren Erweiterung durch Stekloff und Korn zum Ziel. Die Darstellung des Verf. lehnt sich eng an Stekloff an. Wenn die genannten Methoden nun auch zum Ziele führen und vor allem die Existenz der Lösung ergeben, so liefern sie für diese doch keinen einfachen Ausdruck. Einen solchen erhält man, wenn es gelingt, für die zweite Randwertaufgabe eine Funktion zu bilden, die der Greenschen Funktion analog ist. Eine solche ist die Funktion γ_A^M von Franz Neumann: sie hat die Eigenschaft, in dem betrachteten Gebiete harmonisch zu sein mit Ausnahme eines Punktes A, in dem sie unendlich wird wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$, und besitzt an der Grenzfläche des Gebiets die normale Ableitung Null. Indessen ist diese Funktion mit dem Übelstande behaftet, daß sie für innere Punkte eines von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raumes nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Diesen Übelstand vermeidet F. Klein [vgl. die Schrift von Pockels „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$", Leipzig 1891] durch Einführung einer andern Funktion, die zwei Pole besitzt. Hadamard zeigt nun, daß die Einführung einer solchen Funktion nicht nötig ist, daß man vielmehr mit der Neumannschen Funktion ausreicht, wenn man ihre Definition vervollständigt, und zwar dadurch, daß man zu γ_A^M das additive Glied $-\psi(A)$ hinzufügt und die Funktion ψ passend bestimmt. Die neue Funktion besitzt dann eine analoge Symmetrie

wie die Greensche Funktion; sie ändert ihren Wert nicht, wenn man den Anfpunkt M und den Pol A vertauscht.

Die allgemeine Aufgabe wird dann speziell bei der Kugel durchgeführt und zum Schluß kurz der Fall besprochen, daß die Flüssigkeit nur teilweise von starren Wänden eingeschlossen ist, daneben aber eine freie Oberfläche besitzt, so daß nur für einen Teil der Grenze die normale Ableitung der Potentialfunktion, für den anderen Teil diese Funktion selbst gegeben ist. Für derartige „gemischte Probleme“ läßt sich der Existenzbeweis bisher nicht führen, sondern nur zeigen, daß, wenn eine Lösung vorhanden ist, diese eindeutig ist.

Im II. Kapitel wendet der Verf. sich seiner Hauptaufgabe zu, der Untersuchung von diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen, und zwar betrachtet er solche Bewegungen zunächst vom rein kinematischen Standpunkte. Diese Trennung der kinematischen Erörterungen von den rein dynamischen ist Herrn Hadamard eigentümlich; sie trägt wesentlich dazu bei, das Verständnis für die Erscheinung zu vermitteln. Das Kapitel beginnt mit einer Rekapitulation bekannter Resultate über die Deformationen einer Flüssigkeit. Es wird dabei hervorgehoben, daß, wenn man die Koordinaten x, y, z eines Flüssigkeitspunktes als Funktionen ihrer Anfangswerte a, b, c und der Zeit t ansieht, diese Funktionen wohl kontinuierliche Funktionen von t sein müssen, sehr wohl aber diskontinuierliche Funktionen von a, b, c sein können. Doch wird die Betrachtung auf solche Diskontinuitäten beschränkt, die nur in isolierten Flächen auftreten. Auch Deformationen höherer Ordnung kommen hier zur Erörterung, aber nicht allgemein, sondern nur solche, welche alle Punkte einer gegebenen Fläche ungeändert lassen und außerdem in jedem Flächenpunkte bis auf Unendlichkleines n-ter Ordnung mit der identischen Transformation zusammenfallen. Ebenso werden die die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen betreffenden bekannten Resultate in diesem einleitenden Abschnitt abgeleitet. Dabei wird die Berechtigung der Bezeichnung „molekulare instantane Rotation“ dargetan, und es werden die Clebschschen Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten diskutiert.

Was die Kinematik von Diskontinuitäten betrifft, die nur an einer einzelnen Fläche auftreten, so gelangt man zunächst durch einfache, schon vielfach benutzte Überlegungen zu folgendem Resultat: Ist Φ eine Funktion, die selbst überall kontinuierlich ist, während ihre ersten Ableitungen sich zwar in den durch die Fläche $f(a, b, c) = 0$ getrennten Teilen des Raumes kontinuierlich ändern, beim Durchgang durch jene Fläche aber diskontinuierliche Änderungen erfahren, so gilt für diese Änderungen:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right] : f_a = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right] : f_b = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right] : f_c,$$

wo f_a, f_b, f_c die partiellen Ableitungen von f nach a, b, c bezeichnen, $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right]$ die Änderung von $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$ usw. — Bleiben die ersten Ableitungen von Φ beim Durchgang durch die Fläche f kontinuierlich, während die zweiten Ableitungen sich diskontinuierlich ändern, so ist

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\right] : f_a^2 = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial b}\right] : f_a f_b = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial b^2}\right] : f_b^2 = \cdots,$$

und analog für Diskontinuitäten höherer Ordnung.

Diese Resultate lassen sich unmittelbar auf die Koordinaten x, y, z, betrachtet als Funktionen ihrer Anfangswerte a, b, c, anwenden, falls in einem bestimmten Moment die Fläche $f = 0$ Sitz einer Diskontinuität ist. Dabei sind natürlich die Proportionalitätsfaktoren für die Änderungen von x, y, z verschieden, so daß z. B. die Diskontinuitäten zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta a^2}\right] = \lambda f_a^2, \quad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta a \delta b}\right] = \lambda f_a f_b, \ldots, \quad \left[\frac{\delta^2 y}{\delta a^2}\right] = \mu f_a^2, \ldots,$$
$$\left[\frac{\delta^2 z}{\delta a^2}\right] = \nu f_a^2, \ldots$$

werden. Ferner ist zwischen *Ordnung* der Diskontinuität und ihrem *Index* zu unterscheiden; und zwar bezeichnet der Index die Zahl der Differentiationen nach t, so daß sich die vorstehenden Ausdrücke (1) auf eine Diskontinuität zweiter Ordnung vom Index 0 beziehen, während für eine Diskontinuität zweiter Ordnung vom Index 1

$$(2) \qquad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta a \delta t}\right] = \lambda_1 f_a, \quad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta b \delta t}\right] = \lambda_1 f_b, \quad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta c \delta t}\right] = \lambda_1 f_c,$$
$$\left[\frac{\delta^2 y}{\delta a \delta t}\right] = \mu_1 f_a, \ldots, \left[\frac{\delta^2 z}{\delta c \delta t}\right] = \nu_1 f_c$$

ist, und entsprechend für Diskontinuitäten höherer Ordnung Die in (1) auftretenden Faktoren λ, μ, ν lassen sich als Komponenten eines gewissen Segments auffassen, das leicht geometrisch zu interpretieren ist; und so sind die Diskontinuitäten jeder Ordnung und jedes Index von je einem Segment abhängig.

Es fragt sich nun, ob diese als *identische Bedingungen* zu bezeichnenden Relationen für die Elemente einer Diskontinuität die einzigen sind. Mit anderen Worten: Ist die Fläche f in einem bestimmten Moment Sitz einer Diskontinuität von der Ordnung n, so hängen nach dem Obigen die Änderungen der n-ten Ableitungen der Koordinaten, der $(n-1)$-ten Ableitungen der Geschwindigkeiten, der $(n-2)$-ten Ableitungen der Beschleunigungen erster Ordnung usw. von je einem Segment λ, μ, ν ab; können diese $(n+1)$ Segmente dann beliebig gegeben sein, oder sind sie gewissen Bedingungen unterworfen? Wäre die Fläche f die Trennungsfläche zweier verschiedenen Medien, so müßten, damit die Medien sich weder vermischen, noch trennen, die normalen Komponenten der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen zu beiden Seiten der Fläche f die gleichen sein. Diese selben Bedingungen gelten nun für Diskontinuitätsflächen eines und desselben Mediums nur dann, wenn die Diskontinuität eine *stationäre* ist, d h. beständig auf dieselben Moleküle beschränkt ist. In diesem Falle sind die ersten Ableitungen, die diskontinuierlich werden, solche vom Index 0. Die diskontinuierlichen Änderungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind zur Diskontinuitätsfläche tangential, während die verschiedenen Segmente λ, μ, ν voneinander unabhängig sind. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn die Diskontinuität sich im Verlaufe der Bewegung zu andern und andern Molekülen fortpflanzt, d. h. für den *Fall einer Welle*. Soll die Diskontinuitätsfläche die einzige bleiben, so müssen die obigen identischen Bedingungen nicht nur zu einer bestimmten Zeit t_0 erfüllt sein, sondern auch vorher und nachher; ist das der Fall, so werden nach Hugoniot die Bewegungen in den beiden durch die Diskonti-

nuitätsfläche getrennten Räumen als *miteinander verträglich* (compatibles) bezeichnet. Die „Bedingungen für die Verträglichkeit" ergeben sich, wenn man die Flächengleichung $f(a, b, c, t) = 0$, die jetzt noch die Zeit als Parameter enthält, durch eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in einem vierdimensionalen Raume repräsentiert und darauf ähnliche Überlegungen anwendet, wie sie zur Bestimmung der „identischen Bedingungen" dienten. So folgt, daß die $(n + 1)$ Segmente (λ, μ, ν), von denen eine Diskontinuität n-ter Ordnung abhängt, nicht voneinander unabhängig sind, sondern sämtlich dieselbe Richtung haben und eine geometrische Reihe bilden, deren Quotient $-\theta$ ist, wobei

$$\theta = \frac{-f_t}{\sqrt{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist. Hiernach ist eine Diskontinuität in jedem Punkte einer Welle völlig definiert durch ein einziges Segment (λ, μ, ν), das den Ableitungen vom Index 0 entspricht, und eine Zahl, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Auch die Änderungen, welche die Dichtigkeit und die Deformationskomponenten an der Diskontinuitätsfläche erleiden, werden untersucht, wobei sich das Resultat ergibt, daß eine longitudinale Diskontinuität ohne Einfluß auf die Molekularrotation, eine transversale ohne Einfluß auf die Dichtigkeit ist. — Sind die abgeleiteten Verträglichkeitsbedingungen nicht erfüllt, so teilt sich die Diskontinuität. — Von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist zu unterscheiden die Verrückungsgeschwindigkeit (vitesse de déplacement). Man erhält sie folgendermaßen. Hat ein Punkt mit den Anfangskoordinaten a, b, c zur Zeit t die Koordinaten x, y, z, so drücke man a, b, c durch x, y, z, t aus, wodurch $f(a, b, c, t) = 0$ in $\varphi(x, y, z, t) = 0$ übergebe. Die Verrückungsgeschwindigkeit entsteht dann aus φ durch dieselben Operationen wie θ aus f.

Zum Schluß werden noch die Verträglichkeitsbedingungen höherer Ordnung besprochen, indem die Frage aufgeworfen wird: welche Änderungen der Ableitungen von höherer Ordnung als der n-ten sind durch eine Diskontinuität n-ter Ordnung bedingt? Auch diese Bedingungen zerfallen in identische und in Bedingungen für die Verträglichkeit.

Erst nach diesen sehr ausführlichen kinematischen Betrachtungen, die in dieser Allgemeinheit und Vollständigkeit bisher noch nicht angestellt sind, wendet sich der Verf. in Kap. III den hydrodynamischen Gleichungen zu. Dabei wird ausführlich die supplementäre Relation besprochen, die bei elastischen Flüssigkeiten zu den drei allgemeinen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung hinzukommt. Im Anschluß an Duhem wird gezeigt, daß auch für bewegte elastische Flüssigkeiten dieselbe Beziehung zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur gilt, wie für das Gleichgewicht, daß demnach die Annahme von Bjerknes [Acta mathematica **4**, 1884], der auch in die Relation $F(p, \varrho, T) = 0$ die Geschwindigkeiten einführt, nicht zutreffend ist. Dabei wird darauf hingewiesen, daß, konstante Temperatur vorausgesetzt, die Konstanten in dem Mariotte-Boyleschen Gesetz und in dem Poissonschen adiabatischen Gesetz eine ganz verschiedene Bedeutung haben. In $p = c\varrho$ ist c eine wirkliche Konstante, während in der Gleichung $p = k\varrho^m$ $[m = 1{,}41]$, da diese Gleichung das Resultat einer Integration ist, k noch von den Anfangskoordinaten abhängen kann, und ähnlich, wenn man

allgemeiner $p = \varphi(\varrho)$ setzt. — Auch die Rolle der Grenzbedingungen wird eingehend erörtert und gezeigt, daß zwar für inkompressible Flüssigkeiten erst durch das System: allgemeine Gleichungen, Anfangszustand, Grenzbedingungen (letztere auf den allgemeinen Fall bezogen, wo die Grenzfläche sich in gegebener Art mit der Zeit ändert) die Bewegung völlig bestimmt ist, daß aber bei elastischen Flüssigkeiten zwischen den Grenzbedingungen und den Bedingungen für den Anfangszustand im allgemeinen ein Widerspruch auftreten wird. Vermöge des Anfangszustandes ist die Lage aller Teilchen, damit auch die anfängliche Dichtigkeit und vermöge dieser der Druck p überall bekannt, ebenso der Wert von $\frac{dp}{dn}$ an der Grenzfläche. Andererseits muß infolge der Grenzbedingungen $\frac{dp}{dn}$ einer gewissen Relation genügen. Das gibt also zwei verschiedene Arten von Bedingungen für $\frac{dp}{dn}$, die im allgemeinen nicht in Übereinstimmung sein, sondern einander widersprechen werden. Und Analoges gilt für jeden Zeitmoment, da man ja von der in irgend einem Moment stattfindenden Bewegung als Anfangszustand ausgehen kann. Wie ist nun dieser scheinbare Widerspruch zu erklären?

Das wird in Kap. IV zunächst für die geradlinige Bewegung eines Gases, d. i. für die Bewegung, die außer von der Zeit nur von einer Koordinate abhängt, gezeigt. Ist ω die Dilatation, also

$$\omega = \frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{\partial x}{\partial a},$$

so ergibt sich als Bewegungsgleichung, falls in der Relation $p = \varphi(\omega)$ die Funktion φ von a unabhängig ist (s. oben):

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \psi(\omega)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \psi\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2},$$

und zwar ist $\psi(\omega) = -\frac{1}{\varrho_0}\varphi'(\omega)$. Für den einfachen Fall, daß die Funktion ψ sich auf eine Konstante θ^2 reduziert, d. h. für die gewöhnliche Bewegung des Schalls in Röhren, ist die Lösung bekannt. Bei begrenzten Röhren sind, wie ebenfalls bekannt, die Werte der in der Lösung auftretenden willkürlichen Funktionen nur für Argumente zwischen 0 und l bekannt, während die Grenzbedingungen zur Ermittelung der Fortsetzung jener Funktionen für andere Intervalle dienen. (Die Bestimmung der Fortsetzung erfolgt hier durch eine eigenartige geometrische Interpretation.) In diesem einfachen Beispiel besteht der vorher hervorgehobene Widerspruch darin, daß an den Enden die Größe $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ nur von der Bewegung der Endflächen der Röhren abhängt, während sie andererseits $= \theta^2\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ sein muß, welche Größe ihrerseits nur vom Anfangszustande abhängt. Beide Daten sind aber unabhängig voneinander. Die geometrische Konstruktion der Fortsetzung der willkürlichen Funktionen zeigt nun, daß hier eine Diskontinuität auftritt, und zwar ändern sich sowohl $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, als $\theta^2\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ diskontinuierlich derart, daß, wenn man die an dem Ende $a = 0$ entstehende Diskontinuität allein betrachtet, für kleine negative Werte von $\theta t - a$ jene beiden

Digitized by Google

Größen denselben Wert haben, und zwar denjenigen, der sich aus dem Anfangszustande ergibt; für sehr kleine positive Werte von $\theta t - a$ haben beide Größen wieder denselben Wert, aber jetzt denjenigen, der durch die Bewegung der Endfläche $a = 0$ bestimmt ist. Man sieht also, daß hier eine Welle zweiter Ordnung entsteht von der Art, wie sie in Kap. II näher besprochen ist, und zwar pflanzt sie sich mit der Geschwindigkeit θ fort. Sollte der Wert von $\theta^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$, der sich aus dem Anfangszustande, und der Wert von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, der sich aus der Bewegung der Endfläche ergibt, zufällig gleich sein, so können gleichwohl Diskontinuitätswellen dritter, resp. noch höherer Ordnung auftreten. Ferner sind für die Punkte, in denen sich die von den beiden Enden $a = 0$ und $a = l$ ausgehenden Diskontinuitätswellen treffen, die Bedingungen der Verträglichkeit nicht mehr erfüllt; es muß also eine Trennung der Welle erfolgen.

Im Anschluß an diese Erörterungen legt Herr Hadamard eine wichtige, von früheren Autoren noch nicht bemerkte Analogie dar zwischen den betrachteten Diskontinuitätswellen von Gasen und der Theorie der Charakteristiken von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Stellt man den bei der Bewegung des Gases in Röhren sich ergebenden Wert von x als Ordinate einer Fläche dar, deren horizontale Koordinaten a, t sind, so entsprechen den Bewegungen zu beiden Seiten einer Diskontinuität zwei Flächen, die sich längs einer Raumkurve berühren, und die genau zwei solchen Integralflächen der Gleichung (I) entsprechen, die sich längs einer Charakteristik dieser Gleichung berühren.

Das eben erörterte Auftreten von Diskontinuitäten ist nun nicht allein diesem Spezialfall eigentümlich, sondern das gleichzeitige Bestehen der Anfangs- und Grenzbedingungen bedingt notwendig in allen Problemen der Gasbewegung die Entstehung von Diskontinuitäten. Das macht die Behandlung derartiger Aufgaben so schwierig, und es ist daher nicht zu verwundern, daß solche Aufgaben eigentlich nur in den Untersuchungen von Riemann und Hugoniot über geradlinige Bewegung von Gasen behandelt sind. Diese Untersuchungen werden zunächst dargelegt. Bei der Entwicklung der Riemannschen Integrationsmethode wird nicht genau der Weg von Riemann eingeschlagen, sondern auf die Gleichung (I), in der nunmehr ψ nicht mehr konstant ist, zunächst die Legendresche Transformation angewandt, und in der transformierten Gleichung werden statt der unabhängigen Variabeln $\omega = \frac{\partial x}{\partial a}$, $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ die neuen Variabeln

$$u + \chi(\omega) = \xi, \quad u - \chi(\omega) = \eta, \quad [\chi'(\omega) = \sqrt{\psi(\omega)}]$$

eingeführt. Die transformierte Gleichung nimmt dadurch genau die Riemannsche Form an und wird nach dessen Methode behandelt, mit Hinweis auf die Erweiterung der Methode durch Darboux.

Es erhebt sich nun aber die Frage, ob durch die Integration der transformierten Gleichung das eigentlich gestellte physikalische Problem wirklich gelöst ist. Das ist schon für eine unendlich lange Röhre zweifelhaft, da eine Singularität in der Lösung der transformierten Gleichung nicht notwendig eine Singularität von x als Funktion von a und t bedingt und umgekehrt. Dieser Punkt würde in jedem Einzelfalle besondere Untersuchungen,

20*

und zwar ziemlich schwierige, erfordern. Bei *begrenzten* Röhren aber ist überhaupt das Resultat nur auf solche Teile der Röhre anwendbar, die noch nicht durch die von den Enden ausgehenden Diskontinuitätswellen erreicht sind. Die Bewegungen der übrigen Teile sind auch von der Bewegung der Endfläche (des Stempels) abhängig, und auf letztere Bewegung läßt sich die Legendresche Transformation nicht anwenden. Diese Transformation und die Riemannsche Methode reichen daher nicht aus, und man muß das Problem direkt angreifen. Bisher ist die Lösung nur in dem von Hugoniot behandelten Falle gelungen, in dem ein ursprünglich in Ruhe befindliches Gas durch die Bewegung des Stempels in Bewegung gesetzt wird. Infolge dieser Anfangsbedingungen ist die Geschwindigkeit eine Funktion der Dichtigkeit, und daher ist die Fläche, deren Ordinate $= x$ ist, eine abwickelbare Fläche. Jede Erzeugende derselben stellt die Fortpflanzung einer bestimmten Bewegung dar, und diese Bewegung ist charakterisiert durch ein Wertsystem von u und ω. In einem Punkte der Rückkehrkante treffen zwei unendlich nahe Erzeugende der Abwickelbaren zusammen. Dort hören die einfachen Lösungen von Hugoniot auf, gültig zu sein; es tritt hier eine Diskontinuität erster Ordnung auf, eine diskontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit, eine Stoßwelle. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solchen wird nach Riemann und Hugoniot abgeleitet. Zwischen den Resultaten beider Autoren besteht folgender Unterschied. Riemann nimmt für die Beziehung zwischen dem Drucke p und der Dilatation ω das adiabatische Gesetz von Poisson an und setzt demgemäß für die Änderung dieser Größen zu beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche die Gleichung an

$$p_1 \omega_1^m = p_2 \omega_2^m \qquad (m = 1{,}41).$$

Hugoniot dagegen verwirft die Gleichung $p\omega^m = k$, da ihre Ableitung eine kontinuierliche Änderung von p und ω voraussetzt, und ersetzt die vorstehende Gleichung durch folgende:

$$\tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{m-1}(p_1\omega_1 - p_2\omega_2).$$

Für unendlich kleine Unterschiede zwischen p_1 und p_2 sowie ω_1 und ω_2 geben beide Gleichungen dasselbe Resultat.

Es wird dann noch die Bewegung in einem von zwei derartigen Stoßwellen begrenzten Teile der Röhre untersucht. Die Lösung ergibt sich in Form von Reihen, deren einzelne Terme sich sukzessive bestimmen lassen, während man über ihre Konvergenz nichts auszusagen vermag.

An diese vier Kapitel, deren Inhalt ausführlich analysiert ist, schließen sich noch drei weitere an, hinsichtlich deren wir uns mit einer kurzen Übersicht begnügen. In Kap. V werden die allgemeinen Bewegungen eines Gases (ohne Beschränkung auf nur eine Dimension) behandelt. Es wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Diskontinuität ermittelt, und gewisse allgemeine Sätze über solche Diskontinuitäten werden aufgestellt, z. B. daß eine diskontinuierliche Änderung der Beschleunigung stets tangential zur Wellenfläche ist usw. Spezielle Aufgaben werden nicht gelöst.

Ähnliche allgemeine Untersuchungen werden dann (Kap. VI) für die Bewegungen fester elastischer Körper angestellt. Endlich wird (Kap. VII) die allgemeine Theorie der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen

zweiter Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen im Anschluß an die Untersuchungen von Beudon (Bull. Soc. Math. Fr. 1887) dargelegt. Die Charakteristiken bilden hier ($n - 1$)-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Neben ihnen werden die „Bicharakteristiken" betrachtet; das sind gewisse durch ein System von $n - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmte lineare Mannigfaltigkeiten, die auf den Charakteristiken liegen und ebenso wie diese bei jeder Berührungstransformation ungeändert bleiben. Einen breiten Raum nehmen die Existenzbeweise ein, und zum Schluß wird der Fall linearer Gleichungen behandelt, der deshalb von besonderem Interesse ist, weil er unmittelbare Anwendungen auf die Bewegung von Gasen und elastischen Körpern zuläßt.

Dem eigentlichen Texte sind noch vier Noten beigefügt: I. Das Cauchysche Problem und die Charakteristiken. II. Über das Gleiten von Flüssigkeiten. III. Die durch Stoßwellen entstehenden Wirbel. IV. Die Reflexion an einem festen Stempel.

Halle a. S. A. Wangerin.

E. A. Fouët, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Seconde partie. Paris 1904. 8⁰. 299 p.

Bei der Besprechung des ersten Bandes wurde der beiden Ziele des Verfassers gedacht, elementare Einführung einerseits, Übersicht der Geschichte der Forschung bis zu den neuesten Arbeiten andrerseits zu geben. In dem vorliegenden Schlußband überwiegt die zweite Richtung bei weitem zu Ungunsten der ersten. Die darin enthaltenen beiden letzten Kapitel des ersten Buches (Allgemeine Definition und Darstellung von Funktionen) geben noch eine Übersicht der Theorie der Differentialgleichungen, so weit sie eben zur Definition von Funktionen dienen (Kap. VI), und der Funktionalgleichungen (Kap. VII). Kap. VI möge hier als Beispiel dafür angeführt werden, mit welchem Eifer und Erfolg der Verfasser Vollständigkeit angestrebt hat. Weit mehr als eine Wiedergabe der nach vier Gesichtspunkten gruppierten Existenzbeweise für die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen (Cauchys Majorantenmethode, die Polygonmethode, Picards Methode der Annäherungen, endlich die von der Theorie der linearen Differentialgleichungen ausgehende Untersuchung der Singularitäten der Funktionen) finden wir hier; selbst über Painlevés neue Untersuchungen über die Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen Singularitäten wird referiert (p. 35: Painlevé „a triomphé de cette difficulté"). Es folgen die Existenzbeweise der allgemeinen Lösungen von partiellen Differentialgleichungen, endlich die Untersuchungen, die an das Dirichletsche Prinzip anknüpfen, „die Dirichletschen Probleme". Auch hier ist der Verfasser der Geschichte auf den Grund gegangen (Anm. 3. p. 55 usw.), hat auch die verschiedenen physikalischen Einkleidungen aufgezählt, die Methoden von C. Neumann, H. A. Schwarz, H. Poincaré analysiert, einschließlich Hilberts „Rettung des Dirichletschen Prinzips" (p. 72: Voici presque textuellement la Note qui résume sa démonstration).

Es folgt nun im zweiten Buch, Kap. VIII—X die Theorie der analytischen Funktionen nach Cauchy (Darstellung der komplexen Funktionen durch ein Randintegral mit Anwendung auf Laurentsche und Mittag-Lefflersche

Entwicklung, Lagrangesche Reihe mit Auflösung der Keplerschen Gleichung, Berechnung von bestimmten Integralen durch Änderung des Integrationswegs, Laplacesche Substitution bei linearen Differentialgleichungen usw.), Weierstraß (Potenzreihen, arithmetische Methoden; allgemeine Sätze über Nullstellen und Singularitäten) und Riemann (harmonische Funktionen als Quelle der analytischen, geometrische und physikalische Betrachtungen als Ausgangspunkt und Ziel; Potentialtheorie, Riemannsche Flächen, konforme Abbildung, Minimalflächen, Hydrodynamik usw.). Besonders fein werden die wissenschaftlichen Persönlichkeiten charakterisiert, Cauchys Vielseitigkeit (p. 30), Weierstraß mit seinem an Abel anknüpfenden Programm (p. 164), Riemanns physikalische Denkweise (p. 226), wobei Berichte und Reden bekannter Mathematiker herangezogen werden.

Das zweite Buch ist von dem ersten organisch schwer zu trennen, und so begegnen uns dieselben Gegenstände mehr als einmal, worauf der Verfasser auch aufmerksam macht (S. 88). Auch wird diese Inkongruenz durch vielfache Verweise (vorwärts und rückwärts) zum Teil ausgeglichen. (Beispiel: Die elliptischen Funktionen I p. 233, II p. 83 und 188; konforme Abbildung I p. 53 ff, II p. 261 ff).

Drei Stufen der Erkenntnis hat vor langer Zeit Christian Wolff festgestellt: die Wahrheiten verstehen, die Überzeugung durch Eindringen in die Beweise zu gewinnen und endlich mit ihnen arbeiten zu lernen, um selbst Neues zu schaffen. Wer sich vor allem das erste Ziel gestellt hat, wird sich gesättigt von der vollen Tafel erheben, die Herr Fouët mit ebensoviel Geschmack wie Verständnis angerichtet hat.

Leipzig. HEINRICH LIEBMANN.

N. J. Lobatschefskijs, „Imaginäre Geometrie“ und „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Heinrich Liebmann. Leipzig 1904, B. G. Teubner. XII u. 188 S. Preis 8 *M.* A. u. d. T. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften Heft XIX.

Man muß Herrn Liebmann dankbar sein, daß er der von Herrn Engel veranstalteten Übersetzung der beiden wichtigsten geometrischen Abhandlungen Lobatschefskijs und seiner eignen Ausgabe der Pangeometrie eine Übersetzung der „Imaginären Geometrie“ und der „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“ hat folgen lassen. Es liegen nunmehr die Hauptwerke des großen russischen Mathematikers, nachdem sie Jahrzehnte lang vergessen waren, in mustergültigen Ausgaben vor. Die hier zu besprechenden beiden Abhandlungen erschienen zuerst in russischer Sprache in den Kasaner gelehrten Schriften 1835/36, und obgleich Crelles Journal im Jahre 1837 eine französische Bearbeitung der ersten Abhandlung brachte, so hat zu Lebzeiten ihres Verfassers wohl nur ein Mathematiker, allerdings der größte, nämlich Gauß, von ihnen eingehendere Kenntnis genommen. Wohl mag gerade bei diesen Schriften die unübersichtliche, oft schwer verständliche Darstellung ihrer Verbreitung hinderlich gewesen sein, und an sie wird wohl Gauß in erster Linie gedacht haben, als er in einem Brief an Gerling schrieb, daß die größeren Aufsätze Lobatschefskijs einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer

ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden. Man muß sich dieses Urteil vor Augen halten, um die Schwierigkeiten zu ermessen, die der Herausgeber zu bewältigen hatte, und wenn wir wohl auch nie dazu kommen werden, alle Bäume einzeln zu kennen, so hat er doch in emsiger Pionierarbeit für die Erschließung des Urwaldes so viel getan, als sich tun ließ. Durch ein sorgfältiges Inhaltsverzeichnis und eine Einteilung des bisher ganz ungegliederten Textes in Kapitel und Paragraphen, vor allem aber durch außerordentlich eingehende Anmerkungen, welche die im Original meist fehlenden Zwischenrechnungen ausführlich entwickeln, hat er das Studium der Abhandlungen so weit als möglich erleichert. Fast möchte es sogar scheinen, als habe er stellenweise des Guten zu viel getan. So könnte z. B. der ausführliche Beweis von Formel (47) der zweiten Abhandlung (S. 63), in der ein bestimmtes Integral durch Gammafunktionen ausgedrückt wird, durch einen Hinweis auf die ganz identische Formel (64) der ersten Abhandlung (S. 22) und die dazu gehörige Anmerkung ersetzt werden. Die Übereinstimmung beider Formeln tritt sofort zutage, wenn man Lobatschefskijs kuriose Schreibweise der Binomialkoeffizienten und der Gammafunktion durch die übliche ersetzt, wie es auch Herr Engel in seiner Ausgabe (S. 205) getan hat.

Über den Inhalt der beiden Abhandlungen ist das Wesentliche bereits von Herrn Engel in seiner ausführlichen Lebensbeschreibung Lobatschefskijs gesagt worden. Hier sei nur kurz bemerkt, daß sie keineswegs zur Einführung in die imaginäre Geometrie bestimmt und geeignet sind. Ihr Hauptgegenstand ist vielmehr die Entwicklung der Formeln für die Flächen- und Inhaltsbestimmung in verschiedenen Koordinatensystemen und ihre Anwendung auf die Theorie der bestimmten Integrale. Von den äußerst zahlreichen und mannigfaltigen Resultaten erwähnen wir nur die interessante Funktion $L(x) = -\int_x^0 dx \log \cos x$, durch die sich das Tetraedervolumen ausdrücken läßt, und die Integration einer bekannten partiellen Differentialgleichung der mathematischen Physik durch Doppelintegrale, bei der ein Vergleich mit der Poissonschen Darstellung (vgl. Burkhardt, Bericht über Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen S. 607 ff.) von Interesse gewesen wäre.

Straßburg i. E. Paul Epstein.

G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. XXIII u. 476 S. Preis geb. ℳ 14.

Eine freudige Überraschung hat Herr Arendt den Mathematikern bereitet, indem er die ungemein sorgfältige Nachschrift einer Vorlesung Lejeune-Dirichlets über bestimmte Integrale vom Sommer 1854 der Öffentlichkeit übergab. Er hat durch diesen schönen Beweis treuer Pietät den hundertsten Geburtstag seines großen Lehrers in der würdigsten Weise gefeiert und gleichzeitig die mathematische Literatur um ein vorzügliches Lehrbuch bereichert. Zeigen diese Vorlesungen an jeder Stelle die Meisterschaft der Darstellung, die wir an allen Schöpfungen Dirichlets bewundern, so erhalten sie noch dadurch einen eignen Reiz, daß in ihnen

die Persönlichkeit des großen Mathematikers lebendig hervortritt. In einzelnen Redewendungen, in den eigenartigen Fremdwörtern, in der frischen und abwechslungsreichen Diktion, die ganz die Unmittelbarkeit des gesprochenen Wortes besitzt, glaubt man ihn selbst zu hören, und wenn man sieht, mit welcher Klarheit er bei jedem Problem das Wesentliche hervorzuheben weiß, wie er jeden sich darbietenden Weg verfolgt und die einzelnen Methoden gegeneinander abwägt, so erhält man den Eindruck eines vollendeten Kunstwerks, und man begreift die tiefgehende Wirkung, die dieser Mann auf seine Hörer und auf die Gestaltung des mathematischen Hochschulunterrichts ausgeübt hat. Um nur einzelne Beispiele herauszugreifen, sei die Darstellung der Attraktion eines homogenen Ellipsoids, die Inhaltsbestimmung der Ellipse, die Ableitung des Integrals für $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ hervorgehoben.

Legt man bei einem zur Einführung bestimmten Lehrbuch den Hauptwert mehr auf die Art der Darstellung, als auf möglichste Vollständigkeit, so liegt es auf der Hand, daß ein Werk, wie das vorliegende, nicht veralten kann, wenn es auch naturgemäß nicht überall dem heutigen Stand der Wissenschaft Rechnung trägt. Der Herausgeber hat es mit Recht unterlassen, Ergänzungen in diesem Sinne in den Text aufzunehmen, vielleicht aber wäre es in einer zweiten Auflage möglich, einige besonders wichtige Gegenstände in Supplementen zu behandeln, so wie es Herr Dedekind in seiner Bearbeitung der zahlentheoretischen Vorlesungen Dirichlets getan hat. Wir denken hier an den zweiten Mittelwertsatz, vor allem aber an den *Cauchyschen Integralsatz* und seine Anwendungen; erscheint er doch gerade für Integrale wie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ oder $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{cxi}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$, die in diesen Vorlesungen die bedeutsamste Rolle spielen, als das natürliche Hilfsmittel. Eine der Wichtigkeit des Satzes gerecht werdende Darstellung könnte ganz wohl an Stelle des letzten etwas fragmentarisch gehaltenen Abschnittes „Fundamentaleigenschaften komplex-imaginärer Funktionen" treten.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

Schwalbe, Grundriß der Astronomie beendet und herausgegeben von Prof. Dr. H. Böttger. Braunschweig 1904, Friedrich Vieweg und Sohn. XIV u. 319 S.

Dieses Buch, das zugleich die Neubearbeitung des astronomischen Teiles von Schoedlers Buch der Natur bildet, ist von dem rühmlichst bekannten Verlag in geradezu verschwenderischer Weise ausgestattet worden. Nicht weniger als 13 große Tafeln, darunter 6 schöne Spektraldoppelbilder sind neben 170 Textbildern dem Werke beigegeben.

Ein kurzes Lebensbild des um die Förderung des naturwissenschaftlichen Unterrichts wohlverdienten Verfassers leitet dasselbe ein. Das Buch soll „diejenigen Tatsachen aus der Astronomie enthalten, deren Kenntnis dem gebildeten Laien erwünscht ist." Wir fürchten, daß diejenigen, welche in dieser Wissenschaft noch Laien sind, des trockenen Tones in dem Werke, der öfter in eine bloße Aufzählung von Namen und Tatsachen ausartet, bald satt sein und ihre Kenntnisse wo anders suchen werden. Die-

jenigen aber, die es etwa als Nachschlagebuch verwenden möchten, werden trotz der anscheinend übersichtlichen Gliederung bald finden, daß zusammengehörende Gegenstände getrennt, dieselben Sachen an verschiedenen Stellen behandelt werden, manche wichtigeren Tatsachen fehlen, und bei andern der neueste Standpunkt der Wissenschaft nicht eingenommen wird. So findet man in einem kaum 5 Seiten langen Kapitel mit der Überschrift: „Das Planetensystem, die Keplerschen Gesetze und das Newtonsche Attraktionsgesetz, die Kant-Laplacesche Hypothese" hinter Newton eingeschaltet die Lebensgänge von W. Herschel, Bessel u. a., dazu bei dem ersteren Bemerkungen über große Fernrohre. Der Kantschen Hypothese kann aber heute, da nicht bloß die Rückläufigkeit der Monde der äußersten Planeten, sondern ganz besonders die mechanische Wärmetheorie so sehr dagegen spricht, kaum mehr als ein historischer Wert beigemessen werden. Damit fällt auch die S. 107 gegebene Vorstellung von der Weltentstehung. Daß heute die Meile noch überall als Maß zugrunde gelegt wird, muß verwundern. Die Erddimensionen sind zweimal gegeben, nämlich S. 44 und S. 154 und zwar weichen die Zahlen voneinander nicht unbedeutend ab. Hier ist auch die Masse der Erde ganz falsch angegeben, weil offenbar 1 cbkm $= 10^6$ l gesetzt ist, statt 10^{12} l. Dabei ist in Klammern diese Masse mit 9 gültigen Ziffern (595 562 715) angegeben, während die Dichte der Erde doch kaum auf 2 gültige Ziffern bekannt ist (!).

Neben den in das Druckfehlerverzeichnis bereits aufgenommenen haben wir noch folgende Druckfehler und Stilhärten gefunden: S. 21 $\pi = \frac{7}{22}$, etwas tiefer $= \frac{113}{355}$, 4 Zeilen weiter: „die 12. Stelle (soll heißen Dezimalbruchstelle) der Zahl π ist im Vergleich mit der Einheit weniger als 1 Sekunde Zeit im Vergleich zur Zeitdauer von 31 000 Jahren" (soll heißen: etwa ebensoviel als 1 Sekunde gegen 100 000 Jahre). Nebenbei gesagt, muß man sich bei dem ganzen, geometrische Begriffe, die für das Folgende notwendig sind, erörternden Abschnitte fragen: wem soll damit gedient werden? Der Laie wird schwerlich Mathematik daraus lernen, besonders wenn er S. 31 lernt, daß der sin 10^0 gleich 0,868 und auch 0,17365 sein kann — es gehen nämlich die Begriffe Sinuslinie und Sinuszahl durcheinander.

S. 23: „wenn die Erde einer Kugel entspricht, so wäre ihre Gesamtoberfläche" (statt: „ist"). S. 28, wo übrigens die Bezeichnungen mit denen der Figur nicht übereinstimmen, wird das Verhältnis der kleinsten zur größten Entfernung der Erde von der Sonne $=$ „3000 : 3030" statt 3000 : 3100 gesetzt. S. 38 „dcm" statt dm.

S. 56: „Der Himmel erscheint als hohle Halbkugel" (er erscheint bekanntlich viel flacher).

S. 85 unten: „Massenbestimmungen der Fixsterne lassen sich nicht machen"; dagegen spricht, daß S. 95 die Siriusmasse angegeben ist, wie sich denn überhaupt bei Doppelsternen mit Parallaxe die Masse des Systems so genau wie jene angeben läßt. S. 95: „Die Entfernungen der Doppelsterne voneinander sind noch nicht genau bekannt"; einige Zeilen tiefer ist dieser Abstand für die Komponenten des Siriussystems angegeben. S. 113: „Die Schätzungen über die Temperaturgrade der Sonne schwanken von 7000^0 bis 150000^0" (das Stephan-Boltzmannsche Gesetz liefert 6000^0). S. 143. Der Entdecker der Marsmonde heißt „Hell" (statt Hall). S. 144. „Die

klimatischen Unterschiede auf dem Jupiter müssen physikalisch (?) sehr groß sein wegen der geringen Neigung des Äquators gegen die Ekliptik.“ Ein paar Zeilen tiefer ist Jupiter ein noch glühender Planet genannt; dann dürfte aber die Sonnenstrahlung in ihren klimatischen Wirkungen gegen die Eigenwärme des Planeten verschwindend sein. S. 155: „Die Mondbahn ist eine Art Schraubenlinie (Epizykloide)“ (!). Auf derselben Seite 43′ 11,5″ statt 43 Min. 11,5 Sek. S. 163: „Die Sonne steht für die unter dem Äquator liegenden Gegenden des Mondes fast immer im Zenitkreise“ (dieser Ausdruck ist im ganzen Buche nicht erklärt). S. 166: „Die Fluthöhe der Ostsee beträgt bei Kiel 70 mm, bei Triest 0,7 m (!)“. S. 167: „ἴσος = ísos“ (die Attiker sagen: ἴσος = ĭsos). Ebenda: „Die doppelte Periode geht in 24 St. etc. vor sich“ (!). Der Absatz über die Hafenzeit ist überhaupt verworren und unverständlich. S. 169 ist der Beginn einer Mondfinsternis (für Braunschweig) $11^h 35^m$ p. m. gesetzt (offenbar ist mittlere Ortszeit gemeint), 5 Zeilen tiefer steht bei andern einfach $10\frac{3}{4}$ Uhr abends ohne Angabe, ob mittlere Ortszeit eines bestimmten Ortes oder welche Zeit sonst gemeint ist. S. 170: „Je weiter zwei Orte östlich oder westlich von einander entfernt sind“. Ebenda: „dreimal seltener“. Auch sonst kommen Ausdrücke wie „dreimal kleiner“ häufig vor. S. 45. Was ist eine „Meridianterz“ (Knoten)? auf S. 7 ist nur die Einteilung des Kreises bis zu Sekunden gegeben.

S. 181. „Biela hat den nach ihm benannten Kometen sehr genau berechnet.“ (Er hat ihn nur 1826 wiedergefunden). Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß S. 182 die Kometen als zum Sonnensystem gehörig angesehen werden, und daraus auf die „Kugelgestalt“ des Systems geschlossen wird. S. 184 kommt der Name Andromediden vor, ohne erklärt zu sein. S. 102: „bis 1848 waren 200 Sterne 3. Klasse spektroskopisch erforscht“. S. 198 finden wir als wissenschaftliche „Instrumente“ auch „Zeitbestimmungen“, S. 200 werden „populäre und populär-wissenschaftliche“ Darstellungen unterschieden. S. 218: „Späteres Mittelalter und Neuzeit. Die Astronomie als Wissenschaft“. (Ptolemäus' Almagest ist also nicht wissenschaftlich).

Es wäre nicht schwer gewesen, zu diesen Beispielen von Inkorrektheiten noch andere zu gesellen, die dem Buche schaden; wir meinen aber, daß diese beim Durchblättern gefundene Auslese genügt.

Charlottenburg. H. Samter.

Höfler, Alois, Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie. Mit 230 physikalischen Leitaufgaben. XXXI u. 965 S. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. Geb. ℳ 16.

Das Buch ist eine der bedeutendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Schulphysik. Es ist für die Hand des Lehrers bestimmt und soll ihm bei seinen Vorbereitungen zum Unterricht sowohl sachlich wie methodisch ein Führer sein. Der Verfasser des Buches, der sich bei der Ausarbeitung der Mitwirkung von Dr. E. Maiß, weil. Realschulprofessor in Wien und von Dr. Friedr. Poske, Prof. am Askanischen Gymnasium in Berlin, zu erfreuen gehabt hat, ist in der Lehrerwelt durch seine Arbeiten über die Aufgaben und die Methoden des physikalischen Unterrichts genügend bekannt.

In dem vorliegenden Buche hat Höfler seine Erfahrungen aus einer mehr als fünfundzwanzigjährigen Lehrtätigkeit niedergelegt. Daß das Buch die Frucht einer langjährigen und erfolgreichen Arbeit ist, erfährt man schon beim flüchtigen Durchblättern des Buches. Ein eingehendes Studium desselben beweist aber, daß der Verfasser mit eisernem Fleiße, mit großem Geschick und mit einem hohen Verständnis für die bildende Aufgabe des Physikunterrichtes an dem Buche gearbeitet hat, dessen Abfassung er nach seinen eigenen Worten „als ein nicht unwesentliches Stück Lebensaufgabe" betrachtet hat. „Mit allen übrigen Faktoren des physikalischen Unterrichts hat das Lehrbuch die eine Aufgabe gemeinsam, das natürliche, noch nicht physikalische Denken auf die Pfade des physikalischen Denkens erst hinüberzuleiten". Diese Worte des Verfassers kennzeichnen die Art und Weise, wie die Bearbeitung und Durcharbeitung des physikalischen Lehrstoffes ausgeführt ist. Die Anleitung zur vorurteilsfreien Beobachtung eines physikalischen Vorganges wird an den Anfang gestellt, dann werden aus dieser Beobachtung heraus erst die Begriffe und Gesetze der physikalischen Erscheinungswelt entwickelt und zueinander in Beziehung gebracht. Die Anordnung des gesammten Lehrstoffes ist systematisch, doch in den einzelnen Kapiteln tritt die methodische Behandlung der einzelnen Gebiete in den Vordergrund, gewiß nicht zum Schaden für das Buch und für diejenigen, die das Buch benutzen. Infolge dieser eigenartigen Anordnung ist das Buch wohl geeignet, nicht nur als Handbuch für den Physiklehrer zu dienen, sondern auch denjenigen ein erfolgreiches und bildendes Selbststudium der Physik zu ermöglichen, „die sich unabhängig von jedem Schülerbedürfnis für Inhalt und Methode der modernen Physik interessieren und mehr oder minder lebhaft vermissen, einen guten Physikunterricht zu rechter Zeit empfangen zu haben".

Inhaltlich zerfällt das Buch in die drei Teile: 1) Mechanik, 2) Wärme, Schall, Licht, (welche als Physik der Sinnesqualitäten zusammengefaßt werden), 3) Elektrische und magnetische Erscheinungen. An diese drei Hauptteile schließt sich als vierter Teil die Behandlung der astronomischen, meteorologischen und chemischen Erscheinungen an. Ein Anhang enthält dann noch Zusätze aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und physikalische Leitaufgaben. Für die Mechanik ist die Einteilung in Phoronomie und Dynamik kennzeichnend. Mit Recht ist mit der früher üblichen Einteilung der Mechanik in Statik und Dynamik gebrochen. Die Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen wird erst ganz an das Ende der Mechanik, erst hinter die Mechanik der luftförmigen Körper gestellt. Mit dieser Anordnung ist Referent durchaus einverstanden, denn leider werden die erst zu physikalischem Denken zu erziehenden Schüler meist viel zu früh mit den Molekülen und den Molekularkräften auf einer Stufe bekannt gemacht, wo sie kaum einen Begriff von den Kraftwirkungen überhaupt haben. Der hypothetische Charakter der Molekel muß doch auch im Unterricht gebührend hervorgehoben werden; das kann aber nur dann geschehen, wenn die Schüler schon einen gewissen Grad physikalischer Bildung besitzen.

Den Schluß der Mechanik bilden die mechanischen Schwingungen und die Wellenbewegungen. An diese wird meist die Akustik unmittelbar angegliedert. Das ist hier nicht der Fall. Vielmehr ist die Lehre vom Schall mit der Lehre von der Wärme und vom Licht unter dem Namen „Physik

der Sinnesqualitäten" zusammengefaßt. Es ist also das psychologische Moment des Tones für die Angliederung an Wärme und Licht maßgehend gewesen.

Die Lehre vom Licht ist eingeteilt in A. geometrische Optik, B. Leuchtende, wärmende, chemische und andere Strahlen, C. Erklärung der einfachsten Lichterscheinungen aus der Wellenlehre, D. Einige weitere Erscheinungen der Interferenz, Polarisation, Doppelbrechung des Lichts. Aus dem letztgenannten Kapitel könnte wohl die Tafel VI ohne Schaden fortbleiben, da ein solches buntes Bild ohne Erklärung im Texte wenig Wert hat.

In der Elektrizitätslehre wird von dem Begriffe des Potentials, der schon in der Mechanik beim Gravitationsgesetz als Arbeitsbegriff eingeführt ist, nützlicher Gebrauch gemacht. Die Beziehnngen des Potentials zum Ladungsgrade eines Elektroskopes, zu der Bedingung des elektrischen Gleichgewichts auf elektrostatisch geladenen Leitern, znr elektrostatischen Influenz, zur Kapazitäts- und Ladungsmenge, und zu den Bedingungen des Entstehens eines elektrischen Stromes werden im Zusammenhange musterhaft dargestellt. Aus der Elektrizitätslehre mag noch besonders das Kapitel über elektrische Wellen und Lichtwellen hervorgehoben werden, wo die Hypothesen Maxwells und die Versuche von Hertz außerordentlich geschickt und klar vorgetragen werden.

Daß den Begriffen und Erscheinungen aus der Astronomie und aus der Meteorologie besondere Abschnitte gewidmet sind, verdient ebenfalls Anerkennung, da sonst diese Gebiete, die für jeden gebildeten Menschen gleich wichtig und interessant sind, und die sich noch dadurch auszeichnen, daß jeder physikalisch gebildete Mensch ohne Apparate seine Kenntnisse hierin durch eigene Beobachtung vermehren und erweitern kann, meist in den Physiklehrbüchern sehr zu kurz kommen.

Alle schwierigeren mathematischen Ableitungen sind in den mathematischen Anhang verwiesen. Das kann man mit Freuden begrüßen, denn hierdurch wird vermieden, daß die mathematischen Ableitungen das physikalische Bild der Naturerscheinungen verschleiern. Hier finden sich sogar rein mathematische Entwicklnngen, die zum Verständnis der Ableitung der physikalischen Formeln nötig sind. Der logische und der psychologische Anhang verdient ebenfalls besonders hervorgehoben zu werden. Das Kapitel „physikalische Leitaufgaben" enthält eine Reihe wichtiger physikalischer und physikalisch-mathematischer Beziehungen, die in Form von gelösten Aufgaben den physikalischen Wissensbereich und das physikalische Verständnis zu vertiefen wohl geeignet sind.

Alles zusammengefaßt, kann das Buch zum eingehenden Studium und zu eingehender Benutzung von seiten des Lehrers bei seinen Vorbereitungen für den physikalischen Unterricht aus vollster Überzeugung des Referenten aufs wärmste empfohlen werden.

Hamburg. E. Grimsehl.

Heinrich Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. Mit 22 Figuren. Leipzig 1905, G. J. Göschensche Verlagshandlung. Sammlung Schubert. Bd. 49. 248 S. 8⁰.

Der Verfasser bespricht in Kap. I das Parallelenpostulat und einige seiner Scheinbeweise; sodann wird in Kap. II die logische Möglichkeit der

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

nichteuklidischen Geometrie durch Konstruktion einer Pseudogeometrie vermittels des Kreisnetzes dargetan. Nunmehr erfolgt der axiomatische Aufbau in den Kap. III—VI, nämlich synthetische (III) und analytische (VI) Geometrie, die Trigonometrie (IV) und Längen- und Inhaltsmessungen (V). Die beiden letzten Kapitel bringen Einzelheiten der sphärisch-elliptischen Geometrie und der nichteuklidischen Mechanik. In der analytischen Geometrie geht der Verfasser bis zur Theorie der Kegelschnitte vor.

Im einzelnen ist zu bemerken, daß die nichtgezeichneten Figuren vielfach unzureichend beschrieben sind. Ob es überhaupt gut ist, an Figuren zu sparen, darüber sind die Ansichten sehr geteilt; ich halte die Anzahl der Figuren für viel zu gering.

Daß die projektive Geometrie und die damit in Verbindung stehenden Untersuchungen von Klein, Cayley und Beltrami unberücksichtigt geblieben sind, halte ich für einen schweren Mangel des Buches, der ein tieferes Eindringen in den Gegenstand verhindert. (Die Theorie der Kegelschnitte z. B. konnte gut weggelassen werden, zumal sie ja doch nur kurz skizziert ist Wenn man die geodätische Abbildung zur Verfügung hat, läßt sie sich übrigens mit wenigen Sätzen erledigen.) Diese Lücke wird durch die guten Einzelheiten nicht ausgeglichen.

Grunewald. Gerhard Hessenberg.

Burg, Dr. **Robert, Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen.** Frankfurt a. M. 1905, Franz Benjamin Auffarth. kartonniert ℳ 3,50. Auch in 5 Heften à 60, 60, 75, 75, 75 Pf., 1901—1905, dazugehörig ein Tabellenheft, 1901, das aber der Sammelausgabe fehlt.

An mathematische Lehr- und Übungsbücher mit dem Titelvermerk „für gewerbliche und technische Anstalten, Fortbildungsschulen" u. dgl. wird man betreffs mathematischer Gründlichkeit im allgemeinen keine hohen Anforderungen stellen, da man ihren Schwerpunkt in den praktischen Anwendungen sucht. Im Gegensatz hierzu hat der Verfasser der vorliegenden, im Auftrage des Vorstandes der städt. gewerbl. Fortbildungsschule zu Frankfurt a. M. ausgearbeiteten Sammlung gezeigt, daß es sehr wohl möglich ist, ein wesentlich praktischen Zwecken dienendes Unterrichtswerk zu schaffen, das auch wissenschaftlich befriedigt und betreffs wirklicher mathematischer Schulung vielleicht sogar mehr erstrebt, als leider noch vielfach dem arithmetischen Unterrichtsbetriebe unserer höheren Lehranstalten entspricht. Begrifflichen Schwierigkeiten (Rechnung mit Null, den negativen Zahlen etc.) wird nicht aus dem Wege gegangen, sondern auf ihre Klärung gerade Wert gelegt und zwar in didaktisch vorzüglicher, durch geschickte Fragestellung sehr einfacher Weise; nirgends findet man auch den Verhältnisbegriff und die Proportionalität so vielseitig beleuchtet, wie hier, und eine im Hinblick auf die eminente praktische Verwendung der gebrochenen Benennungen so dankenswerte ausgiebige Behandlung derselben. Die erwähnte Betonung der mathematischen Schulung beeinträchtigt dabei in keiner Weise die in erster Linie doch praktische Bestimmung der Sammlung, indem rein Theoretisches ganz ausgeschlossen blieb, die rein algebraischen Rechenaufgaben keine unnötigen

Digitized by Google

besonderen Schwierigkeiten enthalten, sondern überall genau ihrem jeweiligen Zwecke gemäß gebildet sind und die sehr zahlreichen Textaufgaben, die von großer Vielseitigkeit und reicher Kenntnis des Verfassers Zeugnis ablegen, überall dem Interessenkreise gewerblicher Schüler angepaßt, wirklichen Verhältnissen entnommen worden sind, nirgends gekünstelte Fragestellung zeigen; sie nehmen zugleich Bezug auf vorausgesetzte Parallelpensa in Geometrie, Physik, Mechanik und elementarer Festigkeitslehre. Die Hefte 1 bis 3 führen bis zu den Logarithmen und quadratischen Gleichungen, enthalten also etwa das Pensum einer sechsklassigen Realschule und können auch diesen Schulen warm empfohlen werden. Das 4. Heft bringt nach mannigfachsten Anwendungen des Früheren, besonders der Proportionen, in seinem letzten Teil Berechnungen von Körperinhalten, Trägheits- und Biegungsmomenten, sowie Schwerpunktsbestimmungen, nach der Cavalierischen Methode mit den Formeln für die Summen der potenzierten Zahlen.

Das 5. Heft gibt eine Anleitung zum Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers. Auch hier strebt der Verfasser vor allem danach, unbedingte Sicherheit zu erzielen; es gelingt ihm, die ganze Handhabung des Rechenstabes einschließlich der Setzung des Dezimalkommas sehr einfach und einheitlich zu gestalten, die Einheitlichkeit auch bei den Kubikwurzeln durchzuführen. Zur Stellenauswertung bedient sich Verf. statt der bei den Technikern üblichen unsicheren, auch nicht immer raschen Methode des Taxierens einer einfach konstruierten Uhr (D. R. G. M. 224 723, bei Dennert u. Pape, Altona, für *M* 1,50 erhältlich). Dieselbe leistet zweifellos vorzügliche Dienste; doch erscheint es dem Ref. noch einfacher, die betreffenden Zählungen an den Fingern der rechten und linken Hand vorzunehmen, wenn man nicht überhaupt den Regeln in der Anweisung von Nestler (Lahr, 1905) den Vorzug gibt. Die Anleitung enthält 136 vollständig gelöste, zum Teil angewandte Aufgaben, mehr als hinreichend, um eine völlig sichere Handhabung des Rechenschiebers zu bewirken; sie dürfte deshalb vor den schon vorhandenen den Vorzug verdienen.

Die Sammlung ist eine in jeder Beziehung hervorragende, durchaus selbständige und eigenartige Leistung, sorgfältig redigiert und druckfehlerfrei; viele ihrer Aufgaben werden voraussichtlich den Weg in andere Sammlungen finden; sie sei allen gewerblichen Anstalten, aber auch den Lehrern der Mathematik an den höheren Schulen angelegentlichst empfohlen; es müßte ein Vergnügen sein, nach ihr zu unterrichten.

Mülhausen i. E. A. Leman.

Snyder, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft nach den Ergebnissen der neuesten Forschungen. Autorisierte deutsche Übersetzung von Hans Kleinpeter. Mit 16 Bildnissen. Leipzig 1905, Joh. Ambr. Barth. XII u. 306 S. Preis 5,60 *M*.

Der Verfasser, der mit den Errungenschaften unseres raschfindenden Zeitalters sich sehr genau bekannt erweist, — und zwar nicht bloß mit denjenigen der unorganischen Naturwissenschaften, sondern auch mit den biologischen — zeichnet hier in großen Zügen ein Weltbild, wie es aus diesen Entdeckungen zu folgen scheint. Das Buch ist lebhaft und interessant geschrieben, und auch diejenigen, die nicht in allen Punkten mit dem Ver-

fasser einverstanden sind, werden durch die Lektüre von der ersten bis zur letzten Seite gefesselt werden und sich schwer von dem Buche trennen. Wir gestehen, daß hierin für manchen Laien eine Gefahr liegt, insofern das Buch das Tatsächliche vom Hypothetischen, das gegenwärtig Erreichte von dem erst in einer fernen Zukunft zu Erstrebenden nicht scharf trennt. Die physikalische Seite des Weltbildes, wie es sich insbesondere durch die neueren Strahlenforschungen darstellt, wollen wir gelten lassen. Freilich wirkt es hier störend, daß der Verfasser Zusammengehöriges trennt und erst in weit entfernten Abschnitten behandelt — es macht den Eindruck als ob das Buch aus einer Anzahl von selbständigen Feuilletons entstanden sei. Auch der chemische Teil — die Entwicklung der synthetischen Chemie nach Berthelot, van t'Hoff und Fischer erfährt eine gute Darstellung. Nicht folgen können wir aber den biologischen Auseinandersetzungen, die an die Arbeiten von amerikanischen Gelehrten Loeb und Matthews anknüpfend den Geheimnissen des Lebens und der Seele die Hülle nehmen sollen, die sie unsern geistigen Augen bisher undurchdringlich machten. Mag sein, daß die Experimente, an welche dabei angeknüpft wird, wenigstens teilweise unanfechtbar sind; die Konklusionen aber, welche das Leben zu einer Summe von Gärungen, das „Denken" zu einem elektrischen Vorgange machen, sind nicht so zwingend, daß wir uns ihnen anschließen möchten.

Charlottenburg. H. Samter.

Grimsehl, Angewandte Potentialtheorie in elementarer Darstellung. I. Band. Leipzig 1905, G. J. Göschen. (Sammlung Schubert XXXVIII.) VIII u. 219 S. Preis geb. 6 *M.*

Der Verfasser will die Erscheinungen der Gravitation und der Elektrizität aus der Potentialtheorie so einfach entwickeln, daß sie einem mit den Anfangsgründen der höheren Analysis vertrauten Leser verständlich werden. Er leitet dazu in diesem ersten Teile den Begriff des Potentiales als einer Arbeitsgröße noch besonders her und beweist die Hauptsätze, weil er möglichst wenig voraussetzt, in etwas schleppender und wegen der mehrfachen Beweise für dieselbe Sache etwas ermüdender Weise. Die vielfachen Beispiele, die er aus dem Gebiete der Gravitation heranzieht, sind gut gewählt und auch für Unterrichtszwecke verwendbar, so über die beim Eintreten der Sternschnuppen ins Kraftfeld der Erde auftretende Energie und die bei deren Vernichtung entstehende Wärmemenge. Für die Frage, an welcher Stelle zwischen Erde und Sonne ein Körper im Gleichgewicht bleibt, wäre die nicht realisierbare Voraussetzung für die ganze Betrachtung, daß hier die Erde als ruhend zu denken ist, stärker hervorzuheben. Lebhafter ist die Darstellung der Elektrostatik, die zwei Drittel des vorliegenden 1. Bandes ausfüllt, und die den besten Behandlungen dieses Gegenstandes an die Seite gestellt werden kann. Hier wird auch vom Integralzeichen ein fleißigerer Gebrauch gemacht als vorher. Die verschiedenen Elektrometer werden genau beschrieben, Theorie und Praxis derselben gut auseinandergesetzt. Die Messungen des Potentiales und die praktische Untersuchung des Verlaufs der Kraftlinien finden sogar eingehendere Behandlung als in anderen Büchern. Den Schluß bildet eine Behandlung des elektrischen Erdpotentiales, worin die Art der Beobachtungen dargelegt und die Ebertsche Ionentheorie zur

Digitized by Google

Erklärung herangezogen wird. Wir können allen Anfängern dieses Buch als erste Einführung in die Potentialtheorie sehr empfehlen.

Charlottenburg. H. Samter.

Aufseß, Otto Freiherr von und zu, **Die physikalischen Eigenschaften der Seen.** Braunschweig 1905, Fr. Vieweg u. Sohn. X u. 120 S. Preis *M* 3,—. (Aus: „Die Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien".)

Der Verfasser, welcher schon in seiner Dissertation sich das Studium der Farbe der Seen zum Thema gewählt hat, gibt hier eine schöne Zusammenstellung der Resultate, zu denen man bisher beim Studium der physikalischen Natur der Binnenseen gelangt ist, sowie der Methoden und der Instrumente, mit denen man die Seenforschung betrieben hat. Er geht dabei fast überall auf die Grundlagen soweit ein, daß sein Buch sogar für Laien verständlich wird, und diesen, die dadurch auch zur Sammlung fruchtbaren Materials angeregt werden können, nicht genug empfohlen werden kann. Die fortschreitenden, Wellen und die Seiches, die Durchsichtigkeit des Wassers, die selektive Absorption und ihre Wirkung auf die Farbe, endlich die Wärmeverhältnisse werden ausführlich behandelt, und ein Literaturverzeichnis wird den Lesern, die sich über einzelne Fragen noch weiter orientieren wollen, von Nutzen sein. Vollständigkeit — wiewohl der Verfasser mit Recht hierauf nicht den höchsten Wert gelegt hat — ist doch nahezu erreicht. Vielleicht hätte auch das Phänomen des Glanzes Erwähnung finden können. A. W. Vogel hat nicht bloß die blaue Grotte, sondern später auch das Wasser der grünen und der roten Grotte von Capri spektroskopisch untersucht (Ann. Ph. u. Ch. I 1895. S. 175 ff.). Warum ist Springs Theorie, daß die blaue Farbe des Wassers durch Reflexion des Lichtes an den Trennungsflächen verschieden warmer Schichten zustande kommt, kurz daß dieselbe eine Folge von Konvektionsströmen ist (Ciel et terre XVIII, 11. 1896), eine Theorie, die dem Referenten einwandsfrei erscheint, nicht erwähnt, während andere Arbeiten von Spring im Literaturverzeichnis vorkommen?

Charlottenburg. H. Samter.

Gérard, E. Leçons sur l'électricité professées à l'institut électrotechnique Montefiore. Tome premier (einzeln käuflich). Septième édition 1904. 882 Seiten. Format 25 × 16 cm. Mit 400 Figuren im Text. Verlag von Gauthier-Villars, Paris.

Der Verfasser schrieb diese Vorlesungen zunächst für seine Zuhörer an der Universität Lüttich, die sich unter seiner Leitung zu Elektroingenieuren heranbilden. In deutscher Sprache haben wir kein ähnliches Werk von der gleichen Eigenart. Der Elektrotechniker findet in der wissenschaftlichen Literatur seines Arbeitsgebietes Werke von ausgeprägt verschiedener Darstellung. Entweder schreibt sie ein Physiker oder ein Ingenieur. Der Physiker operiert mit dem Rüstzeug der mathematischen Elektrizitätslehre, die schließlich auf die Hertz-Maxwellschen Fundamentalgleichungen führt. Der Ingenieur weiß damit zunächst wenig anzufangen. Die Methoden sind ihm zu mathematisch abstrakt, zu schwierig in der An-

wendung auf den einzelnen Fall und oft auch unzulänglich in den Voraussetznngen, da die Elektrotechnik meist magnetisch gesättigte Eisenkreise anwendet. Der Elektrotechniker arheitet mit sorgfältig ausgebildeten elementaren Fachmethoden von greifbar physikalischer Grundlage, die in der Anwendung auf den Bau elektrischer Maschinen mit großer Eleganz und Genauigkeit verfahren, darüher hinaus jedoch oft versagen. Er muß dann die Sprache der mathematischen Physik verstehen, tut sich aber meist schwer damit in Ermanglung geeigneter Einführung und Verbindung beider Darstellungsarten.

Das vorliegende Werk schlägt diese Brücke, und das ist sein Hauptverdienst. Es haut sich auf die grundlegenden Experimente und Theorien der mathematischen Elektrizitätslehre auf, gibt einen Umriß der ganzen Elektrophysik und führt in organischer Spezialisierung auf die Berechnung und Wirkungsweise der elektrischen Stromerzenger für Gleich- und Wechselstrom über. Die lange Lehrtätigkeit des Verfassers und das Alter des Buches, das nunmehr in 7. Auflage erscheint, kommen dem Werke sehr zu gute. Frei von zweckwidrigen Nebensächlichkeiten ist der Inhalt nach Experiment und Theorie so ausgewählt, daß er dem angehenden Elektroingenieur die hreiteste wissenschaftliche Grundlage gewährt. Natürlich sind in den vorbereitenden Abschnitten die Grenzgehiete hesonders bearheitet, die Licht auf die engere Starkstromtechnik werfen; denn für Elektroingenieure ist das Werk geschriehen. Aher der Leser ist stets imstande, aus seinem Fachgehiet in die allgemeineren physikalischen Theorien überzugehen und Anshlick aufs Ganze zu halten. Die fließende Eleganz des Stils, die Klarheit und Präzision des Ausdrucks erinnern an die französischen Klassiker der exakten Wissenschaften.

Der erste Band enthält die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, einen Abriß der Meßkunde und die Berechnung und Konstruktion der elektrischen Gleich- nnd Wechselstromerzenger. Die Darstellung ist überall durch Figuren und Ahhildnngen von ausgeführten modernen Apparaten und Maschinen beleht.

Die Einleitung behandelt die Maßeinheiten und die allgemeinen Eigenschaften der zentralen Kräfte unter Einführung des Potentials. Hierauf folgen die Erscheinungen des Erdmagnetismus und der Magnetisierung des Eisens. Der Abschnitt üher Elektrizität hringt zunächst die grundlegenden Experimente, die Meßinstrumente und die Theoreme der Elektrostatik, die Wirkungen elektrischer Entladungen, die Kathoden-, Röntgen- und radioaktiven Strahlen; dann folgen die chemischen, thermoelektrischen und Wärmewirkungen im elektrischen Stromkreis. Die auf einen elektrischen Strom im magnetischen Feld ausgeühte Wirknng wird durch Einführung magnetischer Blätter und des Kraftlinienbegriffes geschildert, und Ausdrücke für die Energie zweier magnetischer Blätter aufeinander werden entwickelt. Hierauf folgen die hauptsächlichsten magnetischen Meßinstrumente und die theoretische Begründung ihres Konstruktionsprinzips. Die Translations- und Rotationsbewegungen eines Leiters im magnetischen Feld werden bestimmt. Den Abschlnß bildet die Berechnung des magnetischen Stromkreises und eine Znsammenstellung der elektromagnetischen Einheiten und ihre Verhältnisse zn den statischen uud dynamischen Maßeinheiten.

Nun werden die allgemeinen Gesetze der elektromagnetischen Induktion

und die Richtungsregeln für induzierte Ströme entwickelt. Dann wird die Gleichung eines Stromkreises mit Widerstand und Selbstinduktion aufgestellt und der Energieinhalt zweier magnetisch gekoppelter Stromkreise berechnet. Hierauf leitet der Verfasser die Neumannschen Formeln für den Koeffizienten der Selbst- und gegenseitigen Induktion und die Gleichung für das Verhalten eines Stromkreises mit Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion ab. Darauf entwickelt er in dem Abschnitt über Wechselströme die in der Technik geläufigen Begriffe unter Annahme von Sinuswelle für Strom und Spannung und studiert den Einfluß von Selbstinduktion und Kapazität auf die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Die graphische Behandlung von Wechselstromproblemen wird in Anwendung auf instruktive Beispiele und als Gegenstück die sogenannte symbolische Darstellung von Vektoren mittels imaginärer Größen gelehrt. Letztere Methode dient dem Verfasser dazu, den Verlauf von Strom und Spannung längs einer langen mit Widerstand, Selbstinduktion, Kapazität und Ableitung durch undichte Isolation behafteten Leitung zu berechnen. Die Entstehung und mechanische Wirkung von Drehfeldern, die Wirbelstromverluste in Metallmassen und die Stromverteilung im Querschnitt massiver Leiter bei hohen Periodenzahlen sind Gegenstand von Einzelschilderungen, die mit einer Terminologie der in der Wechselstromtechnik üblichen Bezeichnungen enden. Den Hertzschen Wellen und der Funkentelegraphie ist ein eigenes Kapitel gewidmet, in dem die Hertz-Maxwellschen Fundamentalgleichungen abgeleitet werden.

Es folgt ein Abriß der elektrotechnischen Meßkunde. Die gebräuchlichen Meßetalons und technischen und physikalischen Instrumente werden beschrieben und die Methoden zur Messung von Spannungen, Strömen, Widerständen, Kapazitäten, elektrischer Leistung, der magnetischen Feldstärke, der Permeabilität und Hysteresis und der Koeffizienten der gegenseitigen und Selbstinduktion im Abriß vorgeführt. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus des Verfassers Werk über elektrische Messungen.

Der Verfasser geht nun auf die elektrischen Stromerzeuger im weiteren Sinne über und behandelt zunächst die thermischen und galvanischen Elemente, die Sekundärbatterien, hierauf die technischen Gleich- und Wechselstromerzeuger.

In dem Abschnitt über Thermoelemente beschreibt er den Peltier-, Seebeck- und Kelvineffekt und gibt die gebräuchlichen Formen der Thermoelemente wieder, insbesondere in ihrer Anwendung als Pyrometer. Die elektromotorische Kraft der chemischen Zellen wird aus der Wärmetönung und der absoluten Temperatur nach den Formeln von Lord Kelvin, Helmholtz und Nernst berechnet. Hierauf werden die in der Telegraphie und Telephonie gebräuchlichen Elemente beschrieben. Von den Sekundärbatterien werden zunächst die Elemente ohne Eisen, insbesondere der Edisonakkumulator erwähnt. Hierauf werden die chemischen Aktionen, die Lade- und Entladekurven der Bleiakkumulatoren und ihr mechanischer Aufbau besprochen.

Der Verfasser geht nun auf die praktich wichtigen Starkstromerzeuger über. Er beschreibt zunächst die einfachsten Formen der Gleichstrommaschine und legt die mit der Stromwendung verknüpften Vorgänge klar. Dann gibt er Schemata und Ausführung der gebräuchlichen Gleichstromankerwicklungen. Er behandelt danach die Hauptstrom-, Nebenschluß- und

Digitized by Google

Compoundmaschine mit gemischter Wicklung im einzelnen und gibt ihre Theorie und die Prüfungsmethoden an fertigen Maschinen. Dann folgt die graphische Konstruktion des elektrischen Verhaltens und Betrachtung des mechanischen Aufbaus von Gleichstrommaschinen. Hierauf werden ausgeführte moderne Typen beschrieben und eine Maschine für gegebene Leistung, Spannung und Tourenzahl vollständig durchgerechnet.

Der Abschnitt über Wechselstromerzeuger ist kürzer gefaßt, da sich vieles wiederholen würde. Zunächst ist geschildert, wie die elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Wicklungsanordnungen induziert werden; dann folgen Betrachtungen über den Einfluß von Kapazität und Selbstinduktion auf die Leistung von Wechselstromerzeuger und Wicklungsschemata für den induzierten Anker. Hierauf werden moderne Maschinentypen beschrieben und die Messungen zur Ermittlung der Kurvenform des Wirkungsgrades und der Streuung fertiger Maschinen gelehrt und die Methoden zur Vorausbestimmung des Spannungsabfalls vorgetragen. Das Kapitel über Parallelschaltung von Wechselstrommaschinen bringt eine graphische Darstellung und analytische Berechnung der oszillatorischen Schwingungen und begründet die Regeln für Inbetriebsetzung und Aufrechterhaltung eines guten Parallelganges. Den Abschluß bildet die vollständige Durchrechnung des elektrischen Teiles einer ausgeführten, früher beschriebenen Maschine.

Wir konnten bei der Reichhaltigkeit des Inhalts nur eine Skizze des gebotenen Stoffes entwerfen und schließen unsere Besprechung an dieser Stelle mit dem besonderen Wunsche, daß mancher Lehrer der Mathematik und Physik Einsicht in das Werk nehmen möge. Nichts ist geeigneter, das Odium, das der höheren Mathematik und mathematischen Physik in den Kreisen der Ingenieure gelegentlich noch anhaftet, hinwegzunehmen, als solche Werke, die mit wissenschaftlicher Strenge Einfachheit und durchsichtige Klarheit des Gedankenganges und der Darstellung vereinigen.

Berlin, 6. Oktober 1904. H. Linsenmann.

Borel, E. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Das vorliegende Werk ist gleich einer Anzahl früherer Werke desselben Verfassers ein Mittelding zwischen einem Lehrbuch und einer Monographie. Der Herr Verfasser greift eine Anzahl ihm besonders wichtig erscheinender Probleme aus der Theorie der reellen Funktionen heraus, die er auf Grund neuerer Arbeiten untersucht und teilweise weiterführt. Daneben befindet sich je eine Note der Herren Painlevé und Lebesgue dem Werke beigefügt, von denen die erste sich auf die Darstellung analytischer Funktionen durch eine unendliche Reihe von Polynomen, die zweite auf die Theorie der unstetigen Funktionen bezieht.

Von den genannten beiden Noten und einer kurzen weiteren von Herrn Borel selbst abgesehen, zerfällt das Werk in fünf Kapitel. Das erste Kapitel enthält einige Untersuchungen aus der Mengenlehre, die für das folgende von Bedeutung sind. Im zweiten Kapitel wird vor allem der Satz über die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen beleuchtet und an der Hand einer Untersuchung von Herrn Baire auf unstetige verallgemeinert. Ferner wird die Definition des bestimmten Integrals zunächst nach Riemann

gegeben, sodann aber eine Erweiterung derselben nach Herrn Lebesgue entwickelt. Der prinzipielle Unterschied zwischen beiden Darstellungen liegt darin, daß Riemann seinen Betrachtungen Intervalle der unabhängigen, Lebesgue dagegen der abhängigen Veränderlichen zugrunde legt.

Das dritte Kapitel bezieht sich auf die Untersuchung von unendlichen Reihen, deren Glieder reelle Funktionen von x sind. Im Anschluß an neuere Untersuchungen von Herrn Arzelà werden die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine derartige Reihe, falls ihre Glieder stetig sind, selbst stetig ist. Dann aber wird auf Grund der Lebesgueschen Integraldefinition die Integration derselben in Betracht gezogen.

Von besonderem Interesse ist das vierte Kapitel. Dasselbe bezieht sich auf die Darstellung stetiger Funktionen durch eine unendliche Reihe von Polynomen. Hier geht der Verfasser etwas ausführlicher vor und entwickelt zunächst mehrere bekannte Methoden, die für die Lösung des angedeuteten Problemes in Betracht kommen. Referent möchte vor allem auf die Annäherungsmethoden von Tschebyscheff aufmerksam machen, die in neuester Zeit in einer wertvollen Göttinger Dissertation von Kirchberger neue Beleuchtung gefunden haben und sich durch Eigenart und Tiefe auszeichnen.

Daneben setzt Herr Borel das genannte Problem mit dem Interpolationsproblem in Verbindung, ohne freilich die Beziehungen nach allen Seiten hin klar zu legen. Er beweist den wichtigen Satz, daß eine jede stetige Funktion mit Hilfe gewisser Interpolationsfunktionen analytisch dargestellt werden kann, wenn ihre Werte für rationale Werte der Argumente gegeben sind. Dieser Satz ist um so wichtiger, als die bisher vorzugsweise verwendeten Interpolationsfunktionen — die Lagrangeschen — nach neueren Untersuchungen von Herrn Runge u. a. hierzu nicht geeignet sind.

In den letzten Jahren ist von Herrn Baire neben der Darstellung der stetigen auch die Darstellung der unstetigen Funktionen durch Polynome in Betracht gezogen werden.

Diesen Untersuchungen ist das fünfte Kapitel, sind ferner die angedeuteten Noten der Herren Lebesgue und Borel gewidmet; indessen kann von einer Skizzierung derselben abgesehen werden, da mittlerweile Herr Baire eine Monographie hierüber veröffentlicht hat.

Die beigefügte Note von Painlevé fällt insofern aus dem Rahmen des Buches heraus, als sie sich auf die Darstellung komplexer Funktionen durch Polynome bezieht, ist aber aufgenommen worden, da aus derselben Schlüsse auf die Darstellung reeller Funktionen gezogen werden können.

Der Grundgedanke von Herrn Painlevé besteht darin, mit einer gegebenen Potenzreihe

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

gewisse erzeugende konvergierende Reihen zu verbinden, deren Glieder $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sich homogen und linear aus den Koeffizienten der Potenzreihe zusammensetzen und welche $f(1)$ darstellen — wobei $f(t)$ für die positiven Werte von t zwischen 0 und 1 als holomorph vorausgesetzt ist. Die Kenntnis derselben ergibt unmittelbar die gesuchte Darstellung von $f(x)$. Es wird gezeigt, wie man derartige Reihen konstruieren kann.

Dresden. M. Krause.

Digitized by Google

René Baire, Leçons sur les fonctions discontinues. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Unter den jüngeren Mathematikern, die die Ideen und Resultate Georg Cantors auf spezielle Probleme der Analysis anzuwenden verstanden, steht neben E. Borel insbesondere René Baire in erster Linie. Sein Hauptverdienst bildet die Erledigung der Frage, unter welchen Bedingungen eine konvergente Reihe von reellen stetigen Funktionen eine punktweise unstetige Funktion darzustellen vermag. Dieses Problem hat er auf Grund neuer und eigenartiger Hilfsmittel in seiner Pariser These zuerst behandelt. Kürzlich hat er die Ergebnisse seiner These zum Gegenstand von Vorlesungen am Collège de France gemacht, und nunmehr liegen diese Vorlesungen in der von E. Borel besorgten, bei Gauthier-Villars erscheinenden Monographiensammlung als besonderes Heft vor. Man schuldet dem Pariser Verlag und dem Herausgeber sicher Dank, daß sie die moderne Entwickelung der Funktionentheorie, die zur Zeit bei unsern Nachbarn vor sich geht, weiteren Kreisen in guter Darstellung zugänglich machen.

Die Problemstellung des Verfassers knüpft an die bekannte Tatsache an, daß eine konvergente Reihe von stetigen Funktionen nicht notwendig eine stetige Funktion darstellt; ein Unstetigkeitspunkt ist bekanntlich ein Punkt ungleichmäßiger Konvergenz. Man kann nun fragen, welches der allgemeinste Unstetigkeitscharakter einer Funktion ist, die durch eine konvergente Reihe stetiger Funktionen dargestellt wird. Man findet leicht, daß die Funktion höchstens punktweise unstetig sein kann, und fragt sofort, ob dieses Resultat auch umkehrbar ist. Die Antwort fällt negativ aus; vielmehr ist die Funktion nur dann durch eine konvergente Reihe stetiger Funktionen darstellbar, wenn sie höchstens punktweise unstetig nicht allein in bezug auf das Intervall $a \dots b$ selbst, sondern in bezug auf *jede perfekte Menge* ist, die diesem Intervall angehört. Andererseits ist auch jede so beschaffene Funktion wirklich darstellbar.

Der Weg, den R. Baire geht, knüpft an einen gelegentlich bereits von Du Bois-Reymond und Arzelà benutzten Kunstgriff an, der die Betrachtung von Funktionen einer Variablen auf ein Problem zurückführt, das Funktionen von zwei Variablen betrifft. Ist $s_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der bezüglichen konvergenten Reihe, so stellen die Funktionen

$$s_1(x), \quad s_2(x), \; \dots, \; s_n(x), \; \dots$$

eine Folge stetiger Funktionen dar, die gegen eine Grenzfunktion $s_\omega(x) = f(x)$ konvergieren. Nun sei $a \dots b$ das Intervall, für das die Funktionen betrachtet werden, so konstruiere man über $a \dots b$ ein Rechteck und ziehe in ihm eine Reihe von Parallelen zur Grundlinie $a \dots b$, die sich gegen $a \dots b$ häufen, und von $a \dots b$ den Abstand $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ haben. Definiert man dann eine Funktion $F(x, y)$ so, daß sie auf der Parallelen $y = y_n$ mit $s_n(x)$ übereinstimmt, und daß sie sich auf den zur x-Achse gezogenen Parallelen zwischen y_n und y_{n+1} linear ändert, so hat man eine Funktion $F(x, y)$, die innerhalb des ganzen Rechtecks stetig ist; und wenn man diese Funktion $F(x, y)$ so konstruieren kann, daß sie auf $a \dots b$ mit $f(x)$ übereinstimmt und in jedem Punkt von $a \dots b$ in bezug auf y stetig ist, so wird alsdann $f(x)$ eine Grenzfunktion der stetigen Funktionen $s_n(x)$ darstellen. Die Behandlung dieses Problems geht nun weiter so vor sich,

Digitized by Google

daß die Konstruktion einer geeigneten Funktion $F(x, y)$ zunächst für den einfachsten Fall ausgeführt wird, daß Unstetigkeitspunkte von $f(x)$ nur in a und b liegen. Da aber die Werte, die eine solche Funktion im Innern von zwei verschiedenen Intervallen hat, einander nicht beeinflussen, so kann man eine Funktion, die in a, b, c unstetig ist, so darstellen, daß man sie auf $a \ldots b$ und $b \ldots c$ dem Vorstehenden gemäß bildet. So gelangt man allmählich dazu, die Darstellbarkeit nachzuweisen, wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte endlich, unendlich groß mit einem Häufungspunkt usw. ist; bis sich schließlich in dem oben genannten Satz die allgemeinste Bedingung für die Lage der Unstetigkeitspunkte ergibt.

Im Beginn des Heftes gibt der Verfasser eine ausführliche Darstellung der wichtigeren Begriffe und Sätze über Punktmengen, darunter auch diejenigen, die er selbst gefunden hat, wie die Unterscheidung der Punktmengen in solche erster und zweiter Kategorie. Eine kürzer gehaltene Ausdehnung der Untersuchungen auf Funktionen von beliebig vielen Variablen bildet den Schluß. Übrigens ist eine eingehendere Inhaltsangabe der Baireschen Resultate in dem Bericht über Mengenlehre enthalten, den der Referent vor einigen Jahren veröffentlicht hat.

Königsberg i. Pr. A. Schoenflies.

Emile Borel. Algèbre.[1]) Premier cycle 256 p.; second cycle 379 p. Deuxième édition. Paris 1904, Armand Colin.

Das Buch ist zur Einführung in die elementarsten Teile der Algebra bestimmt. Es ist ganz auf französische Verhältnisse zugeschnitten: „rédigé conformément aux nouveaux programmes". Es behandelt die Anfangsgründe und geht bis zu den Gleichungen zweiten Grades, den Proportionen und geometrischen Reihen, den Logarithmen; dabei wird nur der Bereich der reellen Zahlen benutzt. Der Stoff des ersten und der des zweiten Bändchens ist nahezu der gleiche; das zweite liefert „conformément au programme" eine erweiterte Wiederholung des ersten.

Den deutschen Mathematiker wird mehr die Form als der Inhalt interessieren. Die Behandlung ist recht geschickt. Der Verfasser läßt abstrakte Erörterungen beiseite; Schwierigkeiten um- oder übergeht er; er knüpft stets an Verhältnisse des täglichen Lebens an, um neue Einführungen verständlich zu machen; und er verwendet die erlangten Resultate sofort für praktische Zwecke. So erscheint die Theorie nicht als willkürliche Konstruktion des Verstandes, sondern als notwendige Behandlung von Fragen, die durch Probleme gestellt werden. Deshalb tritt auch die geometrische Präsentation algebraischer Verhältnisse überall erläuternd ein. Mit Vergnügen verfolgen wir die französische Eleganz auch auf rein wissenschaftlichem Gebiete.

Gießen. E. Netto.

1) Eine deutsche, von Herrn P. Stäckel besorgte Ausgabe wird noch in diesem Jahre bei B. G. Teubner erscheinen. Red.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

149. In einer Ebene sind zwei sich schneidende Geraden und eine Kurve gegeben; jede Tangente der Kurve begrenzt mit den beiden Geraden ein Dreieck, dessen Inhalt Δ sei. Die größten und die kleinsten Werte von Δ zerfallen in drei Arten: 1) solche vom Inhalte Null, gebildet durch die Tangenten vom Schnittpunkte der beiden Geraden an die Kurve; 2) solche Dreiecke, welche durch die Wendetangenten der Kurve mit den Geraden gebildet werden; 3) solche Dreiecke, gebildet von Tangenten, deren Berührungspunkt das Segment der Tangente zwischen den beiden Geraden hälftet.

Der Beweis ist sowohl mit Hilfe der Differentialrechnung zu führen, als auch durch elementare Betrachtungen. Zur Erläuterung diene die auf schiefwinklige Koordinaten bezogene Kurvengleichung $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Berlin. E. LAMPE.

---

150. Die zwei Punkte

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ sind die Schnittpunkte eines Strahles, den zwei Strahlenbüschel gemein haben. Welche Strahlen bestimmen beide Büschel? Welche Strahlen ergehen sich in dem besonderen Falle $a_1 = 0$?

Holzminden. G. KOBER.

---

151. Die vier Punkte

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ sind die Schnittpunkte eines zweiten Kegelschnittes, die zwei Kegelbüschel gemein haben. Welche Strahlenpaare bestimmen beide Büschel? Welche Besonderheit ergibt sich in dem Falle $a_0 = 0$?

Holzminden. G. KOBER.

---

152. Ist $\lambda - \lambda_i = 0$ einer von den drei Punkten

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$, so sind die beiden anderen Punkte jedesmal die Schnittpunkte derjenigen Sekante, welche den Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$x_1 + \lambda_i x_2 = 0, \quad a_1 x_1 + a_2 x_3' = 0$$

mit dem Schnittpunkte der beiden Strahlen

$$x_2 + \lambda_i x_3 = 0, \quad a_0 x_1 + a_2 x_3 = 0$$

verbindet. Wie folgen diese Strahlen aus dem vorhandenen Punkte $\lambda - \lambda_i = 0$ und den gegebenenen drei Punkten $a_{i-1}\lambda + a_i = 0$ des Kegelschnittes?

Holzminden. G. Kober.

153. Der Ort für die Wendepunkte aller Konchoiden des Nikomedes mit derselben Basis, demselben Pol, aber variablem Zwischenstück ist eine Neilsche Parabel.

Speyer. H. Wieleitner.

154. Den Begriff »*Kreis-Kissoide*« kann man in folgender Weise definieren. Zwei Kreise berühren sich in B. Ihre Durchmesser seien $AB = 2R$, $A'B = 2r$. Man ziehe durch A' irgend einen Strahl, der die Kreise bez. in Q und Q' schneidet, und mache $A'P = A'Q - A'Q'$, so beschreibt P eine Kreis-Kissoide. — Dies ist im allgemeinen Falle eine bizirkulare Quartik mit Spitze in A'. Für $R = \infty$ resultiert die Kissoide des Diokles; für $R = 2r$ die *Kardioide*. Man kann geometrisch zeigen, daß der kissoidale Prozeß, aus dem hier die Kardioide entsteht, dem konchoidalen, sonst üblichen, äquivalent ist.

Speyer. H. Wieleitner.

155. Man zeige, daß die 8 Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Radien R und r, wenn der Mittelpunktsabstand $a = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$ ist, auf zwei zu einander senkrechten Geraden liegen, deren Schnittpunkt die Zentrale a im Verhältnis $R^2 : r^2$ teilt.

Speyer. H. Wieleitner.

156. Dem gegebenen Dreieck ABC mit dem Inhalt J ein ihm ähnliches vom Inhalte i $(< J)$ einzubeschreiben. Wann (bei welchem Verhältnis $\frac{i}{J}$) hat die Aufgabe mehr als die drei evidenten Lösungen?

Potsdam. Otto Meissner.

157. Man trägt auf den Seiten eines Dreiecks ABC von A auf AB bis D, von B aus auf BC bis E, von C aus auf CA bis F die gleiche Strecke x ab; wie ist x zu wählen, damit $\triangle DEF = \frac{1}{2} \triangle ABC$?

Potsdam. Otto Meissner.

158. Auf den Seiten des Dreiecks ABC sollen drei Punkte A, B, Γ so bestimmt werden, daß durch die Linien AB, $\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma}$ das $\triangle ABC$ in 4 inhaltsgleiche Dreiecke zerfällt.

Potsdam. Otto Meissner.

Digitized by Google

159. Gegeben ein Viereck $ABCD$. Die Brocardschen Punkte des $\triangle ABC$ mögen B_1 und B_1', die von ACD B_2 und B_2', die von ABD B_1 und B_1', von BCD B_2 und B_2' heißen. Wann kann ein B mit einem B zusammenfallen?

Potsdam. Otto Meissner.

160. Man hat p Würfel und würfelt mit diesen. Nach jedem Wurfe läßt man alle Würfel, die 1 zeigen, liegen und würfelt nur mit den übrigen weiter. — Wie groß ist

a. die Wahrscheinlichkeit W_n, daß das Verfahren genau mit dem n-ten Wurfe ein Ende hat,

b. die Wahrscheinlichkeit w_n, daß es spätestens beim n-ten Wurfe ein Ende hat,

c. die Wahrscheinlichkeit $w_{n,q}$, daß nach n Würfen $n-q$ Würfel eine 1 zeigen?

Man gebe ein Zahlenbeispiel, etwa $p = 10$, $n = 5$, $q = 3$.

Potsdam. Otto Meissner.

161. Ein Trichter mit dem Öffnungswinkel 2α[1]) besitzt am unteren Ende eine Öffnung von 9 cm^2 Querschnitt. In ihn strömt von oben her eine Wassermenge von $p\,\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$. — Wie hoch steht das Wasser im Trichter, wenn der stationäre Zustand erreicht ist, und wie lange Zeit ist nötig, damit der Zustand stationär wird?

Potsdam, am 14. Dezember 1905. Otto Meissner.

B. Lösungen.

Zu **128** (Bd. IX, 181) (O. Gutsche). — Bezeichnen wir die Abszissen der Endflächen des geraden Zylinders mit x_1 und x_2, wobei $x_2 > x_1$, und den Radius der Endfläche mit y, so ist das Volumen des Zylinders

$$V = y^2\pi(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Dieses soll ein Maximum werden. Zwischen den hierin auftretenden drei Variabeln bestehen die beiden Gleichungen

$$y = \frac{x_1}{\sqrt{a}}\sqrt{a - x_1} = \frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{a - x_2}. \tag{2}$$

Wir eliminieren zuerst y, indem wir in (1) den aus (2) folgenden Wert

$$y^2 = \frac{x_1 x_2}{a}\sqrt{a^2 - a(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

1) D. h. also: Die Erzeugenden des geraden Kreiskegels, dessen Gestalt der Trichter hat, bilden mit der Kegelachse einen Winkel α.

einsetzen. Dann wird

$$V = \pi \cdot \frac{x_1 x_2}{a}(x_2 - x_1)\sqrt{a^2 - a(x_1 + x_2) + x_1 x_2}, \tag{3}$$

wobei zwischen x_1 und x_2 die aus (2) folgende Gleichung besteht

$$a(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2. \tag{4}$$

Nun führen wir in (3) und (4) die neuen Variabeln s und t ein mittels der Gleichungen

$$x_1 + x_2 = s, \quad x_1 x_2 = t; \tag{5}$$

dann erhalten wir statt (3) und (4) die beiden Gleichungen

$$V = \frac{\pi}{a} t \sqrt{(s^2 - 4t)(a^2 - as + t)}, \tag{3'}$$

$$as = s^2 - t. \tag{4'}$$

Setzen wir den aus (4') folgenden Wert $t = s^2 - as$ in (3') ein, so folgt

$$V^2 = \frac{\pi^2}{a^2} s^3 (s-a)^4 (4a - 3s). \tag{6}$$

Setzen wir nun den Ausdruck

$$s^3(s-a)^4(4a - 3s) = e^M,$$

so wird mit V gleichzeitig auch M ein Maximum. Es ist weiter

$$\frac{dM}{ds} = \frac{3}{s} + \frac{4}{s-a} - \frac{3}{4a - 3s},$$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{(s-a)^2} - \frac{9}{(4a-3s)^2} < 0.$$

Die aus $dM = 0$ folgende Gleichung

$$s^2 - \frac{5}{3} as + \frac{a^2}{2} = 0$$

liefert für s die beiden Werte $s = \frac{a}{6}(5 \pm \sqrt{7})$; da aber $s = x_1 + x_2$ größer als die Abszisse $\frac{2a}{3}$ der Maximalordinate sein muß, so gilt nur das obere Vorzeichen. Man hat

$$s = \frac{a}{6}(5 + \sqrt{7}).$$

Für die verlangte Höhe hat man nun

$$h = x_2 - x_1 = \sqrt{s^2 - 4t} = \sqrt{4as - 3s^2}$$

und mit Einführung des für s gefundenen Wertes

$$h = \frac{a}{6}\sqrt{24 - 6\sqrt{7}} = \frac{a}{6}\sqrt{3}(\sqrt{7} - 1).$$

Aussig (Böhmen). stud. math. Josef Krug.

Zu **129** (Bd. IX, S. 181) (G. Kober). — *Erste Lösung:* Die allgemeine Parabel $y = \sum_0^n a_k x^k$ ist in dem Falle $n = 2$ ein Kegelschnitt, mithin das Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel. Wie folgen die beiden Träger dieser Büschel und die erforderlichen drei Paare entsprechender Strahlen aus den gegebenen drei Punkten $x = 0$, $y = a_k$ und den beiden absoluten Punkten $y = 0$, $x = \pm 1$ durch lineare Konstruktion? — Jeder Punkt der Kurve $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen $y = a_0 + \lambda x$ und $a_1 + a_2 x = \lambda$, die von den Punkten $y = a_0$ und $y = \infty$ der Achse $x = 0$ getragen werden. Die dem gemeinsamen Strahle $x = 0$ entsprechenden zwei Strahlen $y - a_0 : x = a_1 : 1$ und $x = \infty$ sind Tangenten der Kurve. Dieselbe ist also eine Parabel, von welcher außerdem als Schnittpunkt eines dritten Paares entsprechender Strahlen der Punkt $\frac{y - a_0}{x} = a_1 + a_2 x = 0$ gegeben ist. Die Ordinate dieses Punktes ist $y = a_0$; seine Abszisse aber ist die Abszisse desjenigen Punktes des Strahles $y : x = a_2 : -1$, dessen Ordinate $y = a_1$ ist. Von jedem der Tangente $y = a_0 + a_1 x$ parallelen Strahl wird dieses dritte Strahlenpaar in den Schnittpunkten eines vierten Paares entsprechender Strahlen geschnitten.

Holzminden, 20. Juli 1905. G. Kober.

Zweite Lösung. — Die zu betrachtende Parabel hat die Gleichung

$$(1) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Auf der x-Achse trage man vom Koordinatenanfangspunkte O aus die Strecken $OA = 1$ und $OB = -1$, auf der y-Achse die Strecken $OC = a_0$, $OD = a_1$, $OE = a_2$ ab. Der unendlich entfernte Punkt der x-Achse sei X, die unendlich ferne Gerade g_∞.

Die Koordinaten $x = 0$, $y = a_0$ des Punktes C befriedigen die Gleichung (1); daher ist C ein Punkt der Parabel. Die durch A und B zur x-Achse senkrecht gezogenen Geraden haben mit der Parabel den unendlich entfernten Punkt C' gemein. Die Parabel ist also das Erzeugnis zweier projektivischer Strahlenbüschel (C) und (C'), die noch näher zu bestimmen sind. Nimmt man als Fundamentalstrahlen des Büschels (C') die beiden Geraden $x \mp 1 = 0$, die die Parabel in $P_1(x = 1, y = a_0 + a_1 + a_2)$ und $P_2(x = -1, y = a_0 - a_1 + a_2)$ schneiden, so sind die Gleichungen der Fundamentalstrahlen CP_1 und CP_2 des Büschels (C)

$$(a_1 + a_2)x - y + a_0 = 0, \qquad (a_1 - a_2)x - y + a_0 = 0.$$

Die Gleichungen der beiden Büschel (C) und (C') sind also

$$(2) \qquad \begin{cases} (a_1 + a_2)x - y + a_0 - \lambda[(a_1 - a_2)x - y + a_0] = 0, \\ x - 1 - \lambda'(x + 1) = 0. \end{cases}$$

Hierin ist noch λ' durch λ auszudrücken. Dazu benutze man ein beliebiges Paar sich entsprechender Strahlen, z. B. die Geraden $x = 0$ als Strahl des Büschels C und $x = \infty$ als Strahl des Büschels (C'). Um aus

(2) die Gleichung dieser beiden Strahlen zu erhalten, muß man $\lambda = 1$ und auch $\lambda' = 1$ setzen, woraus $\lambda' = \lambda$ folgt. Setzt man dies in (2) ein und eliminiert dann λ, so ergibt sich die Parabelgleichung (1). In den beiden Büscheln (2) sind die Büschelträger bekannt, nämlich C als gegebener Punkt und C' als unendlich entfernter Punkt der Geraden CDE; ebenso sind die Fundamentalstrahlen $C'A$ und $C'B$ des Büschels (C') bekannt. Die Punkte P_1 und P_2 und damit die Fundamentalstrahlen des Büschels (C) findet man durch folgende lineare Konstruktion:

$$(CX, AC') = H, \quad (HO, g_x) = J, \quad (DJ, AC') = K, \quad (OK, g_x) = L,$$
$$(EL, AC') = P_1;$$
$$(DB, g_x) = M, \quad (CM, BC') = N, \quad (ON, g_x) = Q, \quad (EQ, BC') = P_2.$$

Als dritten Strahl des Büschels (C) nehme man die Gerade BC, die die Parabel in F schneidet. Ihre Gleichung und die des entsprechenden Strahles $C'F$ ergeben sich aus (2), wenn man $\lambda = \frac{a_1 + a_2 - a_0}{a_1 - a_2 - a_0}$ setzt, nämlich

$$a_0 x - y + a_0 = 0, \qquad a_2 x - a_0 + a_1 = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man $(a_2 + a_0)x - y + a_0 = 0$, d. h. die Gleichung der Geraden DP_1, woraus hervorgeht, daß man den Punkt F als Schnittpunkt der Geraden BC und DP_1 findet.

Für die Gerade CX oder $y = a_0$ als Strahl des Büschels (C), die die Parabel (1) in G schneidet, findet man den entsprechenden Strahl $C'G$, dessen Gleichung $x = -\frac{a_1}{a_2}$ ist, durch folgende einfache lineare Konstruktion:

$$(BE, g_x) = R, \quad (DR, OX) = S, \quad (C'S, CX) = G.$$

Prenzlau, 15. August 1905. W. Stegemann.

Dritte Lösung. — Aus der gegebenen Parabelgleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ folgt:

$$\frac{y - a_0}{x} = \frac{a_1 + a_2 x}{1} = \lambda,$$

worin λ einen variabeln Parameter bedeutet. Wir erhalten die beiden Strahlenbüschel

$$y = \lambda x + a_0 \quad \text{und} \quad x = \frac{\lambda - a_1}{a_2},$$

von denen das erste seinen Träger im Punkte $(0, a_0)$ und das zweite im unendlich fernen Punkte der y-Achse besitzt.

Drei aus den Angaben leicht konstruierbare Strahlenpaare dieser Büschel erhalten wir durch die Annahmen $\lambda = 0,\ a_1,\ -a_1$, nämlich

$$\begin{array}{rl|ll} \lambda = & 0 & y = a_0\,, & x = -\frac{a_1}{a_2} \\ = & a_1 & y = a_1 x + a_0, & x = 0 \\ = & -a_1 & y = -a_1 x + a_0, & x = -\frac{2a_1}{a_2}. \end{array}$$

Aussig, Böhmen. stud. math. Josef Krug.

Zu **130** (Bd. IX, S. 303) (A. Krug). — Die Eckpunkte des konvexen n-Ecks seien $A_1, A_2, \ldots A_n$. Die beliebige, von A_1 ausgehende Diagonale $A_1 A_k$ wird von denjenigen Diagonalen innerhalb des n-Ecks geschnitten, deren Endpunkte auf verschiedenen Seiten von $A_1 A_k$ liegen. Nun liegen auf der einen Seite die Eckpunkte $A_2, A_3, \ldots A_{k-1}$, also $k-2$ Eckpunkte, auf der andern Seite die Eckpunkte $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots A_n$, also $n-k$ Eckpunkte; mithin wird die Diagonale $A_1 A_k$ innerhalb des n-Ecks von den übrigen Diagonalen in $(k-2)(n-k)$ Punkten geschnitten. Vom Punkte A_1 gehen die Diagonalen $A_1 A_3, A_1 A_4, \ldots A_1 A_{n-1}$ aus; demnach ist die Anzahl aller innerhalb des n-Ecks liegenden Schnittpunkte der von A_1 ausgehenden Diagonalen mit den übrigen Diagonalen

$$\sum_{k=3}^{k=n-1} (k-2)(n-k).$$

Dieselbe Zahl ergibt sich für jeden andern Eckpunkt, so daß man im ganzen diese Summe n mal erhält. Dann ist aber jeder Schnittpunkt bei jedem Endpunkte der beiden Diagonalen, die sich in ihm schneiden, also vierfach gezählt worden; daher ist die wirkliche Anzahl N_1 der hier in Betracht kommenden Schnittpunkte

$$N_1 = \frac{n}{4} \sum_{k=3}^{k=n-1} (k-2)(n-k).$$

Es ist nun

$$\sum_{k=3}^{k=n-1} (k-2)(n-k) = 1\cdot(n-3) + 2\cdot(n-4) + 3\cdot(n-5) + \cdots + (n-4)\cdot 2 + (n-3)\cdot 1$$

$$= (1+2+3+\cdots+[n-3])n - (1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + [n-4][n-2] + [n-3][n-1])$$

$$= \frac{n(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} - ([2^2-1] + [3^2-1] + \cdots + [(n-2)^2-1])$$

$$= \frac{n(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + 1 + n - 3$$

$$= \frac{n-2}{1\cdot 2\cdot 3}(3n[n-3] - [n-1][2n-3] + 6)$$

$$= \frac{n-2}{1\cdot 2\cdot 3}(n^2 - 4n + 3) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Mithin
$$N_1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \binom{n}{4}.$$

Die Diagonale $A_1 A_k$ teilt das n-Eck in zwei Polygone, in ein k-Eck und ein $(n-k+2)$-Eck, die zu beiden Seiten von $A_1 A_k$ liegen. Die Diagonale $A_1 A_k$ wird in ihrer Verlängerung von den Verlängerungen aller derjenigen Diagonalen der beiden genannten Polygone getroffen, die keinen Endpunkt in A_1 oder in A_k haben. Die Gesamtzahl der Diagonalen des k-Ecks ist $\frac{1}{2}k(k-3)$; davon geht ab die Zahl $2(k-3)$ derjenigen Diagonalen, die von A_1 und A_k ausgehen; die entsprechenden Zahlen für das $(n-k+2)$-Eck sind $\frac{1}{2}(n-k+2)(n-k-1)$ und $2(n-k-1)$. Die Anzahl der auf der Verlängerung der Diagonale $A_1 A_k$ liegenden Diagonalenschnittpunkte ist also

$$\tfrac{1}{2}k(k-3) - 2(k-3) + \tfrac{1}{2}(n-k+2)(n-k-1) - 2(n-k-1)$$
$$= \frac{(k-3)(k-4)}{1\cdot 2} + \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{1\cdot 2} = \binom{k-3}{2} + \binom{n-k-1}{2};$$

demnach ist die Anzahl der auf den Verlängerungen sämtlicher von A_1 ausgehenden Diagonalen des n-Ecks liegenden Schnittpunkte

$$\sum_{k=3}^{k=n-1}\left[\binom{k-3}{2}+\binom{n-k-1}{2}\right]=2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n-4}{2}\right]=2\binom{n-3}{3}.$$

Nimmt man dies für jeden Eckpunkt des n-Ecks, so ist wieder, wie vorhin, jeder Schnittpunkt viermal gezählt worden; daher hat man für die Anzahl N_2 der außerhalb des n-Ecks liegenden Diagonalenschnittpunkte

$$N_2=\frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{3}.$$

Bezeichnet man mit N_3 die Anzahl der Schnittpunkte derjenigen Diagonalen, die sich in den Ecken des konvexen n-Ecks schneiden, so ist

$$N_3=n\cdot\binom{n-3}{2},$$

wenn man jeden Eckpunkt, weil sich in ihm $n-3$ Diagonalen schneiden, als $\binom{n-3}{2}$-fachen Punkt zählt. Unter derselben Voraussetzung hat man, wenn m die Anzahl sämtlicher Diagonalen des n-Ecks und N die Anzahl ihrer Schnittpunkte ist,

$$N=\binom{m}{2}.$$

Da nun $N=N_1+N_2+N_3$ ist, so gilt die Gleichung

$$\binom{m}{2}=\binom{n}{4}+\frac{n}{2}\binom{n-3}{3}+n\binom{n-3}{2}.$$

Dies läßt sich leicht bestätigen, wenn man für $\binom{m}{2}$ seinen Wert, nämlich

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-3)\left[\frac{1}{2}n(n-3)-1\right]}{1\cdot 2}=\frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2)$$

setzt. Denn es ist

$$\binom{n}{4}+\frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{3}+n\cdot\binom{n-3}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)+2n(n-3)(n-4)(n-5)+12n(n-3)(n-4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$=\frac{n(n-3)(3n^2-9n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2).$$

Prenzlau. W. Stegemann.

2. Anfragen und Antworten.

Zu **22.** (8, 331). Vergleiche: A. Fleck, „Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen"; Sitz.-Ber. der Berliner Math. Ges. **5**, 2—9; sowie A. Fleck, „Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen"; Archiv (3) **10**, 23—38. — Danach ist jede positive ganze Zahl durch höchstens 13 positive Kuben und durch höchstens 39 Biquadratzahlen darstellbar; ferner läßt sich jede quadratische (Landau) *und* biquadratische (Fleck) binäre Form als Summe von höchstens 5 Quadraten ganzer Funktionen darstellen.

Potsdam, 4. Februar 1906. Otto Meissner.

Digitized by Google

3. Kleinere Notizen.

Die Aufgabe, einen Würfel durch einen andern durchzuschieben.

Betrachtet man die isometrische Projektion des Würfels, die ja ein reguläres Sechseck ist, so drängt sich die Aufgabe auf, durch einen gegebenen Würfel einen andern durchzuschieben. Man braucht zu diesem Zwecke nur dem Sechseck ein Quadrat einzubeschreiben[1]), das sich dann in der Richtung der isometrischen Projektion d. h. parallel zur Würfeldiagonale durchschieben läßt, wobei der Würfel nur zwei Gegenecken verliert, ohne also auseinanderzufallen. Eine kleine Rechnung ergibt als Maximum für den in der isometrischen Projektionsrichtung durchgeschobenen Würfel als Kantenlänge:

$$s = a\,[\sqrt{6} - \sqrt{2}]$$

wobei a die Kantenlänge des gegebenen Würfels ist; ausgerechnet erhält man $s = 1{,}0353 \cdot a$; der durchgeschobene Würfel ist somit größer als der umgebende.

Prinz Rupert oder Robert aus dem Hause der rheinischen Pfalzgrafen stellte, wie van Swinden in seinen Elementen der Geometrie berichtet[2]), die Aufgabe, den größten unter allen möglichen durchschiebbaren Würfeln zu finden; diese Aufgabe löste Peter Nieuwland, ehemals Professor in Leiden. Van Swinden gibt sie in seinen Elementen wieder[3]), jedoch in einer seiner Zeit entsprechenden, für unsere mathematische Sprache schwer verständlichen Darstellungsweise. Da sich in bekannteren Werken nirgends eine Lösung dieser lehrreichen Aufgabe findet, auf welche uns Herr Professor Dr. Doehlemann in seinen Übungen zur darstellenden Geometrie aufmerksam machte, sei es gestattet, im folgenden auf andere Weise das Maximum kurz abzuleiten:

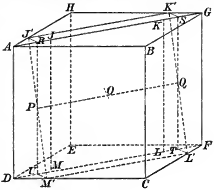


Fig. 1.

Denkt man sich in der Diagonalebene $AGFD$ des gegebenen Würfels $ABCDEFGH$ (Figur 1), dessen Kante a sein möge, das Quadrat $IKLM$ mit der Seitenlänge a symmetrisch zum Würfelmittelpunkt O liegend, so läßt sich dasselbe um PQ parallel IK durch O als Achse drehen, ohne den Würfel zu durchschneiden, denn seine Ecken kommen sofort in das Innere des Würfels zu liegen. Man kann deshalb die Seite des Quadrats vergrößern und dadurch für jede beliebige, bis zu einer gewissen Grenze gehende

1) vgl. Müller-Presler, Leitfaden der Projektionslehre Ausgabe A; S. 155.
2) I. H. van Swindens Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi. Jena 1834; S. 394.
3) ebenda S. 542.

Digitized by Google

Drehung um PQ erreichen, daß die neuen Ecken und damit zwei Seiten wieder auf die Würfeloberfläche zu liegen kommen; dabei beschreiben die Ecken des Quadrats auf den beiden Gegenflächen des Würfels eine Hyperbel, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + ax - y^2 = 0.$$

(I Anfangspunkt und IA x-Achse des Koordinatensystems.)

Bei dieser Wanderung kommen einmal die Ecken des Quadrats auf die Würfelkanten zu liegen. Die bezüglichen Punkte seien I', K', L', M'. Bezeichnet man dann die Projektion des Quadrats $I'K'L'M'$ auf die Diagonalebene $AGFD$ mit $RSTU$ und den Schnittpunkt von RU und der oben erwähnten Drehungsachse mit P, so gilt:

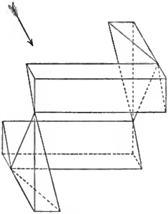


Fig. 2.

Dreieck ARI' gleichschenklig und rechtwinklig bei R,

Dreieck PRI' rechtwinklig bei R,

$$I'P = \tfrac{1}{2}x; \quad RP = \tfrac{1}{2}a;$$

$$AR = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}x = I'R.$$

Somit $\overline{I'R}^2 + \overline{RP}^2 = \overline{I'P}^2$;

d. h. $[\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}x]^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 = (\tfrac{1}{2}x)^2$,

woraus $x = \tfrac{3}{4}a\sqrt{2} = 1{,}060660 \cdot a.$

Schiebt man dieses Quadrat $I'K'L'M'$ senkrecht zu seiner Fläche durch den Würfel, so verliert letzterer nur die Ecken B und E. Dabei ist zu bemerken, daß die Durchschiebrichtung durchaus nicht mit der Richtung der isometrischen Projektion identisch ist d. h. parallel zur Diagonale BE des Würfels, sondern mit derselben einen Winkel von $15^0\, 47'\, 36''$ einschließt. Die Kanten werden bei der Durchdringung nach rationalen Verhältnissen geteilt, nämlich $3:1$ und $3:13$.

Ein Modell dieser Durchdringung, welche Figur 2 veranschaulicht, haben wir für die mathematische Sammlung der Universität München hergestellt.

München. cand. math. F. Koch und I. Reisacher.

Berichtigung einer Arbeit von Herrn E. T. Whittaker (Messenger (2), 31, 145—148).

A. a. O. findet sich ein Fehler, der, wenn auch leicht zu erkennen, doch vielleicht eine kurze Berichtigung verdient. Es handelt sich um die Darstellung von automorphen Funktionen durch unendliche Produkte. Unter der Voraussetzung, daß z, α zwei Punkte in demselben Gebiet A, und z_n, α_n ihre Transformierten in dem Gebiet A_n sind, betrachtet Herr W. das Produkt

$$F(z, \alpha) = (z - \alpha) \prod_n \frac{z - \alpha_n \cdot \alpha - z_n}{z - z_n \cdot \alpha - \alpha_n}\, e^{\frac{z - \alpha \cdot z_n - \alpha_n}{z - z_n \cdot \alpha - \alpha_n}},$$

wo von jedem Paar entgegengesetzter Indices immer nur einer zu nehmen ist. Da stets, auch bei der allgemeinsten Beschaffenheit des Gebietes A, $\sum_n (z_n - \alpha_n)^2$ konvergiert, so ist auch das Produkt $F(z,\alpha)$ in den regulären Punkten absolut konvergent. Nicht richtig dagegen ist die Behauptung, daß $F(z,\alpha)$ eine automorphe Funktion sei. Dies zu beweisen hätte Herr W. die Funktion $F(z_m,\alpha)$ bilden und ihre Übereinstimmung mit $F(z,\alpha)$ zeigen müssen. Er bildet aber statt dessen die Funktion $F(z_m,\alpha_m)$, die natürlich gleich $F(z,\alpha)$ ist, da die beiden Punkte z und α gleichzeitig nur in ein anderes Gebiet A_m verlegt werden. Herr W. würde den Fehler sofort erkannt haben, wenn er ebenso mit der Weierstraßschen σ-Funktion verfahren wäre, auf deren Analogie mit $F(z,\alpha)$ er selbst aufmerksam macht.

In dem speziellen Falle, wo schon $\sum_n (z_n - \alpha_n)$ konvergiert, tritt an Stelle des obigen das einfachere Produkt

$$(1) \qquad \Phi(z,\alpha) = (z-\alpha) \prod_n \frac{z-\alpha_n \cdot \alpha - z_n}{z - z_n \cdot \alpha - \alpha_n},$$

das zuerst Herr Schottky (Journal für Math. 101. S. 227 ff.) betrachtet hat, und auf das auch leicht die Poincarésche Theorie führt. Die Funktion (1) reproduziert sich beim Übergang von z in z_m in der Weise, daß

$$(2) \qquad \Phi(z_m,\alpha) : \Phi(z,\alpha) = \sqrt{\frac{d z_m}{d z}}\, \frac{1}{E_{mm}}\, \frac{E_m(\alpha)}{E_m(z)}.$$

Die Funktionen $\log E_m(z)$ spielen hier die Rolle der Integrale erster Gattung. Aus (2) folgt, daß eine automorphe Funktion mit r 0^1 Punkten $\alpha, \ldots, \alpha^r$ und r ∞^1 Punkten $\beta^1, \ldots, \beta^r$ (wenn $r > p$, d. h. größer als das Geschlecht des Gebietes A) von der Form ist

$$(3) \qquad \frac{\Phi(z,\alpha^1)\ldots\Phi(z,\alpha^r)}{\Phi(z,\beta^1)\ldots\Phi(z,\beta^r)},$$

und daß die p Bedingungsgleichungen zwischen den $2r$ Punkten α und β (unter vereinfachenden Voraussetzungen) lauten

$$\sum_{i=1}^{r} [\log E_m(\alpha^i) - \log E_m(\beta^i)] = 0 \qquad (m = 1, \ldots, p).$$

Für die Funktion $F(z,\alpha)$ dagegen gibt es keine Reproduktionsgleichung von der Form (2) und keine Darstellung der automorphen Funktionen von der Form (3), wie schon aus der Poincaréschen Theorie folgt. —

Tübingen, Sept. 1905. Hermann Stahl.

Eine Verallgemeinerung der v. Staudtschen projektiven Koordinaten.

Wegen seiner Kürze und prägnanten Fassung sei es erlaubt, einfach aus v. Staudt zu zitieren: „Durch vier in einerlei Ebene liegende Punkte A, B, C, C_1, von welchen keine drei einer und derselben Geraden angehören, ist ein ebenes Koordinatensystem (A, B, C, C_1) bestimmt. Jeder *außerhalb der Geraden* CC_1 *liegende* Punkt P der Ebene ist durch die Geraden bestimmt, welche ihn aus den Punkten C_1, C projizieren. Die Werte der

Digitized by Google

Würfe $C_1(ABCP)$, $C(ABC_1P)$ sind die Koordinaten des Punktes P in Hinsicht auf das erwähnte System." (Beitr. zur Geom. der Lage, II. § 29. 411, pag. 266).

Für die Punkte der Geraden CC_1 ist also eine besondere Koordinatenbestimmung notwendig.[1]) Ganz ähnlich entziehen sich der v. Staudtschen Koordinatenbestimmung im Raume die Punkte von der Ebene der Projektionsachsen, oder allgemeiner, wenn man diese Projektionsachsen nicht in einer Ebene, sondern ganz beliebig annimmt, die Punkte eines einschaligen Hyperboloids. (Siehe l. c. § 29. 412, pag. 267). Man bedarf in dieser Ebene bezw. für die Punkte dieses Hyperboloids gleichfalls einer besonderen Koordinatenbestimmung.

Diese Anomalie wird vermieden, wenn man z. B. in der Ebene statt *zwei* Strahlenreihen *erster Klasse*, deren Strahlen CP und CP_1 den Punkt P bestimmen, *eine* (nicht degenerierte) Strahlenreihe *zweiter Klasse* dem Koordinatensystem zugrunde legt.

Zu jedem Punkte P der Ebene gehören aus der Strahlenreihe zweiter Klasse zwei Strahlen p_1 und p_2, die durch P gehen; und diese bestimmen wieder eindeutig den Punkt P. Man kann also als Koordinaten des Punktes die Werte der zwei Würfe (abp_1c) und (abp_2c) annehmen, welche p_1 und p_2 mit drei fixierten Strahlen a,b,c der Reihe bilden. Eine Ausnahme bilden nur die Punkte des einhüllenden Kegelschnittes der Strahlenreihe zweiter Klasse. Für diese bekommen wir nur einen Strahl $\bar{p}$, aber dennoch eine vollständige Koordinatenbestimmung, indem der Strahl $\bar{p}$ doppelt zu rechnen ist, und so beide Koordinaten gleich, und zwar gleich dem Werte des Wurfes $(ab\bar{p}c)$ sind. Das ganz duale Koordinatensystem erhält man, wenn man auf dem einhüllenden Kegelschnitt die Berührungspunkte A,B,C der Tangenten a,b,c fixiert, und einen beliebigen Strahl p der Ebene durch die Werte der Würfe (ABP_1C) und (ABP_2C) charaktèrisiert, wo P_1 und P_2 die Schnittpunkte des Strahles p mit dem Kegelschnitte bezeichnen.

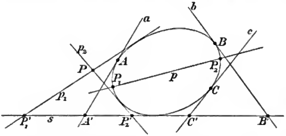
Ganz ähnlich läßt sich die v. Staudtsche Koordinatenbestimmung auch im Raume verallgemeinern, wenn man die drei Projektionsachsen (l. c. § 29. 411, 412; pp. 266—267) als eine degenerierte Raumkurve dritter Ordnung auffaßt. Man wird in diesem Falle also eine nichtdegenerierte Raumkurve dritter Ordnung dem Koordinatensystem zugrunde legen. Von einer ausführlichen Entwicklung kann man aber hier umsomehr absehen, da man diese Koordinatensysteme auch aus der so zu sagen unmittelbar gegebenen projektiven Koordinatenbestimmung in einem eindimensionalen Raume direkt als Anwendungen des Hesseschen Übertragungsprinzips (Crelle Journal Bd. 66, pp. 15—21) erhalten kann. Bei dieser Auffassung unseres Koordinatenprinzips ist es sogleich klar, daß es auch für Räume von beliebigen Dimensionen anwendbar ist, wir wollen daher darauf näher eingehen.

Es sei also eine lineare Punktreihe s gegeben, mit den fixen Punkten A',B',C'. Ein beliebiger Punkt P' der Punktreihe ist durch den Wert des Wurfes $(A'B'P'C')$ bestimmt. Das Hessesche Übertragungsprinzip läßt die Punkte der Ebene den Punktepaaren dieser Reihe entsprechen. Und

1) Durch die Einführung der (Fiedlerschen) *homogenen* Koordinaten wird dem dadurch genüge geleistet, daß im Koordinatendreieck eigentlich *drei* gleichberechtigte v. Staudtsche Koordinatensysteme gegeben sind, von denen immer wenigstens eins nicht versagt.

Digitized by Google

zwar geometrisch läßt sich diese eindeutige Entsprechung folgendermaßen statuieren: man legt einen Kegelschnitt zugrunde, welcher den Träger der Punktreihe berührt; dann vermitteln die zwei Tangenten p_1, p_2, welche aus einem beliebigen Punkte P der Ebene zum Kegelschnitt laufen, die gegenseitig eindeutige Entsprechung der Punkte P und der Punktepaare P_1', P_2'. (Den Punkten des Kegelschnittes entsprechen Doppelpunkte in der Punktreihe.) Das Punktepaar P_1', P_2' ist durch die Werte der Würfe $(A'B'P_1'C')$ und $(A'B'P_2'C')$ charakterisiert; diese aber sind gleich denen der Würfe (abp_1c) und (abp_2c), wo a, b, c die zweiten Tangenten aus den Punkten A', B', C' der Tangente s bezeichnen. Die Koordinaten, zu denen man so durch das Hessesche Übertragungsprinzip gelangt, sind also dieselben, welche wir oben



in bezug auf das System, gebildet durch den Kegelschnitt mit den fixen Tangenten a, b, c, erhielten. — Bemerkenswert dürfte es noch sein, daß durch letztere Formulierung die etwaige Konstruktion einer projektiven Skala (so wie z. B. in F. Klein: *Nicht-Euklidische Geometrie* betrachtet ist) auf dem Kegelschnitt reduziert wird auf die Konstruktion einer solchen auf der Geraden

Diese Verallgemeinerung der projektiven Koordinaten will natürlich in erster Reihe nur theoretisches Interesse beanspruchen, doch dürfte es in gewissen Fällen auch in praktischer Hinsicht Vorteile bieten. Diesbezüglich sei erlaubt darauf hinzuweisen, daß man sie im Dienste spezieller Zwecke, aber ohne allgemeine projektive Fassung in der Literatur vorfinden kann. So ist z. B. bei Hurwitz (*Über die Reduktion der binären quadratischen Formen.* Math. Ann. Bd. 45, pag. 85) die Charakterisierung der Punkte eines Kreises durch den „Parameter λ" und die der Punkte außerhalb des Kreises durch die Parameterwerte λ_1 und λ_2, welche den Schnittpunkten seiner Polare mit dem Kreise entsprechen, nichts anderes als ein spezieller Fall der obigen Koordinaten.

Nagy-Várad (Ungarn), November 1904. Aladár Visnya.

Über eine besondere isothermische Spiegelung.

Den Begriff der isothermischen Spiegelung als der konformen Abbildung einer Spiegelung gegen die Gerade setze ich als bekannt voraus, ebenso den der Bizirkularspirale oder logarithmischen Doppelspirale, die als isogonale Trajektorie eines Kreisbüschels oder als stereographische Projektion

Digitized by Google

der gewöhnlichen oder verallgemeinerten Kugelloxodrome betrachtet werden kann. Aus ihr lassen sich die Inversionsverwandten der Röhrenfläche der logarithmischen Spirale (mit veränderlicher Kugel) ableiten. (Über diesen Gegenstand schrieb ich zuerst in der Zeitschr. für Math. u. Physik XIV, 1871, später in Crelles Journal und in der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, auch im Bd. III meiner Stereometrie, Leipzig bei Göschen.)

Die isothermische Spiegelung gegen die Bizirkularspirale *beliebigen* Schnittwinkels γ ist eine ziemlich allgemeine Operation insofern, als sie auch die Spiegelung gegen die gewöhnliche *logarithmische Spirale, die Kreisinversion*, die Spiegelung gegen die Gerade als besondere Fälle einschließt. Trotz des transzendenten Charakters ist sie der elementaren Behandlung zugänglich. Daß Steiner auf den Gegenstand nicht eingegangen ist, liegt wohl daran, daß bei den Konstruktionen in der Regel ein transzendentes Element nur mit Annäherung gezeichnet werden kann. Von dort aus aber ist alles mit Zirkel und Lineal zu erledigen. Ebenso leicht und elegant läßt sich die analytische Formulierung ausgestalten, wie das folgende zeigt.

a) *Spiegelung gegen die Bizirkularspirale vom Schnittwinkel γ mit den Polen ± 1, die durch einen beliebigen Punkt $x = a = \dfrac{e^{a_1}+1}{e^{a_1}-1}$ der reellen Achse geht.*

Die Gleichung der spiegelnden Kurve ist

$$(1)\qquad \left(\lg \frac{p}{q}\right)\sin\gamma - (\varphi - \chi)\cos\gamma = a_1 \sin\gamma.$$

Die Radiivektores p und q gehen von den Punkten $x = \pm 1$ aus, φ und χ sind ihre Neigungswinkel. Das Spiegelungsgesetz der Geraden ergibt hier folgende Koordinatenbeziehungen:

$$(2)\qquad \lg \frac{P}{Q} = \left(\lg \frac{p}{q}\right)\cos 2\gamma + (\varphi - \chi)\sin 2\gamma + 2a_1 \sin^2\gamma = u,$$

$$(3)\qquad \Phi - X = \left(\lg \frac{p}{q}\right)\sin 2\gamma - (\varphi - \chi)\cos 2\gamma - 2a_1 \sin\gamma\cos\gamma = v.$$

Dabei kann man die großen und die kleinen Buchstaben mit einander vertauschen. Es entsprechen also einander in Bizirkularkoordinaten die Kurvenscharen:

$$(4)\qquad f\left[\lg \frac{P}{Q},\ (\Phi - X)\right] = 0$$

und

$$(5)\qquad f\left[\left(\lg \frac{p}{q}\cos 2\gamma + (\varphi-\chi)\sin 2\gamma + 2a_1\sin^2\gamma\right),\ \left(\lg \frac{p}{q}\sin 2\gamma - (\varphi-\chi)\cos 2\gamma - 2a_1\sin\gamma\cos\gamma\right)\right] = 0.$$

Aus (2) *und* (3) *ergibt sich, daß das Kreisbüschel durch* ± 1 *und die Orthogonalschar von Kreisen in zwei Orthogonalscharen von Bizirkularspiralen übergehen. Aus* (4) *und* (5) *folgt, daß jede Bizirkularspirale der zu* (1) *gehörigen Schar in ein anderes Individuum derselben Schar übergeht, jede der Orthogonalschar in sich selbst. Jede konpolare Doppelspirale geht in eine ebensolche über.* Die ganze Geometrie der Ebene geht durch diese Spiege-

Digitized by Google

lung in eine neue Geometrie über. Drückt man u und v in Cartesischen Koordinaten aus, so genügen beide identisch der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$. Die Ausdrücke u und v sind selbst isothermische Koordinaten mit allen physikalischen, kartographischen und sonstigen Beziehungen.

b) *Aufgabe. Durch welche Transformationsformel wird diese isothermische Spiegelung vermittelt?*

Aus

$$u_1 = \left(\lg \frac{p}{q}\right) \sin\gamma - (\varphi - \chi)\cos\gamma, \quad v_1 = \left(\lg \frac{p}{q}\right)\cos\gamma + (\varphi - \chi)\sin\gamma$$

folgt

$$u_1 + v_1 i = \left(\lg \frac{p}{q}\right)(\sin\gamma + i\cos\gamma) - (\varphi - \chi)(\cos\gamma - i\sin\gamma)$$

$$= i(\cos\gamma - i\sin\gamma)\lg\left[\frac{p}{q}\, e^{i(\varphi-\chi)}\right]$$

oder

$$u_1 + v_1 i = i(\cos\gamma - i\sin\gamma)\lg\frac{X + Yi - 1}{X + Yi + 1}.$$

Die allgemeine Transformationsformel für die Spiegelung gegen die Isothermen $u = k_1$ ist $U + Vi = 2k_1 - (u - vi)$, wobei u aus U und v aus V durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entsteht.

Sie geht hier über in

$$i(\cos\gamma - i\sin\gamma)\lg\frac{X + Yi - 1}{X + Yi + 1} = 2a_1\sin\gamma - \left[-i(\cos\gamma + i\sin\gamma)\lg\frac{x - yi - 1}{x - yi + 1}\right].$$

Daraus folgt leicht

$$\text{(6)} \qquad \frac{(X + Yi) - 1}{(X + Yi) + 1} = e^{-i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma + i\sin\gamma)} \cdot \left[\frac{x - yi - 1}{x - yi + 1}\right]^{\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma}.$$

Daraus folgt die gesuchte Transformation in der Form

$$\text{(7)} \qquad (X + Yi) = \frac{1 + e^{-i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma + i\sin\gamma)} \cdot \left[\frac{x - yi - 1}{x - yi + 1}\right]^{\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma}}{1 - e^{-i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma + i\sin\gamma)} \cdot \left[\frac{x - yi - 1}{x - yi + 1}\right]^{\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma}}.$$

c) Kombiniert man diese Spiegelung mit einem Umklappen um die reelle Achse, so braucht man auf der rechten Seite von (7) nur $+i$ mit $-i$ zu vertauschen. Dies gibt *die Funktion komplexen Arguments*

$$\text{(8)} \qquad Z = \frac{1 + e^{i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma - i\sin\gamma)} \cdot \left[\frac{z - 1}{z + 1}\right]^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma}}{1 - e^{i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma - i\sin\gamma)} \cdot \left[\frac{z - 1}{z + 1}\right]^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma}},$$

oder

$$\text{(8')} \qquad Z = \frac{(z+1)^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma} + (z-1)^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma} \cdot e^{i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma - i\sin\gamma)}}{(z+1)^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma} - (z-1)^{\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma} \cdot e^{i2a_1\sin\gamma(\cos\gamma - i\sin\gamma)}}.$$

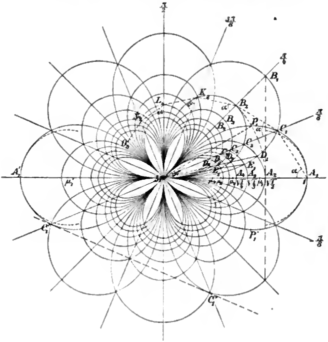
Das Ganze kommt also auf eine Funktion von der Gestalt

$$\text{(9)} \qquad Z = \frac{(z+1)^c + k(z-1)^c}{(z+1)^c - k(z-1)^c}$$

Digitized by Google

hinaus, wo k und c komplexe Konstanten sind. Die eingehende Untersuchung einer solchen Funktion bezw. konformen Abbildung bietet aber keine Schwierigkeit und ist ein einfaches Übungsspiel.

d) *Eigenschaften dieser Abbildung.* Sie ist *konform* und *involutorisch* und bedeutet eine *Abbildung der Ebene in sich*, woraus sich zahlreiche einzelne Beziehungen ableiten lassen. Charakterisiert ist sie durch die *Erhaltung der konpolaren Doppelspiralen* beliebigen Schnittwinkels[1]), wobei der letztere im allgemeinen geändert wird. Bei der Festhaltung der Pole ± 1 kann man die Spiegelung mit Umklappung um die reelle Achse, d. h. die



Transformation (8), mit Doppelspiralen von beliebigen Schnittwinkeln mehrfach wiederholen, dann kann man die Anfangsgebilde durch eine einzige Abbildung derselben Art in die Schlußgebilde überführen, d. h. man hat eine *Transformationsgruppe* im Sinne von Lie. Letzteres zeigt sich an der Transformation $Z = \frac{(z+1)^c + k(z-1)^c}{(z+1)^c - k(z-1)^c}$. Unterwirft man hier Z der Transformation derselben Art $\zeta = \frac{(Z+1)^{c_1} + k_1(Z-1)^{c_1}}{(Z+1)^{c_1} + k_1(Z-1)^{c_1}}$, so ist $\zeta = \frac{(z+1)^{cc_1} + k_1 k^{c_1}(z-1)^{cc_1}}{(z+1)^{cc_1} - k_1 k^{c_1}(z-1)^{cc_1}}$. Hier geben cc_1 und $k_1 k^{c_1}$ neue komplexe Konstanten, so daß die erste

1) Mit einem Kreisbüschel.

Funktion und die letzte von derselben Gestalt sind. Dies kann man beliebig oft wiederholen, stets leistet die zusammenfassende Abbildung derselben Form dasselbe, wie die Reihenfolge der vorangegangenen.

Diese Transformationsgruppe enthält die oft behandelte durch $Z = \frac{a + bz}{c + dz}$ dargestellte als besonderen Fall in sich und bedeutet eine erhebliche Erweiterung insofern, als die Exponenten komplexe Größen sind.

e) *Unterwirft man Gebilde, die gegen eine Doppelspirale beliebigen Schnittwinkels γ und mit beliebigen Polen $(a_1 + b_1 i)$ und $(a_2 + b_2 i)$ isothermische Spiegelbilder sind, einer beliebigen Kreisinversion,* so bleiben die Gebilde zusammengehörige Spiegelbilder gegen die neue logarithmische Doppelspirale, die aus der ersten entsteht. Ist einer der Pole Inversionszentrum, so entsteht aus der ersten Doppelspirale eine gewöhnliche logarithmische Spirale. Kennt man also das Spiegelungsgesetz für die letztere, so kennt man es auch für die erste.

Die Spiegelung gegen die gewöhnliche logarithmische Spirale wird durch die Funktion

$$X + Yi = (x - yi)^{\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma} \cdot e^{-a_1 i \sin\gamma(\cos\gamma + i \sin\gamma)} = f(x - yi)$$

vermittelt. Vergleicht man damit die Gleichung (6), so erkennt man die Formel

$$\frac{(X + Yi) - 1}{(X + Yi) + 1} = f\left[\frac{(x - yi) - 1}{(x - yi) + 1}\right],$$

woraus

$$(X + Yi) = \frac{1 + f\left[\frac{(x - yi) - 1}{(x - yi) + 1}\right]}{1 - f\left[\frac{(x - yi) - 1}{(x - yi) + 1}\right]}$$

folgt, so daß man sich alle Rechnungen ersparen kann. Entsprechendes gilt für die Abbildung mittels der Funktion komplexen Arguments.

Dies ist der analytische Ausdruck für das eben Gesagte, gilt aber weit allgemeiner in folgender Form.

Unterwirft man in einer konformen Abbildung $Z = f(z)$, die eine involutorische (also isothermische Spiegelung nebst Umklappung um die reelle Achse) sein soll, die beiden Variabeln derselben Transformation $Z_1 = f_1(Z)$, $z_1 = f_1(z)$, so entsteht die Gleichung $f_1(Z) = f[f_1(z)]$, die, nach Z oder z aufgelöst, eine neue Funktion $Z = f(z)$ oder $z = f(Z)$ gibt, die ebenfalls involutorisch ist und eine isothermische Spiegelung nebst Umklappung bedeutet. Die Wiederholung dieser Operationen gibt eine Transformationsgruppe, bei der der involutorische Charakter zu den Invarianten gehört. Auch dieser Satz erspart viele Rechnungen und führt synthetisch zu einer großen Anzahl lösbarer Spiegelungen.

f) *Besondere Fälle.* Erhebliche Vereinfachungen treten ein, wenn $\gamma = 45^0$ ist. Die Gleichung der spiegelnden Kurve ist dann $\lg\frac{p}{q} - (\varphi - \chi) = a_1$. Die Koordinatenbeziehungen werden

$$\lg\frac{P}{Q} = (\varphi - \chi) + a_1, \quad \Phi - X = \lg\frac{p}{q} - a_1.$$

Bei der Spiegelung gegen die logarithmische Doppelspirale zu 45^0 mit den Polen ± 1 entsprechen also einander die Kurven

$$f\left[\lg\frac{P}{Q},\ (\Phi - X)\right] = 0, \quad f\left[(\varphi - \chi + a_1)\left(\lg\frac{p}{q} - a_1\right)\right] = 0.$$

Die Kreise des Büschels durch ± 1 verwandeln sich in die Kreise der Schar. Jede Schar von Doppelspiralen beliebigen Schnittwinkels geht in die Orthogonalschar über. Die Spiegelungsformel wird

$$X + Yi = \frac{1 + e^{a_1(1-i)}\left[\frac{(x - yi) - 1}{(x - yi) + 1}\right]^i}{1 - e^{a_1(1-i)}\left[\frac{(x - yi) - 1}{(x - yi) + 1}\right]^i}.$$

Für die Kombination mit der Umklappung um die reelle Achse entsteht die Funktion komplexen Arguments

$$Z = \frac{(z-1)^i (a-1)^{1+i} + (z+1)^i (a+1)^{1+i}}{(z-1)^i (a-1)^{1+i} - (z+1)^i (a+1)^{1+i}} = \frac{(z-1)^i + (z+1)e^{a_1(1+i)}}{(z-1)^i - (z+1)e^{a_1(1+i)}}.$$

Noch weitere Vereinfachungen ergeben sich für $a = 0$ und $a = \infty$, d. h. für die Fälle, wo die spiegelnde Kurve durch den Nullpunkt oder den unendlich fernen Punkt geht.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich über die isogonalen Trajektorien aller Büschel und Scharen isothermischer Kurven anstellen, z. B. für die der konfokalen Lemniskaten zweiter und höherer (auch gebrochener) Ordnung, für die der konfokalen Ellipsen usw.

g) *Beiläufige Aufgabe. Konstruktion des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt P der Bizirkularspirale.*

Durch die Pole O und O_1 lege man den durch P gehenden Kreis (1). Man ziehe die Normale der Kurve für P und konstruiere den Kreis (2), der durch O_1 geht und die Normale in P berührt. Durch O und O_1 lege man den Kreis (3), der den Kreis (1) rechtwinklig schneidet. Dieser trifft den Kreis (2) (neben P) in einem Punkte Q. Die Gerade O_1Q gibt auf der Normalen den Krümmungsmittelpunkt. (O und O_1 können dabei vertauscht werden.)

Das einzige Transzendente dabei ist die Konstruktion der Normale, die jedoch als gegeben betrachtet werden kann, da die Kurve gerade durch ihren Schnittwinkel zu definieren ist. Alles andere erledigt sich elementar. Durch die transzendente Voraussetzung hat sich, wie gesagt, Steiner vermutlich abhalten lassen, auf diese Kurven und ihre interessanten Eigenschaften einzugehen und die besprochenen isothermischen Spiegelungen zu behandeln. Aus obigem erkennt man auch den Nutzen der Bizirkularkoordinaten, durch die sich die Formeln erheblich vereinfachen.

Die Zwischenrechnungen habe ich fast überall unterlassen, da sie einfach sind und in der in Vorbereitung befindlichen Neuauflage der „Isogonalen Verwandtschaften" veröffentlicht werden sollen.

Hagen i. W. G. Holzmüller.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

(Vacat.)

Digitized by Google

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures and condition of the institute for the year ending June 30, 1904. Washington 1905, government printing office. 804 S.

Benischke, G., Die Grundgesetze der Wechselstromtechnik. Heft 3 der Elektrotechnik in Einzeldarstellungen. Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn. X u. 141 S. ℳ 3,60.

Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Zweiter Teil: Unter-Tertia. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 0,80.

Börnstein, R., Leitfaden der Wetterkunde. 2. Aufl., Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. 230 S.

Böttger, R., Beiträge zur Geschichte und Methode des chemischen Unterrichts in der Volksschule. Leipzig 1906, B. G. Teubner 78 S. ℳ 1,40.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Band. 2. Auflage. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 560 S. ℳ 12.

Doehlemann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Sammlung Göschen Nr. 72. Leipzig 1905, Göschen. 179 S. ℳ 0,80.

Encyklopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. II_1, Heft 6: S. Pincherle, Funktionalgleichungen u. -Operationen. — Bd. V_1, Heft 3: F. W. Hinrichsen u. L. Mamlock, Chemische Atomistik nebst zwei Beiträgen von E. Study; Th. Liebisch, A. Schoenflies und O. Mügge, Kristallographie. — Bd. VI_1, Heft 1, C. Reinhertz, Niedere Geodäsie; S. Finsterwalder, Photogrammetrie. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I (quatrième volume): Calcul des probabilités. Théorie des erreurs Applications diverses — Paris 1906, Gauthier-Villars. 160 S.

Fassbinder, Ch., Théorie et pratique des approximations numériques. Paris 1906, Gauthier-Villars. 91 S. fr. 3.

Fischer, V., Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. Leipzig 1906, J. A. Barth. 108 S. ℳ 4,50.

Franz, J., Der Mond. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 90. 132 S. ℳ 1,25.

Garbasso, A., Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. Leipzig 1906, J. A. Barth. VIII u. 256 S. ℳ 8.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 256 S. ℳ 10.

Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. 3. Band: Differential- und Integralrechnung. Lieferung 5, 6, 7. Berlin 1905, F. L. Dames.

Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch. 19. Aufl. Abteil. 1, IX u. 1334; Abteil. 2, VI u. 926. Berlin 1905, Wilhelm Ernst & Sohn. ℳ 16.

Hyde, E. W., Grassmann's space analysis. 4. Aufl. New York 1906, J. Wiley & Sons. 58 S. $ 1.

Issaly, Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces. Paris 1902, A. Hermann. 107 S. fr. 4.

Jäger, G., Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Heft 12 aus „Die Wissenschaft". Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. 121 S.

Jamin, J., Cours de physique. 3e supplément par Bouty: Radiations, électricité, ionisation. Paris 1906, Gauthier-Villars. fr. 8.

Koppe-Diekmann, Geometrie für Realanstalten. 1. Teil der Planimetrie, Stereometrie u. Trigonometrie. 7. Aufl. v. K. Knops. Essen 1906, G. D. Baedeker. 256 S. ℳ 2,40.

Krause, H., Maschinenelemente. Berlin 1905, J. Springer. 241 S. ℳ 5.

Lesser, O., Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Berlin 1906, O. Salle. 121 S. ℳ 1,60.

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. Erster Band. Erste Lieferung. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 10.

Macfarlane, A., Vector analysis and quaternions. 4. Aufl. New York 1906, J. Wiley & Sons. 50 S. $ 1.

Mahler, G., Ebene Geometrie. Sammlung Göschen Nr. 41. Leipzig 1905, Göschen. 166 S. ℳ 0,80.

Mangelsdorf, E., Eine neue Abbildung des linearen Strahlenkomplexes auf dem Punktraum. Inaug.-Diss. Straßburg 1906. 32 S.

Mathematische Unterrichtsbriefe; herausgegeben von H. Wiltz. Als Manuskript gedruckt. Straßburg i. E. 1906, Wolstein u. Teilhaber. je ℳ 1,50.

Matthiessen, L., Das Potential eines Ringes auf den Mittelpunkt eines Querschnitts. Publikationen des astron.-meteorolog. Obs. Rostock 1905. 15 S.

Maurer, H., Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in bildlicher Darstellung. 3360 Aufgaben in 4 Bänden. 1. Band enthaltend die Aufgaben 1—840. Zürich 1906, E. Speidel. M. 2,50.
Mayer, J. W., -Czap, E., Die praktische Wartung der Dampfkessel und Dampfmaschinen. 3. Aufl. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 190 S. M. 3,50.
Mellor, J. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. In freier Bearbeitung der zweiten englischen Ausgabe. Herausgegeben v. A. Wogrinz u. A. Szarvassi. Berlin 1906, J. Springer. 411 S. M. 8.
Metz, G. de, La double réfraction accidentelle dans les liquides. Scientia Nr. 26. Paris 1906, Gauthier-Villars. 99 S. fr. 2.
Mitteilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg. Band IV, Heft 6. Redigiert von Hoppe, Schröder und Busche. Leipzig 1906, B. G. Teubner. S. 225—276.
Möller, M., Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Wien 1906. A. Hölder. M. 0,90.
Müller, F., Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 86 S. M. 2,80.
Neumayer, G. v., Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. In zwei Bänden. Dritte Auflage. Band I, Bogen 29 bis 35, Band II, Bogen 28 bis 34: Lieferung 9—10; Band I, Bogen 36 bis 42, Band II, Bogen 35 bis 41: Lieferung 11—12. Hanover 1906, M. Jänecke.
Nowicki, R., und Mayer, Hans, Flüssige Luft. Die Verflüssigungsmethoden der Gase und die neueren Experimente auf dem Gebiete der flüssigen Luft. 2. Auflage. M. Ostrau 1906, R. Papauschek. 59 S.
Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. In zwei Bänden. Erster Band, erste Hälfte. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 306 S. M. 7.
Planck, M., Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906, A. Barth. 222 S. M. 7,80.
Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 519 S. M. 16.
Poincaré, H., Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1906, B. G. Teubner. M. 4,80.
Ratschläge für d. Studierenden d. mathem. Disziplinen an d. Universität Kiel. 1906.
Roessler, G., Fernleitung von Wechselströmen. Berlin 1905, J. Springer. 243 S. M. 7.
Saltykow, N., Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonctin inconnue. Kiev 1905. 266 S.
Schellhorn, O., Planimetrische Beweise mit Anhang: Algebraische Regeln. Essen 1906, Baedeker. 114 S. M. 1,60.
Simon, M., Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht d. Deutschen Mathematikervereinigung. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 276 S.
Simon, M., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 108 S. M. 3,20.
Tannery, J., Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. Paris 1906, Gauthier-Villars. Tome premier. VII u. 423 p., fr. 12; tome second 636 p., fr. 12.
Tesar, L., Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 128 S.
Thomae, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 183 S. M. 3,60.
Wachtel, A., Anwendung der Graphostatik im Maschinenbau mit besonderer Berücksichtigung der statisch bestimmten Achsen und Wellen. Hannover 1906, Dr. M. Jänecke. 146 S. M. 4,40.
Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. Aus Natur und Geisteswelt. Zweite Auflage. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 120 S.
Wilde, H., Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion. Sammlung Göschen Nr. 274. Leipzig 1906, Göschen. 163 S. M. 0,80.
Zahikjanz, G., Die Theorie, Berechnung und Konstruktion der Dampfturbinen. Berlin 1906, M. Krayn. 179 S. M. 7,50.
Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendungen. II. Teil. Sammlung Schubert. Bd. 51. 252 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. M. 8.
Zühlke, P., Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Progr. Oberrealsch. Charlottenburg. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 46 S.

Digitized by Google

Inhalt der Bände 1—10 der dritten Reihe.

I. Abhandlungen.

Appell, Paul, à Paris. Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles. **1,** 69—71.

— Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels. **4,** 20—21.

— Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables. Extrait d'une lettre à M. M. Krause. **4,** 292—293.

— Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. **5,** 177—179.

Bauer, Michael, in Budapest. Zur Theorie der arithmetischen Progression. **5,** 274—277.

— Über einen Satz von Kronecker. **6,** 218—219.

— Über Kreisteilungsgleichungen. **6,** 220.

— Über zusammengesetzte Körper. **6,** 221—222.

Beyel, Christian, in Zürich. Über Axonometrie und schiefe Parallelprojektionen. **4,** 237—251.

Biermann, Otto, in Brünn. Über die zweifachen Punkte von Flächen. **5,** 245—257.

Bromwich, T. J. I'A., in Cambridge. On the potential of a single sheet. **2,** 294—297.

Budde, Emil, in Berlin. Die Tantallampe der Firma Siemens und Halske. **10,** 9—15.

Cantor, Moritz, in Heidelberg. Über die älteste indische Mathematik. **8,** 63—72.

Cappilleri, A., in Reichenberg i. B. Graphische Ermittlung des Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte einer Kegelschnittslinie. **8,** 49—50.

†**Caspary, Ferdinand,** in Charlottenburg. Zur neueren Dreiecksgeometrie. **1,** 143—158, 269—288.

Cesàro, Ernest, à Naples. Fonctions continues sans dérivée. **10,** 57—63.

Cwojdziński, Kasimierz, in Zürich. Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks. **1,** 175—180.

— Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene, sowie Punkten und Ebenen im Raume. **5,** 118—122; **9,** 8—10.

Czuber, Emanuel, in Wien. Über Einhüllende von Kurven und Flächen. **2,** 113—122.

Daniëls, François, in Freiburg (Schweiz). Analytische Sphärik in homogenen Koordinaten. **5,** 261—273.

Darboux, Gaston, à Paris. Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions. **1,** 34—37.

Doležalek, Friedrich, und **Ebeling, August,** in Berlin. Untersuchungen über telephonische Fernleitungen Pupinschen Systems. **6,** 26—35.

Dücker, W. v., in Berlin. Eine Aufgabe aus der Kinematik. **8,** 151—156.

Eckhardt, Ernst, in Homburg v. d. H. Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der biquadratischen Gleichung ohne Auflösung der Gleichung. **7,** 87—101.

— Der Gauß-Lemoinesche Punkt im Kreisviereck. **9,** 329—340.

Edalji, I., Gujarat College, Ahmedabad. Hyperbolic Functions. **9,** 266—273.

Digitized by Google

Emde, Fritz, in Berlin. Der Charakter der Betriebskurven eines Gleichstrommotors mit Nebenschlußerregung. **5,** 123—145.

Epstein, Paul, in Straßburg i. E. Raumkurven und Liniengeometrie. **10,** 15—22.

Fischer, Otto, in Leipzig. Physiologische Mechanik. **7,** 110—123.

Fitting, F., in München-Gladbach. Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe. **3,** 136—151.

Fleck, Albert, in Berlin. Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen. **10,** 23—38.

Funck, Rudolf, in Obercassel. Die Konfiguration (15_6, 20_3), ihre analytische Darstellung und ihre Beziehung zu gewissen algebraischen Flächen. **2,** 78—107.

Gehrcke, E., in Berlin. Über neuere Fortschritte in der Konstruktion stark auflösender Spektralapparate. **5,** 216—228.

— Über elektrische Wellen. **9,** 150—157.

Gleichen, Alexander, in Berlin. Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei Knochenfischen. **1,** 238—245.

— Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre. **10,** 227—233.

Graf, Heinrich, in Bern. Entwicklung der Funktion Log $\Gamma(a)$ nach fallenden Potenzen des Argumentes. **4,** 230—236.

Greenhill, Alfred George, in Woolwich (London). Applications of the elliptic integral of the third kind. **1,** 72—76.

Großmann, Louis, in Hamburg. Neue Beziehungen aus dem Gebiete der Binomialkoeffizienten. **3,** 14—15.

Großmann, Marcel, in Frauenfeld (Schweiz). Metrische Eigenschaften reziproker Bündel. **9,** 143—150.

Güntsche, Richard, in Berlin. Beiträge zur Geometrographie I, II, III. **3,** 191—194; **6,** 133—146; **9,** 253—266.

Guldberg, Alf, in Christiania. Über lineare homogene Differenzengleichungen. **8,** 278—281.

Gundelfinger, Siegmund, in Darmstadt. Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf sechs Arten perspektivisch liegen. **1,** 252—254.

— Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare. **1,** 255—256.

— Über eine fundamentale kubische Gleichung der Theoria motus corp. coel. von Gauß. **5,** 146—148.

Guradze, Hans, in Berlin. Räumliche geometrische Verwandtschaften und Systeme. **4,** 288—292.

Gutsche, Oskar, in Breslau. Über den Zusammenhang einer bei der Lösung von Alhazens Aufgabe auftretenden gleichseitigen Hyperbel mit der neueren Dreiecksgeometrie. **5,** 84—86.

Haentzschel, Emil, in Berlin. Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraßsche Normalform mit Hilfe einer Hermiteschen Substitution. **1,** 118—123.

— Rotationszykloiden und Laméssche Produkte. **4,** 57—65.

— Bemerkung zu der Notiz des Herrn Safford: Rotation Cyclids and Lamé's Products. **10,** 238.

Haller, Stanislaus, in Freising. Untersuchung der Brennpunktskurve eines Kegelschnittbüschels mit besonderer Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse. **7,** 37—76.

†Hamburger, Meyer, in Berlin. Neue Ableitung der Kugelfunktionen. **2,** 43—48.

— Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. **3,** 177—186.

Haskell, Mellen Woodman, in Berkeley (California). Generalization of a fundamental theorem in the geometry of the triangle. **5,** 278—281.

Hayashi, F., in Tokyo. An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers. **1,** 246—247.

— On some Theorems concerning with Prime Numbers. **1,** 248—251.

Digitized by Google

Hayashi, F., in Tokyo. On the remainders of the numbers of triangle of Pascal with respect to a prime number. **5**, 67—69.
— On reciprocal eqnations. **8**, 192—194.
Heffter, Lothar, in Kiel. Zur Theorie der Resultanten zweier linearen homogenen Differentialgleichungen. **8**, 124—131.
Hensel, Kurt, in Marburg. Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes. **1**, 319—322.
— Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen. **2**, 293—294.
†Hermite, Charles, à Paris. Extrait d'une lettre à M. E. Jahnke. **1**, 20—21.
— Sur une équation transcendante. **1**, 22—26.
Hertzer, H., in Halensee-Berlin. Periode des Dezimalbruches für $1/p$, wo p eine Primzahl. **2**, 249—252.
Herzog, Josef, in Budapest und **Feldmann, Clarence**, in Delft. Über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze (Transfiguration). **10**, 282—299.
Hessenberg, Gerhard, in Grunewald. Über Beweise von Schnittpunktsätzen. **3**, 121—123.
— Desarguesscher Satz und Zentralkollineation. **6**, 123—127.
Heumann, C., in Stockholm. Zur Theorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie. **6**, 283—301.
— Über einige Krümmungseigenschaften bei abwickelbaren Flächen und bei Kegelkurven. **6**, 302—305.
Heun, Karl, in Karlsruhe. Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen. **2**, 57—77, 298—326.
Hilbert, David, in Göttingen. Mathematische Probleme. **1**, 44—63, 213—237.
Horn, Jacob, in Clausthal. Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst successiver Annäherungen. **4**, 213—230.
— Reelle periodische Lösungen einer Differentialgleichung. **8**, 237—245.
— Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. **10**, 1—8.
Hurwitz, Adolf, in Zürich. Über höhere Kongruenzen. **5**, 17—27.
Isenkrahe, Caspar, in Trier. Neue Lehrsätze über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. **3**, 257—260.
Jahnke, Eugen, in Berlin. Bemerkungen zur Notiz von Herrn stud. K. Cwojdziński. **1**, 181—183.
— Charles Hermite. **1**, 184—186.
— Auszüge aus drei Briefen Steiners an Jacobi. **4**, 268—277.
— Schreiben Jacobis an den Staatsminister v. Eichhorn betreffend Jakob Steiner. **4**, 277—280.
— Brief von Leverrier an Jacobi. **5**, 37—40.
— Brief von Liouville an Jacobi. **5**, 41.
— Elementare Herleitung der Formeln für die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze durchsichtiger isotroper Körper. **7**, 278—286.
Janisch, Eduard, in Prag. Bemerkungen zu einem Theorem des Herrn Cwojdziński. **2**, 153—154.
Jolles, Stanislaus, in Halensee-Berlin. Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde. **1**, 91—98.
— Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes. **2**, 327—341.
— Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. **4**, 100—116.
Jonas, H. J., in Stettin. Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche. **8**, 281—284.

Digitized by Google

Jourdain, Philip E. B. (Broadwindsor, Dorset, England). The Development of the Theory of Transfinite Numbers. **10,** 254—281.
Jung, F., in Prag. Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. **6,** 206—209.
Kantor, S., in Wien. Über differentiale Transformationen. **6,** 202—206.
Kapteyn, Willem, à Utrecht. Sur l'équation différentielle de Monge. **9,** 313—329; **10,** 39—44.
Klein, Felix und **Wieghardt, Karl,** in Göttingen. Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. **8,** 1—10, 95—119.
Klug, Leopold, in Klausenburg. Synthetischer Beweis eines Satzes von K. Doehlemann. **8,** 157—161.
Kneser, Adolf, in Breslau. Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäßigsten Gestalt der Geschoßspitzen. **2,** 267—278.
— Die Entwicklung willkürlicher Funktionen in Reihen, die nach Besselschen Funktionen fortschreiten. **7,** 123—133.
Knoblauch, Johannes, in Berlin. Auszug aus einem Briefe an Herrn E. Jahnke. **5,** 290—291.
Koehler, Carl, in Heidelberg. Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades. **3,** 21—33, 94—111.
— Geometrische Kriterien für die projektive Einteilung der nicht entarteten Kurven und Flächen zweiter Ordnung. **6,** 95—103.
Kohn, Gustav, in Wien. Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl. **4,** 312—316.
Kokott, Paul, in Neisse. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen in geometrischer Form. **3,** 226—242.
— Die wiederholte Anwendung der Landenschen Transformation. **6,** 231—237.
— Eine geometrische Herleitung der linearen Transformation der elliptischen Funktionen. **7,** 76—78.
Kommerell, Victor, in Reutlingen. Ein Satz über geodätische Linien. **1,** 116—117.
— Gleichung und Eigenschaften der Röhrenflächen. **3,** 1—13.
Kostka, Carl, in Insterburg. Zur Bildung der symmetrischen Funktionen **10,** 50—55.
Kraus, J., in Darmstadt. Über die Algorithmen von der Form $\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k\alpha_\lambda$. **9,** 11—21.
Krause, Martin, in Dresden. Zur Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Größen **1,** 64—68.
— Über die Bernoullischen Funktionen zweier veränderlicher Größen. Auszug eines Schreibens an Herrn P. Appell. **4,** 293—295.
— Zur Theorie der MacLaurinschen Summenformel. **5,** 179—184.
Krause, Rudolf, in Straßburg i. E. Über senäre Raumkollineationen. **9,** 22—29.
Kühne, Hermann, in Dortmund. Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit. **4,** 300—311.
— Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit. **6,** 251—260.
Kürschák, Josef, in Budapest. Anwendung der komplexen Zahlen zum Beweise eines elementargeometrischen Satzes. **8,** 285—286.
Laisant, Charles Ange, à Paris. Polygones semi-réguliers dans l'ellipse. **1,** 257—261.
Lampe, Emil, in Berlin. Nachruf auf Reinhold Hoppe. **1,** 4—19.
— Auszüge aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold. **1,** 38—43.
— Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind. **2,** 253—256.
— Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. **4,** 130—133.

Digitized by Google

Lampe, Emil, in Berlin. Bemerkung zu einer Note des Herrn S. Gundelfinger. **5,** 148—150.

— Zur Bestimmung der extremen Werte einer Funktion, wenn die unabhängige Veränderliche auf ein begrenztes Gebiet beschränkt ist. **8,** 133—134.

Landau, Edmund, in Berlin. Über einen zahlentheoretischen Satz. **1,** 138—142.

— Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$. **5,** 86—91.

— Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades. **5,** 92—103.

— Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. **7,** 271—277.

— Über einen Satz von Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. **10,** 45—50.

Landsberg, Georg, in Breslau. Über eine Permutationsaufgabe. **3,** 152—154.

Lehmann-Filhés, Rudolf, in Berlin. Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. **2,** 124—128.

Lemoine, Emile, à Paris. Principes de la Géométrografie ou Art des constructions géométriques. **1,** 99—115, 323—341.

— Transformation continue dans le triangle. **3,** 243—249.

— Transformation continue dans le tétraèdre. **3,** 249—256.

Lerch, Mathias, in Freiburg (Schweiz). Über den Kroneckerschen Beweis der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel. **6,** 85—94.

Levi-Civita, Tullio, à Padoue. Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface. **5,** 28—37.

Liebmann, Heinrich, in Leipzig. Winkel- und Streckenteilung in der Lobatschefskijschen Geometrie. **5,** 213—215.

Lilienthal, Reinhold v., in Münster i. W. Sätze über Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß. **5,** 205—213.

— Zur Note des Herrn J. Knoblauch: Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln. **5,** 289.

— Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen der Ebene. **6,** 35—46.

Loewy, Alfred, in Freiburg i. B. Zur Gruppentheorie. **5,** 257—260.

London, Franz, in Bonn. Der Iterationswurf einer ebenen Kollineation. **7,** 200—225.

Loria, Gino, à Gênes. Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions. **2,** 257—266.

Ludwig, Walter, in Karlsruhe. Über die „ϑ-Kurven" des einmanteligen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides. **3,** 217—225.

Lummer, Otto, in Breslau. Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes. **1,** 77—90.

— Notiz zu meinem Aufsatz: „Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes". **2,** 155—156.

— Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre praktische Verwendung. **2,** 157—170; **3,** 261—281; **8,** 227—234.

Maennchen, Philipp, in Alzey. Ein neues Schließungsproblem. **4,** 296—298.

— Elementarer Beweis des Schließungsproblems beim Kegelschnittbüschel. **6,** 209—211.

— Neue Schließungsprobleme. **7,** 226—232.

— Einfacher Beweis und Verallgemeinerung eines Steinerschen Satzes. **7,** 232—235.

Majcen, Georg, in Agram (Kroatien). Über eine einfache konstruktive Ermittelung der cyklischen Ebenen für Kegel und Zylinder. **2,** 289—292.

— Neue Beiträge zur Dreiecksgeometrie. **4,** 299.

— Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie. **4,** 76—99.

Mansion, Paul, à Gand. Démonstration d'un théorème de Legendre. **2,** 123.

Digitized by Google

Maßfeller, A., in Montabaur. Eine einfache Lösung des Appollonischen Berührungsproblems in der Ebene. **8,** 189—190.

Matthiessen, Ludwig, in Rostock. Goniometrische Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade mittels der Formel für die Tangente des vielfachen Winkels. **2,** 108—112

— Von der Periodizität der Kettenbrüche, in welche sich Irrationale zweiten Grades entwickeln lassen. **5,** 47—55.

— Auflösung quadratischer Gleichnngen mit mehreren Unbekannten mittels Determinanten. **9,** 357—360.

Maurer, L., in Tübingen. Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten. **6,** 1—26, 260—283.

Meyer, Eugen, in Charlottenburg. Über eine Eigenschaft des Kettenbruches $x - \frac{1}{x - \frac{1}{x \cdots}}$. **5,** 287—288.

Meyer, W. Franz, in Königsberg i. Pr. Ergänzungen zum Fermatschen und Wilsonschen Satze. **2,** 141—146.

— Zu der Mitteilung des Herrn M. W. Haskell über die Verallgemeinerung eines Steinerschen Satzes. **5,** 282—287.

— Über den Ptolemäischen Satz. **7,** 1—15.

— Über die Höhen des Tetraeders. **8,** 135—150.

— Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik. **8,** 287—305.

— Über Partialbruchzerlegung bei vielfachen Linearfaktoren des Nenners. **10,** 239—247.

Milan, P., in Krenznach. Beitrag zur Untersuchnng des erkenntnistheoretischen Wertes der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen. **9,** 157—171, 345—357.

Miller, George A., in Stanford Univ. Cal. The gronps generated by two operators which have a common square. **9,** 6—7.

Mittag-Leffler, Gösta Magnus, in Stockholm. Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe. **2,** 49—54.

Müller, Emil, in Wien. Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder. **2,** 129—136.

— Ein Übertragungsprinzip des Herrn E. Study. **5,** 104—118.

Müller, Richard, in Berlin. Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung. **1,** 166—174.

— Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte. **2,** 342—344.

Naetsch, Emil, in Dresden. Über ein in der Vektor-Analysis auftretendes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. **5,** 56—67.

Nernst, Walter, in Berlin. Über die Bedeutung elektrischer Methoden und Theorien für die Chemie. **2,** 171—184.

Netto, Eugen, in Gießen. Notiz über die Kreisteilungspolynome. **4,** 65—67.

— Einige kombinatorische Probleme. **5,** 185—196.

Neuberg, Joseph, in Lüttich. Die Verwandtschaft zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt in Bezug auf ein Dreieck. **3,** 89—93.

— Kegelschnitte aus der Dreiecksgeometrie. **4,** 281—287.

Nielsen, Niels, in Kopenhagen. Sur la fonction gamma. **6,** 223—231.

d'Ocagne, Maurice, à Paris. Etude élémentaire du conoïde de Plücker. **1,** 159—165.

— Über einige elementare Grundgedanken der Nomographie. **5,** 70—84.

Opitz, Hans, in Berlin. Über die Auflösnng der transzendenten Gleichung $\int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!(2\lambda+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **5,** 42—46.

Oster, B., in Mannheim. Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. **4,** 44—50.
Pampuch, Andreas, in Straßburg i. E. Die 32 Lösungen des Malfattischen Problems. **8,** 36—49.
Pasch, Moritz, in Gießen. Über die Einführung des Imaginären. **7,** 102—108.
Pexider, Wilhelm, in Göttingen. Über symmetrische Funktionen von unabhängigen Variablen. **6,** 46—59.
Phragmén, Edvard, à Stockholm. Sur les termes complémentaires de la série de Taylor, dus à Cauchy et à Lagrange. **2,** 55—56.
Picard, Emile. Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Noether. **1,** 209—212.
Pringsheim, Alfred, in München. Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern. **4,** 1—19.
Pringsheim, Ernst, in Breslau. Über die Strahlung der Gase. **1,** 289—309.
— Über Brechung und Dispersion des Lichtes auf der Sonne. **4,** 316—330.
— Über die Strahlungsgesetze. **7,** 236—253, 296—308.
Rehfeld, E., in Elberfeld. Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen. **6,** 237—248.
Reye, Theodor, in Straßburg i. E. Lehrsätze über quadratische Strahlenkomplexe. **6,** 1.
— Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren. **9,** 217—220.
Riecke, Eduard, in Göttingen. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. **8,** 29—35; **9,** 1—6, 245—253.
Ripert, Léon, à Paris. Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle. **1,** 310—318.
— Construction géométrographique des axes d'une ellipse dont on connait, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués. **3,** 54.
Rotth, August, in Berlin. Physikalische Probleme der Gleichstrommaschine. **3,** 34—53.
Saalschütz, Louis, in Königsberg i. Pr. Unabhängige Darstellung der Mac-Mahonschen symmetrischen Funktionen. **4,** 123—127.
— Der Rest der Arcussinus-Reihe für $x = 1$. **5,** 196—204.
— Die Potenzen der Kotangente und der Kosekante. **6,** 128—133.
— Zur Bildung der symmetrischen Funktionen. **9,** 113—143.
— Zur Lehre von den quadratischen Resten. **9,** 220—230.
— Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn Kostka in Insterburg: Zur Bildung der symmetrischen Funktionen. **10,** 56—57.
Safford, F. H., in Philadelphia. Rotation Cyclids and Lamé's Products. **10,** 234—237.
Schaefer, Clemens, in Breslau. Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen. **10,** 113—137.
Schafheitlin, Paul, in Berlin. Über die Nullstellen der Besselschen Funktion zweiter Art. **1,** 133—137.
Scheffers, Georg, in Darmstadt. Zusammenhang zwischen der Abwicklung eines Kreiszylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung. **6,** 249—250.
†Schell, Wilhelm, in Karlsruhe. Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung. **5,** 4—9.
Schlesinger, Ludwig, in Klausenburg. Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen. **1,** 262—268.
— Über geodätische Krümmung. **5,** 242—245.
Schoeler, Heinrich, in Berlin. Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal. **4,** 128—129.

Digitized by Google

Schoenflies, Arthur, in Königsberg i. Pr. Bemerkung zur Theorie der elliptischen Funktionen. **8,** 234—237.

Schoute, P. Henri, in Groningen. Über die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der von $n+2$ Räumen R_{n-1} eingeschlossenen Polytope des Raumes R_n. **7,** 78—86.

Schubert, Hermann, in Hamburg. Gleichgewichtsbedingungen für vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken. **2,** 279.

Schultz, Ernst, in Stettin. Die überzähligen willkürlichen Konstanten in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung. **10,** 165—177.

Schüßler, Rudolf, in Graz. Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren. **2,** 1—42.

Schwering, Karl, in Köln. Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3+y^3+z^3+v^3=0$. **2,** 280—284.

— Anwendung des Abelschen Theorems auf die Lösung der diophantischen Gleichungen $x^3+Ay^3=z^3$ und $x^3+y^3=z^2$. **2,** 285—288.

Segre, Corrado, à Turin. Sur la génération projective des surfaces cubiques. **10,** 209—215.

Simon, Max, in Straßburg i. E. Zur Geschichte der regulären Sternpolyeder. **7,** 109.

Sintzow, Dimitry, in Ekaterinoslaw. Über eine Funktionalgleichung. **6,** 216—217.

Spieß, O., in Basel. Über eine Eigenschaft der binären quadratischen Formen. **9,** 340—344.

— Einige Integralsätze. **10,** 248—253.

Stäckel, Paul, in Hannover. Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen. **2,** 240—248.

— Zur nichteuklidischen Geometrie. **3,** 187—188.

— Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. **4,** 68—73.

— Über ein in der Optik auftretendes bestimmtes Integral. **8,** 245—246.

Stahl, Hermann, in Tübingen. Bemerkungen zur Theorie der Abelschen Funktionen. **6,** 177—201; **7,** 15—36.

Staude, Otto, in Rostock. Über die Bedingungen der Kreisschnitte der Flächen 2. Ordnung. **7,** 183—199.

— Bemerkung über das Kegelschnittbüschel. **8,** 51—53.

— Über die Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung. **9,** 230—244.

Steinitz, Ernst, in Charlottenburg. Die Geraden der Reyeschen Konfiguration. **1,** 124—132.

Stéphanos, Cyparissos, à Athènes. Remarques sur la théorie des forces centrales. **2,** 147—152.

Sterneck, Robert v., in Czernowitz. Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in sechs Summanden. **3,** 195—216.

†**Studnička, Franz Joseph,** in Prag. Beitrag zur Lehre von den reziproken Gleichungen. **3,** 16—20.

Study, Eduard, in Bonn. Über das sogenannte Prinzip von der Erhaltung der Anzahl. **8,** 271—278.

Sturm, Rudolf, in Breslau. Über einen vermeintlich richtigen Satz von Gergonne. **5,** 9—10.

— Über Umformungen von Maximal- und Minimalfiguren. **5,** 11—16.

— Luigi Cremona. **8,** 11—29; 195—213.

— Einige Bemerkungen zu den Elementen der Differential- und Integralrechnung. **8,** 130—133.

— Über die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel. **10,** 216—226.

Sumec, J. K., in Brünn. Der einphasige Induktionsmotor. **8,** 306—323.

Tachauer, A., in Gunzenhausen. Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden. **6,** 60—84.

Digitized by Google

Teixeira, Francisco Gomes, à Porto. Sur la courbe équipotentielle. **3,** 132—135.
— Sur quelques intégrales définies. **9,** 30—33.
Thieme, H., in Posen. Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung. **10,** 137—150.
Thienemann, Wilhelm, in Essen. Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder. **4,** 50—57.
— Zwei Gruppen gleichkantiger Vielflache mit nur vierkantigen Ecken. **6,** 212—215.
Vahlen, Theodor, in Greifswald. Über kubische Konstruktionen. **3,** 112—120.
Vivanti, Giulio, in Messina. Übersicht der Theorie der Gleichungen vom fünften Grade. **8,** 53—63, 120—130.
Vries, Jan de, in Utrecht. Zur Einführung in die normalen Koordinaten. **9,** 33—36.
Wallenberg, Georg, in Charlottenburg. Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke. **4,** 252—268.
— Über Beziehungen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihren ersten Ableitungen. **10,** 151—164.
Weber, Eduard v., in München. Zur Geometrie der Kreise im Raum. **7,** 286—295.
Weber, Heinrich, in Straßburg. Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen. **4,** 193—212.
Weingarten, Julius, in Freiburg i. B.. Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetigen Funktionen des Ortes unterworfen sind, und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung. **1,** 27—33.
— Über einen Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. **2,** 233—239.
— Über eine Aufgabe der Mechanik. **5,** 1—4.
— Über die Lehrsätze Castiglianos. **8,** 183—192.
Weinnoldt, Ernst, in Kiel. Über die Konstruktion der Isophengen auf Flächen 2. Ordnung. **4,** 22—43.
Wellstein, Joseph, in Straßburg i. E. Über die Frobeniusschen Kovarianten einer Bilinearform. **5,** 229—241.
Westphal, W., in Marburg. Über die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen Konstanten, insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusammenhang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen. **9,** 36—47.
Wilson, Edwin Bidwell, in New Haven (Conn.) The so-called foundations of geometry. **6,** 104—122.
Wölffing, Ernst, in Stuttgart. Über eine besondere Klasse transzendenter Kurven. **4,** 117—123.
Zemplén, Győző, in Budapest. Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles. **8,** 214—226.
Zindler, Konrad, in Innsbruck. Über die Torsion der geodätischen Linien durch einen Flächenpunkt. **2,** 137—140.
†Züge, Heinrich, in Linden. Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. **4,** 73—76.

II. Rezensionen.

Abel, N. H., Über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Leipzig 1900, Engelmann. Von M. Cantor, **3,** 62.
— Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Leipzig, B. G. Teubner. Von E. Lampe, **8,** 162.
Abhandlungen zur Geschichte der math. Wiss. 14—15. Heft. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **6,** 166; 312.
Abraham. Recueil d'expériences élémentaires de physique. Paris 1904, Gauthier-Villars. Von H. Samter, **9,** 68.

Abraham, M. Theorie der Elektrizität. I. Bd. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von A. H. Bucherer, **10**, 93.

Ahrens, W. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von P. Schafheitlin, **3**, 66.

Alasia, C. I complementi di geometria elementare. Milano 1903, U. Hoepli. Von C. Färber, **7**, 259.

Alexandroff, J. Problèmes de géométrie élémentaire. Paris 1899, A. Hermann. Von E. Jahnke, **1**, 191.

— Dasselbe ins Deutsche übers. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, **10**, 81.

Amodeo, F. Aritmetica particolare e generale. Napoli 1900, L. Pierro. Von M. Cantor, **3**, 168.

Andoyer, H. Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. Paris 1900, Gauthier-Villars. Von Th. Vahlen, **4**, 136.

— Théorie de la lune. Paris 1902, C. Naud. Von E. Aschkinass, **5**, 312.

Annuaire pour l'an 1902, 1903, 1904. Paris, Gauthier-Villars. Von E. Jahnke, **5**, 163; **6**, 172; **10**, 81.

Annuaire des Mathématiciens 1901—1902. Paris 1902, C. Naud. Von E. Jahnke, **6**, 322.

Arnold, E. Die Wechselstromtechnik. Berlin 1902, J. Springer. Von R. Richter, **9**, 290.

Astronomischer Kalender für 1903, 1904, 1905. Wien, C. Gerold's Sohn. Von E. Jahnke; H. Kühne; E. Kullrich, **7**, 161; **9**, 180; **10**, 82.

Auerbach, F. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von H. Samter, **6**, 317; E. Jahnke, **7**, 254.

Aufseß, Otto Freiherr von und zu. Die physikalischen Eigenschaften der Seen. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. Von H. Samter, **10**, 320.

Autenheimer, F. Elementarbuch der Diff.- und Int.-Rechnung. Leipzig 1901, B. F. Voigt. Von A. Kneser, **3**, 299.

Baire, René. Leçons sur les fonctions discontinues. Paris 1905, Gauthier-Villars. Von A. Schoenflies, **10**, 325.

Bardey, E. Aufgabensammlung. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von Habenicht, **3**, 71.

— Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von C. Faerber; Habenicht, **3**, 70; 71.

— Algebraische Gleichungen. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **4**, 331.

Bauer, G. Vorlesungen über Algebra. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Kühne, **9**, 55.

Baule, A. Lehrbuch der Vermessungskunde. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von A. Börsch, **8**, 166.

Bebber, van. Anleitung zur Aufstellung von Wettervorhersagen. Braunschweig 1901, Vieweg u. Sohn. Von H. Samter, **4**, 346.

Benischke, G. Elektrotechnik in Einzeldarstellungen, Heft 3. Braunschweig 1903, Vieweg u. Sohn. Von. J. W. Lorenz, **7**, 163.

Berliner. Lehrbuch der Experimentalphysik in elementarer Darstellung. Jena 1903, G. Fischer. Von H. Samter, **8**, 78.

Bernhard, M. Darstellende Geometrie. Stuttgart 1901, H. Enderlen. Von E. Müller, **4**, 343.

Bibliotheca mathematica, Bd. II. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von F. Engel, **2**, 345.

Binder. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des chemischen Unterrichts an deutschen Mittelschulen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Samter, **9**, 70.

Bjerknes, V. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig 1900, J. A. Barth. Von F. Pockels, **3**, 159.

Blochmann, R. Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von A. Koepsel, **8**, 326.

Block, C. Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **10**, 180.

Bochow, K. Grundsätze und Schemata für den Rechenunterricht. Berlin 1898, O. Salle. Von E. Jahnke. **1**, 189.

Böger, R. Ebene Geometrie der Lage. Leipzig 1900, Göschen. Von C. Beyel, **3**, 63.

— Elemente der Geometrie der Lage. Leipzig 1900, Göschen. Von C. Beyel, **3**, 65.

Bohnert, F. Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig 1900, Göschen. Von R. Fricke, **2**, 351.

— Elementare Stereometrie. Leipzig 1902, Göschen. Von E. Kullrich, **6**, 327.

Bolte, F. Die Nautik in elementarer Behandlung. Stuttgart 1900, J. Mayer. Von H. Kühne, **3**, 165.

Boltzmann, L. Über die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1903, Hirzel. Von E. Jahnke, **9**, 247.

Bolza, Oskar. Lectures on the Calculus of Variations. Chicago 1904. Von C. Carathéodory, **10**, 183

Borel, E. Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901, Gauthier-Villars. Von M. Krause, **3**, 295.

— Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902, Gauthier-Villars. Von M. Krause, **5**, 308.

— Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von H. Kühne, **9**, 375.

— Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris 1905, Gauthier-Villars. Von M. Krause, **10**, 323.

— Algèbre. Paris 1904, Armand Colin. Von E. Netto, **10**, 326.

Bork-Nath. Mathematische Hauptsätze. Leipzig 1903—1905, Dürr. Von E. Kullrich, **8**, 247; **10**, 82.

Börnstein, R. Leitfaden der Wetterkunde. Braunschweig 1901, Vieweg u. Sohn. Von H. Samter, **4**, 345.

— Schul-Wetterkarten. Berlin 1902, D. Reimer. Von H. Samter, **6**, 148.

Börsch, H. und **Krüger, L.** Lotabweichungen. Berlin 1902, P. Stankiewicz. Von Ph. Furtwängler, **9**, 63.

Bragstad, O. S. Beitrag zur Theorie und Untersuchung von mehrphasigen Asynchronmotoren. Stuttgart 1902, F. Enke. Von F. Emde, **8**, 73.

Brauer, E. A. Springende Logarithmen. Karlsruhe 1901, C. Braun. Von A. Börsch, **8**, 161.

Braunmühl, A. v. Vorl. über die Gesch. der Trigonometrie. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **6**, 328.

Breusing, A. Steuermannskunst. Leipzig 1902, Heinsius. Von F. Bradhering, **5**, 160.

Brillouin, M. Propagation de l'électricité. Paris 1904, A. Hermann. Von G. Herglotz, **9**, 280.

Brioschi, F. Opere matematiche I. Milano 1901, U. Hoepli. Von E. Jahnke, **4**, 163.

Brückner, M. Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache. Zwickau 1897, R. Zückler. Von E. Jahnke, **1**, 187.

— Vielecke und Vielflache. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, **2**, 208.

Bruns, H. Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von M. Simon, **9**, 363.

Digitized by Google

Burg, Dr. **Robert.** Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen. Frankfurt a. M. 1905, Franz Benjamin Auffarth. Von A. Leman, **10,** 317.

Burkhardt, H. Funktionentheoretische Vorlesungen II. Leipzig 1899, Veit u. Comp. Von M. Krause, **1,** 197.

Bützberger, F. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit vielen Aufgaben und Anwendungen für Gymnasien und technische Mittelschulen. Zürich 1904, Orell Füssli. Von E. Kullrich, **10,** 187.

Cahen, E. Eléments de la théorie des nombres. Paris 1900, Gauthier-Villars. Von G. Landsberg, **3,** 69.

Cantor, M. Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von W. Ahrens, **7,** 146.

Cauchy, A. L. Bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. Hrsg. von P. Stäckel. Leipzig 1900, Engelmann. Von M. Cantor, **3,** 62.

Cellérier, Ch. Cours de mécanique. Paris 1892, Gauthier-Villars. Von K. Heun, **10,** 79.

Cesàro, E. Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsch von G. Kowalewski. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von G. Hessenberg, **4,** 167.

— Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von G. Holzmüller, **10,** 300.

Chwolson, O. D. Lehrbuch der Physik. Braunschweig 1902, Vieweg u. Sohn. Von E. Aschkinass, **9,** 286.

Classen, Fr. J. Mathematische Optik. Leipzig 1901, Göschen. Von A. Gleichen, **10,** 85.

Czuber, E. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von B. Oster, **9,** 51.

Dacqué. Wie man in Jena naturwissenschaftlich beweist. Stuttgart 1904, M. Kielmann. Von H. Samter **9,** 67.

Darwin, G. H. Ebbe und Flut. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Aschkinass, **6,** 319.

Dehn, M. Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von E. Müller, **4,** 158.

Deter, J. Mathematisches Formelbuch. Berlin 1899, M. Rockenstein. Von E. Jahnke, **1,** 195.

Dickson, L. E. Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von A. Loewy, **4,** 333.

Diekmann, J. Koppes Geometrie. Essen 1902, G. D. Bädeker. Von H. Willgrod, **5,** 156.

Doehlemann, K. Projektive Geometrie. Leipzig 1901, Göschen. Von E. Müller, **6,** 163.

— Geometrische Transformationen I. Leipzig 1902, Göschen. Von E. Müller, **8,** 253.

Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik. Stuttgart 1903, Fr. Grub. Von H. Samter, **8,** 80.

Dudensing, W. Über die durch eine allgemeine dreigliedrige algebraische Gleichung definierte Funktion. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von L. Heffter, **8,** 327.

Duporcq, E. Premiers principes de géométrie moderne. Paris 1899, Gauthier-Villars. Von E. Jahnke, **1,** 196.

Dziobek, O. Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Berlin 1900, H. Th. Hoffmann; II. Braunschweig 1902, A. Graff. Von R. Müller, **2,** 205; **6,** 152.

Emde, F. Die Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen. Von E. Orlich, **9,** 55.

Enriques, F. Questioni riguardanti la geometria elementare etc. Bologna 1900, N. Zanichelli. Von E. Jahnke, **2,** 209.

Enriques, F. Vorlesungen über projektive Geometrie. Übers. v. H. Fleischer. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Liebmann, **9**, 64.
Exner, F., und **Haschek,** E. Wellenlängen-Tabellen für spektralanalyt. Unters. Leipzig 1902—1904, F. Denticke. Von E. Aschkinass, **6**, 323; **9**, 289.
Faraday, M. Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. Hrsg. von A. J. v. Oettingen. Ostwalds Klass. Nr. 126 und Nr. 128. Von E. Pringsheim, **7**, 148.
Fehr, H. Application de la méthode vectorielle de Graßmann à la géométrie infinitésimale. Paris 1899, G. Carré et C. Naud. Von V. Schlegel, **2**, 198.
Fenkner, H. Arithmetische Aufgaben. Berlin 1901, O. Salle. Von H. Opitz, **3**, 159.
— Lehrbuch der Geometrie. Berlin 1903, O. Salle. Von E. Kullrich, **9**, 77.
— Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Berlin 1904, Otto Salle. Von E. Kullrich, **10**, 189.
Ferraris, G. Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Leipzig 1901 B. G. Teubner. Von A. Rotth, **6**, 155.
Festschrift zur Erinnerung an **Joannes Bolyai.** 1902. Von E. Jahnke, **7**, 255; 313.
— Ludwig **Boltzmann** gewidmet. Leipzig 1904, Barth. Von O. Lummer, **9**, 279.
Fischer, K. T. Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von P. Johannesson, **5**, 164.
— Der naturwissenschaftliche Unterricht in England. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von E. Pringsheim, **6**, 332.
Fischer, O. Der Gang des Menschen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, **9**, 66.
Fitting. Das Rösselsprungproblem in neuer Behandlung. Leipzig 1904, G. Fock. Von Fitting, **9**, 62.
Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig 1899—1900, B. G. Teubner. Von J. Weingarten, **1**, 342.
— Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten. Von A. Föppl, **1**, 352.
— Bemerkungen zur Entgegnung des Herrn Föppl. Von J. Weingarten, **2**, 190.
— Erwiderung auf die vorstehenden Bemerkungen des Herrn Weingarten. Von A. Föppl, **2**, 193.
— Die Mechanik im neunzehnten Jahrhundert. München 1902, E. Reinhardt. Von E. Jahnke, **6**, 150.
— Graphische Statik. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von G. Hessenberg, **6**, 157.
Forsyth, A. R. Theory of differential equations. Cambridge 1902. Von L. Heffter, **4**, 166; **7**, 155.
Fort, O. und **Schlömilch, O.** Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von P. Zühlke, **10**, 186.
Foth, R. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrößen-Lehre. Hannover 1899, C. Meyer. Von E. Jahnke, **1**, 191.
Fouët, A. Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Paris 1902 —1904, Gauthier-Villars. Von G. Kowalewski, **9**, 73; H. Liebmann, **10**, 309.
— Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Seconde partie. Paris 1904. Von Heinrich Liebmann, **10**, 309.
Freycinet, C. A. De l'expérience en géométrie. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von M. Simon **7**, 259.
Fricke, R. Kurzgefaßte Vorl. über versch. Gebiete der höh. Mathematik. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von G. Landsberg, **3**, 55.
— und **Klein, F.** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von W. Fr. Meyer, **5**, 292.
Fricke, R. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Braunschweig 1902, Vieweg u. Sohn. Von H. Kühne, **6**, 325.
Fuhrmann, A. Bauwissenschaftliche Anwendung der Integralrechnung. Berlin 1903, Wilhelm Ernst & Sohn. Von E. Lampe, **10**, 185.
Fürle, A. Rechenblätter. Berlin 1902, Mayer und Müller. Von A. Hauck, **6**, 237.

Ganter und **Rudio.** Die analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1900, 1903, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **2,** 350; H. Kühne, **9,** 377.

Gauß, C. F. Ges. Werke VIII, IX. Leipzig 1900—1903, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, **4,** 161; **10,** 81.

— General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. 1902. Von E. Jahnke, **4,** 162.

Gauß, F. G. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle 1899, E. Strien. Von E. Jahnke, **1,** 192.

— Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Dezimalteilung des Quadranten. Halle 1899, E. Strien. Von E. Jahnke, **1,** 192.

— Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle 1900, E. Strien. Von C. Faerber, **4,** 150.

Geißler, K. Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Haentzschel, **8,** 252.

— Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichtes. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **10,** 191.

Gehrcken, W. Grundzüge der darstellenden Geometrie. Leipzig 1903, Verl. der Dürrschen Buchhdlg. Von P. Schafheitlin, **9,** 58.

Gérard, E. Leçons sur l'électricité professées à l'institut électrotechnique Montefiore. Paris 1904, Gauthier-Villars. Von H. Linsenmann, **10,** 320.

Giorgi, G. Unità razionali di elettromagnetismo. Napoli 1901. Von F. Emde, **9,** 280.

— Il sistema assoluto. Roma 1903. Von F. Emde, **9,** 280.

Glaser, R. Stereometrie. Leipzig 1899, 1903, Göschen. Von E. Jahnke, **1,** 195; E. Kullrich, **9,** 78.

Gleichen, A. Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von Classen, **8,** 255.

Glöser, M. Lehrbuch der Arithmetik. Wien 1899, A. Pichler. Von E. Jahnke, **2,** 195.

Godefroy, M. La fonction Gamma. Paris 1901, Gauthier-Villars. Von R. Haußner, **7,** 149.

— Théorie élémentaire des séries. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von G. Kowalewski, **9,** 71.

Goering, W. Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises. Dresden 1899, E. Schürmann. Von E. Jahnke, **2,** 196.

Goursat, E. Cours d'analyse mathématique. Paris 1902, Gauthier-Villars. Von A. Kneser, **6,** 333.

Graetz, L. Compendium der Physik. Leipzig 1902, F. Deuticke. Von H. Boas, **9,** 276.

Grassmann, H. Ges. mathematische und physikalische Werke II. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, **7,** 159.

Green, G. Mathematical papers. Paris 1903, A. Hermann. Von E. Jahnke, **7,** 256.

Greve, E. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Glogau 1901, C. Flemming. Von E. Jahnke, **5,** 162.

Grimsehl. Angewandte Potentialtheorie in elementarer Darstellung. Leipzig 1905, Göschen. Von H. Samter, **10,** 319.

Grossmann, W. Versicherungsmathematik. Leipzig 1902, Göschen. Von H. Willgrod, **5,** 156.

Günthart, A. Die Aufgaben des naturkundlichen Unterrichts. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, **9,** 70.

Günther, S. A. v. Humboldt, L. v. Buch. Berlin 1900, E. Hofmann u. Co. Von H. Samter, **4,** 152

Günther, S. Astronomische Geographie. Leipzig 1902, Göschen. Von H. Samter, **5,** 308.
— Gesch. der anorganischen Naturwissenschaften im 19. Jahrh. Berlin 1901, G. Bondi. Von H. Samter, **6,** 153.
Güßfeldt, P. Grundzüge der astronomisch geographischen Ortsbestimmung. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. Von F. Bradhering, **9,** 59.
Guimarães, R. Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle. Coïmbra 1900. Von M. Cantor, **3,** 62.
Gutsche, O. Mathematische Übungsaufgaben für Primaner von Realanstalten und jüngere Studierende. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von Max Nath, **10,** 181.
Habenicht, Bodo. Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin 1905, O. Salle. Von F. Ludwig, **10,** 196.
Hadamard, J. La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901, C. Naud. Von A. Pringsheim, **3,** 282.
— Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris 1903, A. Hermann. Von A. Wangerin, **10,** 302.
Haentzschel, E. Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Berlin 1900, B. Gaertner. Von M. Cantor, **2,** 352.
— Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Kühne, **9,** 376.
Hancock, H. Lectures on the theory of maxima and minima of functions of several variables. Cincinnati 1903. Von P. Stäckel, **8,** 258.
— Lectures on the calculus of variations. Cincinnati 1904. Von P. Stäckel, **10,** 67.
Hartl, H. Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra. Leipzig 1898, F. Deuticke. Von E. Jahnke, **1,** 188.
Haussner, R. Darstellende Geometrie I. Leipzig 1902, Göschen. Von E. Müller, **6,** 164.
Heger, R. Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von R. Güntsche, **4,** 151.
Helmholtz, H. v. Abhandl. zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Hrsg. von M. Planck. Ostwalds Klass. Nr. 124. Von E. Pringsheim, **7,** 148.
Henrici, J. und **Treutlein, P.** Lehrbuch der Elementargeometrie. Leipzig 1901. B. G. Teubner. Von H. Kühne, **3,** 164.
Hensel, K. und **Landsberg, G.** Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Leipzig, B. G. Teubner. Von E. Steinitz, **9,** 300.
Herberich, G. Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. München 1904. Von P. Epstein, **10,** 73.
Herrmann, R. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen. Gotha 1899, E. Thienemann. Von E. Jahnke, **1,** 191.
Heß, E. Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Konfigurationen. Halle 1899, Nova acta Leopoldina 75. Von E. Steinitz, **3,** 302.
Hessenberg, G. Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig 1899, Göschen. Von E. Jahnke, **1,** 195.
Henssi. Leitfaden der Physik. Berlin 1901, O. Salle. Von F. Bremer, **4,** 153.
Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von R. Fricke, **1,** 357.
Hochheim, A. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von P. Zühlke, **10,** 186.
Hochheim, F. Über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, **2,** 205.
Hoffmann, A. Mathematische Geographie. Paderborn 1903, Ferdinand Schöningh. Von E. Kullrich, **10,** 191.
Höfler, Alois. Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Von E. Grimsehl, **10,** 314.

Hofmann. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik nnd Algebra. Bayrenth 1902, W. Grau. Von H. Samter, **6**, 166.

Hölder, O. Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig 1900, B. G. Teubner, Von E. Lampe, **4**, 148.

Holzmüller, G. Elemente der Stereometrie. Leipzig 1899—1902, Göschen. Von R. Fricke, **1**, 365; H. Kühne **3**, 164; **6**, 165; 324.

— Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Kühne, **9**, 56.

— Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **10**, 180.

Humbert, G. Cours d'analyse. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von G. Kowalewski, **9**, 75.

Huntington, E. Über die Grundoperationen an absoluten und komplexen Größen. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. Von C. Faerher, **8**, 154.

Ibrügger, Ch. Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte. Festschr. des Gymn. zu Greifenherg i. P. Von E. Jahnke, **7**, 255.

Jahnke, E. Nachruf auf Ferdinand Caspary. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von M. Krause, **9**, 59.

Janisch, W. Geometrische Aufgaben zur Lehre von der Proportionalität der Größen. Potsdam und Berlin 1904, A. Stein. Von E. Kullrich, **10**, 179.

Jochmann, E., Hermes, O. und **Spieß, J.** Grundriß der Experimentalphysik. Berlin 1900, 1903, Winckelmann und Söhne. Von H. Boas, **3**, 166; H. Samter, **9**, 68.

Jouffret, E. Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et introduction à la Géométrie à *n* dimensions. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von E. Müller, **10**, 195.

Junker, F. Höhere Analysis II. Leipzig 1901, Göschen. Von E. Lampe, **9**, 364.

— Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1902, Göschen. Von E. Lampe, **9**, 364.

— Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von H. Samter, **10**, 182.

Kauèle. Georg Freiherr von Vega. Wien 1905, Selbstverlag des Verfassers. Von H. Samter, **10**, 183.

Kayser, H. Lehrbuch der Physik für Studierende. Stuttgart 1900, F. Enke. Von E. Aschkinass, **5**, 310.

Kiepert, L. Grundriß der Differential- und Integralrechnung. Hannover 1901, Hellwing. Von H. Kühne, **9**, 56.

Killing, W. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. Paderborn 1901, F. Schöningh. Von M. Cantor, **2**, 196.

Kitt, M. Grundlinien der politischen Arithmetik. Wien 1901, K. Gräser u. Co. Von H. Willgrod, **5**, 154.

Klas, A. Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels. Wiesbaden 1900, H. Ferger. Von M. Cantor, **2**, 350.

Kleiber, J. Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien. München 1901, 1903, R. Oldenhourg. Von H. Samter, **6**, 318; Grimsehl, **9**, 178.

— Lehrbuch der Physik zum Gebrauche an realistischen Mittelschulen. München 1902, R. Oldenbourg. Von H. Samter, **6**, 318.

— und **Karsten.** Lehrbuch der Physik zum bes. Gebrauche für techn. Lehranstalten sowie zum Selbststudium. München 1902, R. Oldenhourg. Von H. Samter, **6**, 318.

Klein, F. und **Riecke, E.** Über angewandte Mathematik und Physik. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **2**, 200.

Klein, F. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von Th. Vahlen, **7**, 166.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Klein, F. und **Sommerfeld, A.** Über die Theorie des Kreisels. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von A. Galle, **10**, 64.

Klein, F. Über die Neueinrichtung für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **2**, 206.

— Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an den höheren Schulen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von P. Epstein, **10**, 72.

Klein, J. Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung. Braunschweig 1901, Vieweg u. Sohn. Von H. Samter, **6**, 147.

Kneser, A. Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900, Vieweg u. Sohn. Von P. Stäckel, **2**, 185.

Koher, G. Die Grundgebilde der neueren Geometrie I. Hannover 1898, Hahn. Von E. Jahnke, **1**, 188.

König, J. Einl. in die Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Kühne, **9**, 370.

Königsberger, L. Hermann von Helmholtz. Braunschweig 1902—1903. Vieweg u. Sohn. Von E. Jahnke, **7**, 158.

Kötter, F. Bemerkungen zu F. Kleins und A. Sommerfelds Buch: Über die Theorie des Kreisels. Berlin 1899, Mayer und Müller. Von E. Jahnke, **1**, 199.

Kohlrausch, F. Lehrbuch der praktischen Physik. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von E. Pringsheim, **3**, 68.

— Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von H. Boas, **5**, 163.

Kollert. Katechismus der Physik. Leipzig 1903, J. Weber. Von H. Samter, **8**, 80.

Kommerell, V. und **K.** Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Leipzig 1903, Göschen. Von H. Liebmann, **9**, 65.

Koppe-Diekmann. Geometrie zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten. Essen 1903, Baedeker. Von E. Kullrich, **9**, 247.

Korn, A. Lehrbuch der Potentialtheorie. Berlin 1899, Dümmler. Von E. Jahnke, **1**, 201.

Kraus, K. Grundriß der Arithmetik. Wien 1900, A. Pichlers Witwe und Sohn. Von R. Güntsche, **4**, 151.

Kraus und **Böttger.** Grundriß der Physik. Wien 1901, A. Pichlers Witwe und Sohn. Von F. Bremer, **4**, 153.

Krazer, A. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von M. Krause, **8**, 324.

Krisch. Astronomisches Lexikon. Wien 1902, A. Hartleben. Von H. Samter, **6**, 154.

Kronecker, L. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von E. Steinitz, **6**, 320.

Kühler, J. Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, **10**, 178.

Kuhn, K. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik I. Hildburghausen 1900, O. Petzoldt. Von E. Jahnke, **2**, 349.

Kundt, A. Vorlesungen über Experimentalphysik. Hrsg. v. Scheel. Braunschweig 1903, Vieweg und Sohn. Von E. Aschkinass, **9**, 288.

Lagrange und **Cauchy.** Partielle Differentialgleichungen. Hrsg. v. G. Kowalewski. Leipzig 1900, Engelmann. Von M. Cantor **2**, 209.

Landfriedt, E. Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen. Leipzig 1902, Göschen. Von E. Jahnke, **7**, 255.

— Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1902, Göschen. Von G. Landsberg, **9**, 360.

Lange, J. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin 1900, H. W. Müller. Von Edm. Schulze, **4**, 156.

Lanner, A. Naturlehre. Wien 1902, Jos. Rothsche Verlagsbuchhandlung. Von E. Aschkinass, **6**, 322.

Digitized by Google

Laudahn, H. Über Inhalt und Gebiet der Geometrie. Annalen der Naturphilosophie, II. Jahrg. Heft 2. Von G. Hessenberg, **7,** 134.

Laurent, H. L'élimination. Paris 1900, Carré et Nand. Von H. Kühne, **3,** 164.

Lebesgue, H. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1904, Gauthier-Villars. Von A. Kneser, **9,** 366.

Lejeune-Dirichlet, G. Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. Von Paul Epstein, **10,** 311.

Lemoine, E. Géométrographie. Paris 1902, C. Nand. Von R. Güntsche, **4,** 336.

Lengauer, Jos. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Würzburg 1899. Von M. Cantor, **1,** 198.

Lesser, O. Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht. Berlin 1902, O. Salle. Von E. Jahnke, **7,** 311.

Liebmann, H. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1905, Göschen. Von G. Hessenberg, **10,** 316.

Lobatschefskij, N. J. „Imaginäre Geometrie" und „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale." Übers. v. Heinrich Liebmann. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von Paul Epstein, **10,** 310.

Loewy, A. Versicherungsmathematik. Leipzig 1903, Göschen. Von B. Oster, **9,** 302; G. Bohlmann, **10,** 179.

Loppé, F. Essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes. Paris 1904, Ganthier-Villars. Von M. Schenkel, **10,** 194.

Lorentz, H. A. Lehrbuch der Diff. und Integralrechnung. Leipzig 1900, J. A. Barth. Von M. Cantor, **3,** 61.

Lorenz, H. Technische Mechanik starrer Systeme. München 1902, R. Oldenbourg. Von K. Henn, **7,** 309.

— Technische Wärmelehre. München 1904, R. Oldenbourg. Von K. Heun, **10,** 79.

Lorey, W. Über das geometrische Mittel. Wiss. Beilage zum Jahresber. des Realgymn. mit Realschule in Remscheid 1901. Von H. Willgrod, **4,** 173.

Loria, G. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Modena 1900. Von M. Cantor, **4,** 155; **5,** 309.

— Spezielle algebraische und transzendente Kurven. Übers. v. Fr. Schütte. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von H. Willgrod, **9,** 48.

Ludwig, W. Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. Halle 1902, M. Schilling. Von E. Jahnke, **7,** 162.

Lüroth, J. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von R. Haussner, **9,** 173.

Lummer, O. Die Ziele der Leuchttechnik. München 1903, R. Oldenbourg. Von F. Uppenborn, **10,** 69.

Mach, E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1901, F. A. Brockhaus. Von E. Jahnke, **6,** 149.

— Die Prinzipien der Wärmelehre. Leipzig 1900, J. A. Barth. Von A. Rotth, **6,** 306.

Mahler, G. Ebene Geometrie. Leipzig 1900, Göschen. Von R. Güntsche, **4,** 151.

— Physikalische Formelsammlung. Leipzig 1901, 1903, Göschen. Von H. Willgrod, **6,** 151; H. Samter, **9,** 67.

— Physikalische Aufgabensammlung. Leipzig 1905, Göschen. Von H. Samter, **10,** 182.

Manno, R. Theorie der Bewegungsübertragung. Leipzig, W. Engelmann. Von E. Lampe, **9,** 366.

Marc, L. Sammlung von Aufgaben. München 1901, Th. Ackermann. Von E. Jahnke, **5,** 161.

Digitized by Google

Marcolongo, R. Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici. Milano 1904, U. Hoepli. Von E. Lampe, 10, 91.

Martus, H. Mathematische Aufgaben. Dresden 1901, C. A. Koch. Von H. Kühne, 3, 166.

— Astronomische Erdkunde. Dresden 1902, C. A. Koch. Von E. Kullrich, 6, 326.

— Maxima und Minima. Hamburg 1903, H. Grand. Von E. Jahnke, 7, 161.

— Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Dresden und Leipzig 1904, C. A. Koch. Von E. Kullrich, 10, 188.

Marx. L'éther principe universel des forces. Paris 1905, Gauthier-Villars. Von H. Samter, 10, 195.

Meigen, F. Lehrbuch der Geometrie. Hildburghausen 1900, O. Pezoldt. Von R. Güntsche, 4, 152.

Meyer, W. F. Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1901, Göschen. Von R. Fricke, 4, 164.

Michel, F. Recueil de problèmes de géométrie analytique. Paris 1900, Gauthier-Villars. Von R. Müller, 5, 162.

Mie, G. Moleküle, Atome, Weltäther. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, 10, 179.

Močnik-Spielmann. Geometrische Anschauungslehre I, II. Wien 1898—1901, F. Tempsky. Von E. Jahnke, 1, 189; H. Willgrod, 9, 50.

— Geometrische Formenlehre und Anfangsgründe der Geometrie. Wien 1900, F. Tempsky. Von C. Faerber, 4, 150.

— Lehrbuch der Geometrie. Wien 1901, F. Tempsky. Von H. Willgrod, 9, 50.

Močnik-Neumann. Lehrbuch der Arithmetik. Wien 1898, F. Tempsky. Von E. Jahnke, 1, 189.

— Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Wien 1898, F. Tempsky. Von E. Jahnke, 1, 189.

Monge, G. Darstellende Geometrie. Hrsg. v. R. Haußner. Leipzig 1900, W. Engelmann. Von E. Jahnke, 4, 174.

Moroff, A. Die Schulalgebra. Bamberg 1900, Gärtner. Von C. Faerber, 4, 150.

Müller, E. Lehr- und Übungsbuch der ebenen Geometrie. Berlin 1903, Winckelmann u. Söhne. Von E. Kullrich, 9, 77.

Müller, F. Mathematisches Vokabularium. Leipzig, Paris 1900—1902, B. G. Teubner, Gauthier-Villars. Von M. Cantor, 2, 205; E. Jahnke, 4, 162.

Müller, H. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, 3, 156.

— und **Kutnewsky, M.** Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Leipzig 1902, 1905, B. G. Teubner. Von H. Opitz, 3, 158; E. Kullrich, 10, 189.

Müller, Baltin und **Malwald.** Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, 5, 152.

— Sammlung von Aufgaben. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, 5, 152.

Müller, C. H. und **Presler, O.** Leitfaden der Projektionslehre. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von P. Schafheitlin, 9, 57.

Musil-Ewing. Grundl. der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von H. Lorenz, 4, 347.

— Bau der Dampfturbinen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von R. Vater, 10, 86.

Muth, P. Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von E. Netto, 1, 201.

Néculcéa, E. Le phénomène de Kerr. Paris 1902, C. Naud. Von E. Aschkinass, 9, 280.

Digitized by Google

Netto, E. Vorlesungen über Algebra. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von R. Fricke, **2**, 202.
— Elementare Algebra. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von C. Faerber, **9**, 369.
Newest. Die Gravitationslehre ein Irrtum! Wien 1905, Karl Konegen. Von H. Samter, **10**, 192.
Niemeyer, R. Die Zahlenkunst. Dortmund 1899, Selbstverlag des Verf. Von M. Cantor, **1**, 199.
Noack. Aufgaben für physikalische Schülerübungen. Berlin 1905, Julius Springer. Von H. Samter, **10**, 193.
Noether, M. und **Wirtinger, W.** Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von H. Liebmann, **9**, 64.
Orlando, L. Note di Matematica. Messina 1902, Ant. Trimiarchi. Von E. Kullrich, **10**, 188.
Öttingen, A. v. Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. Leipzig 1901, Engelmann. Von E. Müller, **4**, 134.
Pascal, E. Die Variationsrechnung. Übers. von A. Schepp. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von R. Fricke, **1**, 360.
— Repertorium der höheren Mathematik. Übers. von A. Schepp. Leipzig 1900—1902, B. G. Teubner. Von G. Walleuberg, **3**, 59; E. Müller, **10**, 92.
— Die Determinanten. Übers. von H. Leitzmann. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von Edm. Schulze, **3**, 60.
— Lezioni di calcolo infinitesimale. Milano 1902—1903, U. Hoepli. Von E. Lampe, **8**, 166.
— I gruppi continui di trasformazioni. Milano 1903, U. Hoepli. Von G. Kowalewski, **9**, 74.
Perry, J. Höhere Analysis für Techniker. Deutsch bearb. von R. Fricke und Fr. Süchting. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von M. Samter, **6**, 316.
— Drehkreisel. Deutsch von A. Walzel. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, **10**, 84.
Pfeiffer, E. Physikalisches Praktikum für Anfänger. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von E. Aschkinass, **9**, 289.
Pflieger, W. Elementare Planimetrie. Leipzig 1901, Göschen. Von H. Kühne, **3**, 165.
Pietzker, F. und **Presler, O.** Bardeys Aufgabensammlung. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von H. Opitz, **5**, 152.
— Bardeys Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebr. Aufg. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **6**, 327.
Pionchon, J. Grandeurs géométriques. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von E. Kullrich, **9**, 78.
Poincaré, H. Théorie du potentiel newtonien. Paris 1899, Carré et Naud. Von E. Jahnke, **1**, 200.
— Cinématique et mécanismes, potentiel et mécanique des fluides. Paris 1900, Carré et Naud. Von E. Jahnke, **2**, 210.
— Electricité et optique. Paris 1901, Carré et Naud. Von E. Jahnke, **6**, 149.
Proell. Rechentafel. Dresden, Putscher. Von E. Kullrich, **9**, 79.
Pund, O. Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie. Leipzig 1899, Göschen. Von R. Fricke, **2**, 194.
Raoult, F. Cryoscopie. Scientia, 1901. Von H. Boas, **9**, 80.
Raydt, H. Lehrbuch der Elementarmathematik. Leipzig 1899, M. Hesse. Von E. Jahnke, **1**, 193.
Reichel, O. Vorstufe der höheren Analysis und der analytischen Geometrie. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **10**, 190.
Reinhertz, C. Geodäsie. Leipzig 1899, Göschen. Von E. Jahnke, **1**, 196.

Digitized by Google

Reuling, W. Die Grundlagen der Lebensversicherung. Berlin 1901, E. S. Mittler u. Sohn. Von H. Willgrod, 5, 159.

Richard, J. Sur la philosophie des Mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. Von M. Simon, 7, 261.

Richarz, F. Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von E. Aschkinass, 6, 323.

Riem. Rechentabellen. München 1901, E. Reinhardt. Von E. Kullrich, 4, 333.

Riemann, B. Vorlesungen über elliptische Funktionen. Hrsg. von H. Stahl. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von R. Fricke, 1, 362.

Righi, A. und Dessau, B. Die Telegraphie ohne Draht. Braunschweig 1903, Vieweg u. Sohn. Von E. Aschkinass, 9, 282.

Robin, G. Théorie nouvelle des fonctions. Paris 1903, Gauthier-Villars. Von H. Kühne, 9, 374.

Rohrbach, C. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Gotha 1899, 1904, Thienemann. Von E. Jahnke, 1, 193; E. Kullrich, 10, 84.

Roozeboom, H. W. B. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkt der Phasenregel. Braunschweig 1901, Vieweg u. Sohn. Von v. Steinwehr, 7, 153.

Rosenberg. Lehrbuch der Physik. Wien 1904, A. Hölder. Von H. Samter, 9, 70.

Rost, G. Theorie der Riemannschen Thetafunktion. Leipzig 1901, B. G. Teubner. Von M. Krause, 6, 151.

Rouché, E. et de Comberousse, Ch. Traité de géométrie. Paris 1900, Gauthier-Villars. Von E. Jahnke, 5, 151.

Rudert, E. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmanns Ausdehnungslehre. Leipzig 1899. Von E. Jahnke, 1, 190.

— Über kleine Kugelkreise. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von V. Schlegel, 3, 306.

Rüefli, J. Lehrbuch der Stereometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Bern 1904, A. Francke. Von E. Kullrich, 10, 189.

Runge, C. Praxis der Gleichungen. Leipzig 1900, Göschen. Von A. Kneser, 3, 56.

— Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904, Göschen. Von A. Kneser, 9, 367.

Russell, B. Essai sur les fondements de la géométrie. Paris 1901, Gauthier-Villars. Von P. Stäckel, 4, 140.

Russner. Elementare Experimentalphysik. Hannover 1901, Jänecke. Von F. Bremer, 4, 160.

— Lehrbuch der Physik. Hannover 1903, Jänecke. Von H. Samter, 7, 152.

Sachs, J. Lehrbuch der projektivischen Geometrie. Stuttgart 1900, J. Maier. Von C. Faerber, 4, 149.

Särchinger, E. und Estel, V. Aufgabensammlung für den Rechenunterricht. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von E. Jahnke, 1, 194.

Salmon - Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Kühne, 9, 377.

Sauerbeck, P. Lehrbuch der Stereometrie. Stuttgart 1900, A. Bergsträßer. Von E. Jahnke, 2, 207.

— Einleitung in die analyt. Geometrie der höh. algebr. Kurven. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Von M. Cantor, 6, 166.

Scheiner, J. Der Bau des Weltalls. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, 10, 84.

Schenk, J. Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von H. Linsenmann, 9, 176.

Schering, E. Gesammelte mathematische Werke. Berlin 1902, Mayer u. Müller. Von E. Jahnke, 7, 254.

Schilling, F. Über die Nomographie von d'Ocagne. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von R. Haussner, **9,** 172.

Schlesinger, L. Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig, G. J. Göschen. Von G. Wallenberg, **3,** 163.

Schlömilch. Handbuch der Mathematik. Leipzig 1904, J. A. Barth. Von M. Simon, **9,** 296; 299.

Schmehl, Chr. Die Algebra und die algebraische Analysis. Gießen 1901, E. Roth. Von C. Faerber, **5,** 153.

Schonte, P. H. Mehrdimensionale Geometrie. Leipzig 1902, G. J. Göschen. Von E. Müller, **6,** 313.

Schröder, J. Darstellende Geometrie. Leipzig 1901, G. J. Göschen. Von R. Skutsch, **3,** 162.

Schubert, H. Elementare Arithmetik und Algebra. Leipzig 1899, Göschen. Von R. Fricke, **1,** 364.

— Mathematische Mußestunden. Leipzig 1900, 1904, G. J. Göschen. Von E. Jahnke, **2,** 348; H. Kühne, **9,** 373.

— Niedere Analysis. Leipzig 1902, Göschen. Von C. Faerber, **6,** 152.

— Elementare Berechnung der Logarithmen. Leipzig 1903, Göschen. Von M. Koppe, **8,** 169.

— Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Leipzig 1905, Spamer. Von R. Güntsche, **10,** 86.

Schuster, M. Stereometrische Aufgaben. Leipzig, 1901, 1903, B. G. Tenbner. Von H. E. Timerding, **2,** 353; E. Kullrich, **10,** 187.

— Geometrische Anfgahen nnd Lehrbuch der Geometrie. Leipzig 1901, 1903, B. G. Teubner. Von E. Knllrich, **5,** 153; **8,** 257.

Schwalbe. Grundriß der Astronomie. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. Von H. Samter, **10,** 312.

Schwanzer. Repetitorium der Elementarmathematik. München 1903, M. Kellerer. Von E. Knllrich, **9,** 80.

Schwering, K. Arithmetik und Algebra. Freibnrg i. B. 1899, Herder. Von E. Jahnke, **1,** 190.

— 100 Aufgahen ans der niederen Geometrie. Freiburg i B. 1899, Herder. Von E. Jahnke, **1,** 190.

— Stereometrie für höh. Lehranstalten. Freibnrg i. B. 1900, Herder. Von E. Jahnke, **2,** 349.

— Trigonometrie für höh. Lehranstalten. Freiburg i. B. 1900, Herder. Von E. Jahnke, **2,** 349.

— Sammlung von Anfgaben aus der Arithmetik. Freiburg i. B. 1902—1903, Herder. Von E. Kullrich, **9,** 79.

— und **Krimphoff, W.** Ebene Geometrie. Freiburg i. B. 1902, Herder. Von E. Kullrich, **9,** 77.

Sellentin, B. Mathem. Leitfaden mit bes. Berücksichtigung der Navigation. Leipzig 1902, B. G. Tenbner. Von H. Kühne, **6,** 150.

Serret, J. A. Lehrbuch der Differential- nnd Integralrechnung. Leipzig 1903—1904, B. G. Teubner. Von H. Liebmann, **7,** 147; G. Wallenberg, **9,** 76.

Seyffarth, W. Dr. E. Bardeys methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik. Leipzig und Berlin 1904, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, **10,** 189.

Sicard, H. Traité de cinématique théoriqne. Paris 1902, Gauthier-Villars. Von K. Henn, **10,** 80.

Sickenberger nnd **Bauschinger.** Kaufmännische Algebra. Leipzig 1900, Verl. der Handelsakademie. Von Edm. Schulze, **4,** 157.

Digitized by Google

Simon, M. Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1900, Göschen. Von R. Fricke, **2**, 351.
— Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1901, 1903, Göschen. Von H. Willgrod, **5**, 155; H. Kühne, **10**, 71.
Smolik. Elemente der darstellenden Geometrie. Wien und Prag, Tempsky und Leipzig, Freytag, 1900. Von Edm. Schulze, **4**, 154.
Snyder. Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft nach den Ergebnissen der neuesten Forschungen. Leipzig 1905, Joh. Ambr. Barth. Von H. Samter, **10**, 318.
Snyder, V. and Hutchinson, J. Differential and integral calculus. New York 1903, American Book Company. Von E. Jahnke, **10**, 82.
Sohncke, L. A. Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung. Halle a. S. 1903, H. W. Schmidt. Von E. Lampe, **10**, 73.
Spielmann, J. Močniks geometrische Anschauungslehre. Wien 1901, Tempsky. Von H. Willgrod, **9**, 50.
— Močniks Lehrbuch der Geometrie. Wien 1901, Tempsky. Von H. Willgrod, **9**, 50.
Stiftungsfest der Straßburger Universität. Straßburg 1900, Heitz. Von M. Cantor, **2**, 353.
Stodola, A. Die Dampfturbinen. Berlin 1904, J. Springer. Von A. Kneser, **10**, 88.
Stolz, O. Grundzüge der Diff.- und Integralrechnung III. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von R. Fricke, **1**, 363.
Study, E. Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von E. Müller, **9**, 81.
Sturm, R. Elemente der darstellenden Geometrie. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von E. Müller, **3**, 57.
Tannenberg, W. de. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Paris 1899, A. Hermann. Von R. Fricke, **1**, 361.
Thomae, J. Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von M. Krause, **10**, 95.
Thomson, J. J. Les décharges électriques dans les gaz. Paris 1900, Gauthier-Villars. Von E. Pringsheim, **3**, 68.
Tropfke, J. Geschichte der Elementarmathematik. Leipzig 1903, Veit u. Comp. Von E. Lampe, **10**, 77.
Trotha, Th. v. Die kubische Gleichung. Berlin 1900, W. Ernst und Sohn. Von H. Kühne, **3**, 166.
Veronese, G. Nozioni elementari di Geometria intuitiva. Verona 1901, Fratelli Drucker. Von C. Faerber, **4**, 172.
Vetters, K. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Hannover 1902, Gebr. Jänecke. Von P. Schafheitlin, **7**, 153.
Vivanti, G. Teoria delle funzioni analitiche. Milano 1901, Hoepli. Von H. Willgrod, **4**, 172.
— Complementi di matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti. Milano 1903, U. Hoepli. Von E. Lampe, **8**, 165.
Volkmann, P. Einführung in das Studium der theoretischen Physik. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von F. Pockels, **1**, 366.
Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik. Leipzig 1899, C. E. M. Pfeiffer. Von M. Cantor, **2**, 347.
Vries, H. de. Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905, Göschen. Von E. Kullrich, **10**, 188.
Waeber. Lehrbuch für den Unterricht in der Physik. Leipzig 1905, Ferdinand Hirt & Sohn. Von H. Samter, **10**, 193.
Wagenmann. Das System der Welt. Cannstatt 1904, Selbstverlag des Verfassers. Von H. Samter, **10**, 178.

Wallentin, J. G. Grundzüge der Naturlehre. Wien 1899, 1900, A. Pichlers Witwe u. Sohn. Von A. Blümel; A. Rotth, 8, 72; 73.
— Lehrbuch der Physik. Wien 1900, A. Pichlers Witwe u. Sohn. Von A. Blümel; A. Rotth, 8, 72; 73.
Walther, K. und Röttinger, M. Technische Wärmelehre. Leipzig 1905, Göschen. Von R. Vater, 10, 86.
Wassilieff, A. u. Delaunay, N. P. L. Tschebyscheff und seine wissenschaftilchen Leistungen. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von M. Cantor, 2, 350.
Weber, H. Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. Braunschweig 1900—1901, Vieweg u. Sohn. Von J. Weingarten, 3, 155.
— und **Wellstein, J.** Encyklopädie der Elementarmathematik. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von C. Faerber, 9, 369.
Weber, E. v. Vorlesungen über das Pfaffsche Problem. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Von E. Lampe, 10, 89.
Weber, L. Wind und Wetter. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von H. Samter, 10, 84.
Wehner. Die Bedentung des Experimentes für den Unterricht in der Chemie. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von H. Samter, 10, 181.
Weierstraß, K. Mathematische Werke III, IV. Berlin 1902/3, Mayer und Müller. Von H. Weber, 6, 167; E. Jahnke, 7, 257.
Weighardt, E. Mathematische Geographie. Bühl (Baden) 1902, Konkordia. Von E. Kullrich, 10, 191.
Weiler, W. Physikbuch. Eßlingen 1902, J. F. Schreiber. Von A. Rotth, 9, 273.
— Physikalisches Experimentier- und Lesebuch. Eßlingen 1902, J. F. Schreiber. Von A. Rotth, 9, 275.
Weinstein, B. Thermodynamik und Kinetik der Körper. Braunschweig 1900, Vieweg und Sohn. Von E. Pringsheim, 3, 66.
— Einleitung in die höhere mathematische Physik. Berlin 1901, F. Dümmler. Von E. Aschkinass, 9, 281.
Weishaupt, H. Das Ganze des Linearzeichnens. Leipzig, H. Zieger. Von R. Müller, 8, 254.
Wernicke, A. Lehrbuch der Mechanik. Braunschweig 1901, Vieweg und Sohn. Von M. Koppe, 6, 309.
Whittaker, E. T. A course of modern analysis. Cambridge 1902. Von A. Kneser, 6, 335.
Wiechert, E. Grundlagen der Elektrodynamik. Leipzig 1899, B. G. Teubner. Von R. Fricke, 1, 357.
Wienecke, E. Geometrie für Volksschulen. Berlin 1902, L. Oehmigke. Von E. Kullrich, 7, 154.
— Die Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Berlin 1902, L. Oehmigke. Von E. Kullrich, 7, 154.
— Der geometrische Vorkursus. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Von E. Kullrich, 9, 77.
Wilhelm, J. Die Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt in ihrem Zusammenhang mit den Kreisen der Ebene. Straßburg 1901. Von E. Müller, 4, 345.
Wislicenus. Der Kalender. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Von H. Samter, 10, 183.
Wölffing, E. Mathematischer Bücherschatz. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von F. Müller, 7, 137.
Wrobel, E. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Rostock 1898, Werther. Von E. Jahnke, 1, 188.
Wundt, W. Gustav Theodor Fechner. Leipzig 1901, W. Engelmann. Von E. Lampe, 4, 148.
Zeuthen, H. G. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Paris 1902, Gauthier-Villars. Von E. Lampe, 6, 330.

Digitized by Google

Zeuthen, H. G. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Leipzig 1903, B. G. Teubner. Von M. Cantor, **9,** 248.
Ziegler, Ch. v. Le Perspecteur. Genève 1899, R. Burkhardt. Von Chr. Beyel, **2,** 204.

III. Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze; Lösungen.

Aufgaben und Lehrsätze.	*Lösungen.*
1. Von E. Czuber. **1,** 204.	
2. C. A. Laisant. **1,** 205.	
3. E. Lemoine. **1,** 206.	3. C. Moreau. **4,** 177.
4. E. Lampe. **1,** 206.	4. A. Baruch. **10,** 100.
5. E. Lampe. **1,** 206.	5. O. Gutsche. **5,** 167.
6. E. Lampe. **1,** 206.	
7. E. Lemoine. **1,** 206.	
8. E. Lemoine. **1,** 207.	
9. St. Jolles. **1,** 207.	
10. St. Jolles. **1,** 207.	
11. E. Jahnke. **1,** 208.	
12. A. Kneser. **1,** 368.	12. S. Gundelfinger. **2,** 214; **3,** 78.
13. A. Kneser. **1,** 369.	
14. E. N. Barisien. **1,** 370.	
15. E. N. Barisien. **1,** 370.	
16. E. N. Barisien. **1,** 370	
17. C. A. Laisant. **1,** 370.	
18. Ed. Janisch. **1,** 370.	
19. Ed. Janisch. **1,** 371.	19. W. Stegemann; Ed. Janisch. **2,** 357; **2,** 358.
20. E. Lemoine. **1,** 371.	20. W. Stegemann; K. Cwojdziński; E. Lemoine. **2,** 217; **2,** 219; **4,** 178.
21. W. Fr. Meyer. **1,** 371.	21 A. Fleck. **8,** 174.
22. W. Fr. Meyer. **1,** 371.	
23. W. Fr. Meyer. **1,** 372.	
24. W. Fr. Meyer. **1,** 372.	24. K. Cwojdziński. **2,** 221.
25. W. Fr. Meyer. **1,** 372.	
26. E. Lemoine. **2,** 211.	
27. E. Lemoine. **2,** 212.	
28. E. Müller. **2,** 212.	
29. E. Müller. **2,** 212.	
30. E. Lampe. **2,** 212.	
31. E. Lampe. **2,** 213.	
32. Ed. Janisch. **2,** 213.	32. W. Stegemann; R. Neuendorff. **3,** 81; **3,** 171.
33. W. Fuhrmann. **2,** 213.	33. W. Stegemann; E. Rath. **3,** 83.
34. E N. Barisien. **2,** 213.	
35. E. N. Barisien. **2,** 213.	
36. H. Bertram. **2,** 214.	36. R. Neuendorff. **3,** 171.
37. S. Gundelfinger. **2,** 356.	37. E. Rath; C. Cwojdziński; Th. Vahlen; S. Gundelfinger. **3,** 84; **3,** 172; **3,** 309; **4,** 352.
38. W. Fr. Meyer. **2,** 356.	
39. W. Fr. Meyer. **2,** 356.	
40. O. Stolz. **2,** 357.	
41. E. Lampe. **2,** 357.	41. W. Stegemann. **7,** 172.

Aufgaben und Lehrsätze.	*Lösungen.*
42. S. Gundelfinger. **3**, 75.	
43. W. Fr. Meyer. **3**, 77.	
44. W. Fr. Meyer. **3**, 77.	
45. W. Fr. Meyer. **3**, 77.	
46. E. Lemoine. **3**, 77.	
47. O. Stolz. **3**, 78.	
48. L. Saalschütz. **3**, 169.	
49. W. Fr. Meyer. **3**, 170.	49. W. Fr Meyer. **5**, 168.
50. E. N. Barisien. **3**, 170.	50. R. Neuendorff. **3**, 310.
51. E. N. Barisien. **3**, 170.	
52. E. Lampe. **3**, 170.	52. A. Baruch. **10**, 102.
53. E. Lampe. **3**, 170.	53. W. Stegemann. **5**, 315.
54. E. Lampe. **3**, 171.	
55. A. Kneser. **3**, 307.	
56. Rich. Müller. **3**, 307.	
57. Rich. Müller. **3**, 308.	
58. Ad. Francke. **3**, 308.	
59. S. Gundelfinger. **3**, 309.	
60. S. Gundelfinger. **3**, 309.	60. S. Gundelfinger. **4**, 352.
61. O. Stolz. **3**, 309.	
62. St. Jolles. **4**, 175.	
63. F. Emde. **4**, 175.	
64. E. N. Barisien. **4**, 176.	
65. E. N. Barisien. **4**, 176.	
66. E. N. Barisien. **4**, 176.	
67. E. Lampe. **4**, 177.	
68. E. N. Barisien. **4**, 349.	68. W. Stegemann; Ph. Weinmeister. **5**, 336; **6**, 340.
69. E. N. Barisien. **4**, 349.	69. W. Stegemann. **5**, 337.
70. E Lampe. **4**, 349.	70. W. Stegemann; E. Lampe. **7**, 172; **7**, 173.
71. K. Cwojdziński. **4**, 349.	71. W. Stegemann. **5**, 337.
72. A. Kneser. **4**, 349	
73. P. Wolfskehl. **4**, 350.	
74. G. Olitsch. **4**, 350.	74. P. Kokott. **5**, 175.
75. P. Kokott. **4**, 351.	75. P. Kokott. **6**, 341.
76. W. Fr. Meyer. **4**, 351.	
77. W. Fr. Meyer. **4**, 351.	
78. W. Fr. Meyer. **4**, 351.	
79. S. Gundelfinger. **5**, 166.	
80. P. Stäckel. **5**, 313.	80. H. Kühne. **6**, 342.
81. E. N. Barisien. **5**, 313.	81. O. Gutsche. **7**, 173.
82. E. N. Barisien. **5**, 314.	82. W. Stegemann. **6**, 344.
83. G. Majcen. **5**, 314.	
84. O. Gutsche. **5**, 314.	84. W. Stegemann; O. Gutsche. **6**, 344; **7**, 175.
85. O. Gutsche. **5**, 314.	85. W. Stegemann; O. Gutsche. **6**, 345; **7**, 175.
86. Schumacher. **6**, 173.	86. H. Kühne. **7**, 175.
87. St. Jolles. **6**, 174.	
88. G. Kober. **6**, 174.	88. W. Stegemann. **8**, 176; 330.
89. E. Lampe. **6**, 338.	89. H. Kühne; E. Lampe. **7**, 263; **7**, 265.
90. E. Lampe. **6**, 338.	90. O. Meißner. **8**, 263.

Digitized by Google

Aufgaben und Lehrsätze.	*Lösungen.*
91. P. Kokott. **6,** 338.	
92. W. Fr. Meyer. **6,** 338.	
93. W. Fr. Meyer. **6,** 339.	93. C. Weltzien. **8,** 82.
94. W. Fr. Meyer. **6,** 339.	
95. E. N. Barisien. **6.** 339.	
96. E. Jahnke. **6,** 339.	
97. E. Cesàro. **6,** 340.	97. M. Peche. **8,** 83; 177.
98. E. Lampe. **7,** 171.	
99 P. Stäckel. **7,** 171.	99. O. Meißner. **8,** 264.
100. P. Stäckel. **7,** 262.	100. O. Meißner. **7,** 314.
101. L. Saalschütz. **7,** 262.	101. O. Meißner. **8,** 180; **9,** 181; P. Epstein. **8,** 330.
102. P. Stäckel. **7,** 314.	102. O. Meißner. **9,** 181.
103. O. Gutsche. **7,** 314.	103. W. Stegemann. **8,** 265.
104. E. Jahnke. **8,** 81.	
105. P. Epstein. **8,** 82.	105. E. Rath. **9,** 92.
106. G. Kober. **8,** 82.	
107. M. Peche. **8,** 173.	107. O. Meißner; E. Cesàro; E. Rath; W. Stegemann. **9,** 94—95.
108. W. Fr. Meyer. **8,** 173.	108. O. Meißner. **9,** 95; P. Epstein. **9,** 185.
109. W. Fr. Meyer. **8,** 173.	109. O. Meißner. **9,** 96.
110. G. Kober. **8,** 174.	
111. St. Jolles. **8,** 262.	111. St. Jolles. **9,** 304.
112. O. Gutsche. **8,** 262.	112. A. Droz-Farny. **9,** 304.
113. K. Cwojdziński. **8,** 262.	113. O. Meißner; E. Rath; M. Mayer. **9,** 96; K. Cwojdziński. **10,** 103.
114. L. Saalschütz. **8,** 262.	114. A. Krug. **9,** 186; O. Meißner. **9,** 188; J. Krug **9,** 305.
115. P. Epstein. **8,** 262.	
116. P. Epstein. **8,** 262.	
117. P. Epstein. **8,** 329.	117. A. Krug. **9,** 189.
118. Ad. Schmidt. **8,** 330.	118. Ad. Schmidt. **10,** 103.
119. L. Blatter **8,** 330.	
120. L. Blatter. **8,** 330.	
121. G. Loria. **9,** 90.	121. G. Loria. **10,** 198.
122. G. Loria. **9,** 90.	122. E. Jahnke. **9,** 305; E. Rath. **9,** 306.
123. G. Kober. **9,** 91.	
124. G. Kober. **9,** 91.	124. W. Stegemann. **10,** 199.
125. E. Jahnke. **9,** 91.	
126. E. Jahnke. **9,** 91.	126. A. Krug. **9,** 307; W. Stegemann. **10,** 200.
127. M. Peche. **9,** 91.	127. A. Krug; O. Gutsche. **9,** 307—308.
128. O. Gutsche. **9,** 181.	128. J. Krug. **10,** 329.
129. G. Kober. **9,** 181.	129. G. Kober; W. Stegemann; J. Krug. **10,** 331—332.
130. A. Krug **9,** 303.	130. W. Stegemann. **10,** 333.
131. A. Krug. **9,** 303.	
132. M. Peche. **9,** 303.	
133. E. Jahnke. **9,** 377.	
134. E. Cesàro. **9,** 377.	
135. E. Jahnke. **10,** 97.	
136. J. Neuberg. **10,** 97.	

Digitized by Google

Aufgaben und Lehrsätze.	*Lösungen.*
137. M. Peche. **10,** 97.	
138. O. Gutsche. **10,** 98.	
139. O. Meißner. **10,** 98.	
140. A. Krug. **10,** 98.	
141. A. Krug. **10,** 99.	
142. A. Krug. **10,** 99.	
143. J. Krug. **10,** 197.	
144. E. Cesàro. **10,** 197.	
145. P. Epstein. **10,** 197.	
146. O. Meißner. **10,** 197.	
147. H. Wieleitner. **10,** 198.	
148. E. Lemoine. **10,** 198.	
149. E. Lampe. **10,** 327.	
150. G. Kober. **10,** 327.	
151. G. Kober. **10,** 327.	
152. G. Kober. **10,** 327.	
153. H. Wieleitner. **10,** 328.	
154. H. Wieleitner. **10,** 328.	
155. H. Wieleitner. **10,** 328.	
156. O. Meißner. **10,** 328.	
157. O. Meißner. **10.** 328.	
158. O. Meißner. **10,** 328.	
159. O. Meißner. **10,** 329.	
160. O. Meißner. **10,** 329.	
161. O. Meißner. **10,** 329.	

2. Anfragen und Antworten.

Anfragen.	*Antworten.*
1. Von E Lampe. **1,** 208.	1. Von E. Wölffing; E. Lampe. **2,** 228.
2. E. Lampe. **1,** 208.	
3. W. Veltmann. **1,** 373.	3. G. Hessenberg. **2,** 358.
4. A. Wendler. **3,** 85.	
5. G. Majcen. **3,** 85.	5. G. Majcen. **3,** 310.
6. E. Jahnke. **3,** 85.	6. G. Rados. **3,** 311.
7. A. Wendler. **4,** 178.	
8. E. Jahnke. **4,** 178.	
9. O. Gutsche. **6,** 174.	9. O. Gutsche. **8,** 86.
10. R. Güntsche. **7,** 178.	
11. R. Güntsche. **7,** 179.	
12. M. Zacharias. **7,** 179.	12. M. Zacharias. **7,** 316.
13. M. Zacharias. **7,** 179.	13. M. Zacharias. **7,** 316.
14. P. Schafheitlin. **7,** 317.	
15. O. Gutsche. **7,** 318.	15. O. Gutsche. **8,** 269.
16. G. Holzmüller. **8,** 87.	16. G. Holzmüller. **8,** 232.
17. O. Meißner. **8,** 267.	
18. P. Zühlke. **8,** 268.	18. O. Meißner; P. Zühlke. **8,** 332.
19. O. Gutsche. **8,** 268.	19. W. Stegemann. **9,** 98.
20. O. Gutsche. **8,** 268.	20. W. Stegemann. **9,** 98; R. Henke. **9,** 99.
21. O. Meißner. **8,** 331.	
22. O. Meißner. **8,** 331.	22. O. Meißner. **10,** 334.

Digitized by Google

Anfragen.	*Antworten.*
23. A. Cappilleri. **8**, 331.	23. P. Zühlke; G. Berkhan; R. Henke. **9**, 99.
24. R. Sturm. **8**, 332.	
25. O. Meißner. **9**, 97.	
26. O. Meißner. **9**, 97.	
27. A. Krug. **10**, 104.	
28. P. Ehrenfest. **10**, 105.	

3. Kleinere Notizen.

Antwort auf Frage 3 (1894) im Intermédiaire des Math. Von **G. Espanet**, **6**, 345.
— auf Frage 2270 (1902) im Intermédiaire des Math. Von **C. Burali-Forti**, **4**, 181.
— auf Frage 2315 im Intermédiaire des Math. Von **E. Malo**, **6**, 348.
— auf Frage 2454 im Intermédiaire des Math. Von **E. Malo**, **6**, 351.
Cwojdziński, K. Zur Bemerkung des Herrn **Ed. Janisch** in **2**, 153; **3**, 316.
Epstein, P. Zu der Mitteilung von Herrn **J. Schröder** über die Näherungswerte von $\sqrt{2}$. **9**, 310.
Fischer, V. Die Bestimmung einer beliebigen Hyperbel aus zwei gleichseitigen Hyperbeln. **9**, 209.
Godt, W. Über den sogenannten irreduzibelen Fall der kubischen Gleichung. **9**, 213.
Güntsche, R. Zur Geometrographie der Mascheronischen Kreisteilungen. **7**, 181.
Gundelfinger, S. Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn C. Koehler in **3**, 21—33, 94—111; **3**, 311.
Gutsche, O. Über eine Haupteigenschaft des Feuerbachschen Kreises. **9**, 191.
Hatzidakis, N. J. Bemerkung zum Aufsatz von Herrn Kommerell in **1**, 116; **3**, 313.
Hessenberg, G. Bemerkung zu der Arbeit (G. Hessenberg) in **3**, 121; **3**, 316.
Holzmüller, G. Kartographische Bemerkung über das Katenoid. **7**, 180.
— Bemerkung über Dupinsche Zykliden und logarithmische Spiralröhrenflächen und ihre quadratischen Einteilungen. **8**, 333.
— Konforme Abbildung der Minimalschraubenregelfläche auf der Ebene. **8**, 340.
— Über eine besondere isothermische Spiegelung. **10**, 339.
Isenkrahe, C. Bemerkung zum Aufsatz (C. Isenkrahe) **3**, 257—260; **4**, 180.
Jung, F. Über die Ableitung der Eulerschen Knickungsformel, **10**, 201—207.
Kober, G. Die Konstruktion des Kreisvierecks aus der Gleichung seiner Ecken. **9**, 100.
— Die Asymptoten der Hyperbel, welche den Einheitskreis auf vier durch ihre Gleichung gegebenen Scheitelstrahlen schneidet. **9**, 101.
— Zur Konstruktion der regelmäßigen Vielecke 3. Ordnung. **9**, 193.
— Die transformierte Kreisteilungsgleichung und ihre Reduktion auf eine Gleichung, deren Grad nicht mehr teilbar ist. **9**, 194.
Koch, F. und **Reisacher, I.** Die Aufgabe, einen Würfel durch einen andern durchzuschieben. **10**, 335.
Kraus, J. Bemerkungen zur Lehre von den diophantischen Gleichungen. **9**, 204.
Kühne, H. Bemerkung zum Aufsatz (Schwering) **2**, 280; **4**, 180.
— Bemerkung zum Aufsatz (Hurwitz) **5**, 17; **6**, 174.
Meißner, O. Über die Darstellung der Zahlen einiger algebraischen Körper als Summen von Quadraten aus Zahlen des Körpers. **5**, 175; **7**, 266.
— Bemerkung über eine zahlentheoretische Funktion. **8**, 181.
— Über die Darstellung der Zahlen quadratischer und kubischer Zahlkörper als Quadratsummen. **9**, 202.
Meyer, E. Eine Eigenschaft der sogenannten Gaußschen Bildpunkte der imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche 2. Ordnung. **9**, 210.
Mikami, J. A Chinese Theorem on Geometry. **9**, 308.
Moreau, C. Solution d'un problème de probabilités. **4**, 184.

Digitized by Google

Netto, E. Notiz über die Wegschaffung von Wurzelgrößen aus algebraischen Gleichungen. **9,** 310.
Neuberg, J. Gleichbrocardische Dreiecke. **9,** 207.
Rath, E. Anwendung der Graßmannschen Ausdehnungslehre auf n-fache Orthogonalsysteme. **9,** 196.
Sawayama, Y. Ein neuer Lehrsatz der Geometrie. **10,** 105.
Schröder, J. Eine Eigentümlichkeit der Näherungswerte von $\sqrt{2}$. **9,** 206.
Simon, M. Lunulae Hippocratis. **8,** 269.
— Zur ägyptischen Mathematik. **9,** 102.
— Über den sogenannten Brocardschen Punkt. **9,** 206.
Stahl, H. Berichtigung einer Arbeit von Herrn E. T. Whittaker (Messenger (2), 31, 145—148). **10,** 336.
Sturm, R. Ein Distichon von der Hand Johann Bernoullis. **8,** 342.
Visnya, A. Eine Verallgemeinerung der v. Staudtschen projektiven Koordinaten. **10,** 337.
Wolfskehl, P. Über einen Satz von Hermite in **1,** 25; **4,** 179.
Zühlke, P. Über das harmonische Mittel. **8,** 88.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Zu I A 1: S. 12, **G. Eneström** **3,** 318; S. 26, **W. Fr. Meyer** **2,** 230.
Zu I A 2: S. 29, **G. Eneström** **3,** 318; S. 29, 30, **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 33, **W. Ahrens** **3,** 317; S. 34, 35, **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 35, **G. Eneström** **3,** 318, **E. Netto** **3,** 317; S. 36, **E. Netto** **3,** 317; S. 38, **G. Eneström** **3,** 318; S. 40, **A. Loewy** **3,** 173; S. 41, **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 42, 43, **A. Loewy** **9,** 103; S. 44, **A. Loewy** **3,** 86; **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 46, **W. Fr. Meyer** **2,** 230.
Zu I A 3: S. 48, **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 50, **G. Eneström** **3,** 318; S. 52, 58, **W. Fr. Meyer** **2,** 230; S. 59, 60, **G. Eneström** **3,** 318; S. 68, 73, 74, 78, 89, 98, 103, 104, 106, 110, **W. Fr. Meyer** **2,** 230—231; S. 112, **G. Eneström** **4,** 190; S. 118, 119, **W. Fr. Meyer** **2,** 231; S. 120, **E. Müller** **2,** 232; S. 122, 124, 134, 135, 137, 140, 141, 143, 145, 146, **W. Fr. Meyer** **2,** 231—232.
Zu I A 4: S. 149, 165, 167, 179, 181, **E. Study** **9,** 103—105.
Zu I A 5: S. 190, 193, 196, 201, **A. Schoenflies** **1,** 374.
Zu I A 6: S. 217, **A. Loewy** **1,** 375, **9,** 105; S. 218, 220, **A. Loewy** **3,** 173; S. 222, **A. Loewy** **1,** 375; S. 224, **A. Loewy** **3,** 173.
Zu I B 1a: S. 228, 230, 231, **G. Eneström** **4,** 190; S. 236—237, **M. Noether** **3,** 317; S. 239, **A. Loewy** **1,** 375; S. 247, **M. Noether** **3,** 317.
Zu I B 1b: S. 257, **A. v. Braunmühl** **2,** 359; S. 263, **J. Kürschák** **5,** 341.
Zu I B 2: S. 321, **W. Fr. Meyer** **2,** 232; S. 328, 329, 331, 333, **T. J. I'A. Bromwich** **2,** 359.
Zu I B 3a: **A. v. Braunmühl** **2,** 360; S. 408, 409, 411, 412, 428, **A. Loewy** **3,** 174; S. 428, **C. Runge** **8,** 93; S. 433, 439, **A. Loewy** **3,** 174—176.
Zu I B 3b: S. 451, **A. Loewy** **3,** 176.
Zu I B 3d: S. 500, **A. v. Braunmühl** **3,** 86; **G. Eneström** **4,** 190; S. 503, **G. Eneström** **4,** 190.
Zu I C 1: Nr. 5, Nr. 10, **A. v. Braunmühl** **3,** 86; S. 577, **O. Meißner** **9,** 108, 214; S. 579, **L. Saalschütz** **1,** 375; **G. Eneström** **4,** 190.
Zu I C 2: S. 593, **A. Loewy** **1,** 375; S. 599, **A. v. Braunmühl** **3,** 87; S. 601, **L. Saalschütz** **9,** 108—110.
Zu I C 3: S. 669, **A. v. Braunmühl** **3,** 87.
Zu I D 3: S. 800, **H. Burkhardt** **2,** 360; S. 801, **A. v. Braunmühl** **3,** 87; S. 817, **H. Burkhardt** **2,** 360.
Zu I D 4b: S. 853, **A. Loewy** **9,** 106.

Digitized by Google

Zu I E: S. 918, **H. Burkhardt 2**, 360; S. 920, **G. Eneström 4**, 190; S. 920, **L. Saalschütz 4**, 189; S. 923, **L. Saalschütz 4**, 189; **G. Eneström 3**, 318; S. 925, **A. v. Braunmühl 3**, 87—88; S. 927, 927—928, **G. Eneström 3**, 318; **A. v. Braunmühl 3**, 87—88; S. 930, **W. Fr. Meyer 2**, 232; S. 935, **L. Saalschütz 4**, 189—190; S. 937, **Th. Vahlen 9**, 90—92.

Zu I F: S. 984, **A. Loewy 3**, 321—323; S. 993, **M. Koppe 5**, 338—340, **Kewitsch 6**, 355—357, **A. Loewy**, **E. Lampe 9**, 106—108.

Zu II A 1: S. 3, **G. Eneström 3**, 319.

Zu II A 2: S. 56, **G. Eneström 3**, 319, **A. v. Braunmühl 3**, 88; S. 62, **G. Eneström 3**, 319, **H. Fehr 3**, 320; S. 69, **H. Fehr 3**, 320; S. 78, 82, **G. Eneström 3**, 319; S. 117, **A. v. Braunmühl 8**, 92; S. 118, **G. Eneström 3**, 319; S. 120, 121, **A. v. Braunmühl 8**, 92; S. 134, **M. Krause 2**, 360.

Zu II A 3: S. 136, **M. Krause 2**, 361; S. 150, **A. v. Braunmühl 3**, 88; S. 157, **G. Eneström 3**, 319; S. 158, **W. Wirtinger 2**, 360, **M. Krause 2**, 361, **G. Eneström 3**, 319; S. 163, 164, 165, **M. Krause 2**, 361; S. 167, 171, **G. Eneström 3**, 319; S. 174, 118, **M. Krause 2**, 361; S. 183, **L. Saalschütz 1**, 375; S. 184, **L. Saalschütz 1**, 375, **M. Krause 2**, 362, **M. Noether 3**, 320; S. 185, **L. Saalschütz 1**, 376, **M. Noether 3**, 320—321; S. 186, **L. Saalschütz 1**, 375—376.

Zu II A 4a: S. 212, **C. Schmidt 2**, 362; **4**, 354—359; S. 213, **G. Eneström 3**, 319, **A. v. Braunmühl 8**, 92; S. 214, **C. Schmidt 2**, 362.

Zu II A 4b: S. 237, **G. Eneström 3**, 319; S. 241, **A. v. Braunmühl 8**, 92.

Zu II A 10: S. 738, **A. Wangerin 9**, 311.

Zu II B 1: S. 26, 29, 75, 84, 97, 105, 107, **W. Osgood 3**, 321.

Zu II B 2: S. 117, **G. Eneström 3**, 319.

Zu III D 1, 2: S. 34, 45, **A. v. Braunmühl 8**, 92; S. 84, **G. Loria 5**, 340.

Zu III D 3: S. 146, 149, 150, **A. v. Braunmühl 8**, 92—93; S. 176, 178, **F. Klein 4**, 354.

Zu III D 5: S. 289, 298, **A. v. Braunmühl 8**, 93.

Zu III D 6a: S. 367, **A. v. Braunmühl 8**, 93.

Zu IV B 5: S. 362 ff., **F. Schur 7**, 319—320; S. 412, **M. Grübler 9**, 215.

Zu IV C 14: S. 4—11, **E. Jahnke 4**, 354; S. 13, **J. Lüroth 2**, 362.

Zu V B 3: S. 94 ff., **K. v. Wesendonck 7**, 320—321.

Verzeichnis der Mitarbeiter.

Ahrens, W.
Appell, P.
Aschkinaß, E.
Barisien, E. N.
Baruch, A.
Bauer, M.
Berkhan, G.
Bertram, H.
Beyel, Chr.
Biermann, O.
Blatter, L.
Boas, H.
Börsch, A.
Bohlmann, G.
Bradhering, F.
Bremer, F.
Bromwich, T. J. I'A.
Bucherer, A. H.
Budde, E.
Cantor, M.
Cappilleri, A.
Carathéodory, C.
Caspary, F.
Cesàro, E.
Classen, J.
Cwojdziński, K.
Czuber, E.
Daniëls, F.
Darboux, G.
Dolezalek, F.
Droz-Farny, A.
Dücker, W. v.
Eckhardt, E.
Edalji, I.
Ehrenfest, P.
Emde, F.
Engel, F.
Epstein, P.
Färber, C.
Feldmann, C.
Fischer, O.
Fischer, V.
Fitting, F.
Fleck, A.
Föppl, A.
Francke, A.
Fricke, R.
Fuhrmann, W.
Funck, R.
Furtwängler, Ph.
Galle, A.
Gehrcke, E.
Gleichen, A.
Godt, W.
Graf, H.
Greenhill, A. G.
Grimsehl, E.
Großmann, L.
Großmann, M.
Güntsche, R.
Guldberg, A.
Gundelfinger, S.
Guradze, H.
Gutsche, O.
Habenicht.
Haentzschel, E.
Haller, St
Hamburger, M.
Haskell, M.
Hatzidakis, N. I.
Hauck, A.
Haußner, R.

Digitized by Google

Hayashi, O.
Heffter, L.
Henke, R.
Hensel, K.
Herglotz, G.
Hermite, Ch.
Hertzer, H.
Herzog, J.
Hessenberg, G.
Henmann, C.
Heun, K.
Hilbert, D.
Holzmüller, G.
Horn, J.
Hurwitz, A.

Isenkrahe, C.

Jahnke, E.
Janisch, E.
Johannesson, P.
Jolles, St.
Jonas, H. I.
Jourdain, P. E. B.
Jung, F.

Kantor, S.
Kapteyn, W.
Klein, F.
Klng, L.
Kneser, A.
Knoblauch, J.
Kober, G.
Koch, F.
Koehler, C.
Koepsel, A.
Kohn, G.
Kokott, P.
Kommerell, V.
Koppe, M.
Kostka, C.
Kowalewski, G.
Krans, J.
Krause, M.
Krause, R.
Krug, A.
Krug, J.
Kühne, H.
Kürschák, J.
Kullrich, E.

Laisant, C. A.
Lampe, E.
Landau, E.
Landsberg, G.
Lehmann-Filhés, R.
Leman, A.
Lemoine, E.
Lerch, M.
Levi-Civita, T.
Liebmann, H.
Lilienthal, R. v.
Linsenmann, H.
Loewy, A.
London, F.
Lorenz, I. M.
Lorenz, H.
Loria, G.
Ludwig, F.
Ludwig, W.
Lummer, O.

Maennchen, P.
Majcen, G.
Mansion, P.
Maßfeller, A.
Matthiessen, L.
Maurer, L.
Mayer, M.
Meißner, O.
Meyer, E.
Meyer, W. Fr.
Mittag-Leffler, G. M.
Mikami, Y.
Milan, P.
Miller, G. A.
Moreau, C.
Müller, E.
Müller, F.
Müller, R.

Naetsch, E.
Nath, M.
Nernst, W.
Netto, E.
Neuberg, J.
Nenendorff, R.
Nielsen, N.

d'Ocagne, M.
Olitsch, S.
Opitz, H.
Opitz, M.
Orlich, E.
Oster, B.

Pampuch, A.
Pasch, M.
Peche, M
Pexider, W.
Phragmén, E.
Picard, E.
Pockels, F.
Pringsheim, A.
Pringsheim, E.

Rados, G.
Rath, E.
Rehfeld, E.
Reisacher, I.
Reye, Th.
Richter, R.
Riecke, E.
Ripert, L.
Rotth, A.

Saalschütz, L.
Safford, F. H.
Samter, H.
Samter, M.
Sawayama, Y.
Schaefer, C.
Schafheitlin, P.
Scheffers, G.
Schell, W.
Schenkel, M.
Schlegel, V.
Schlesinger, L.
Schmidt, A.
Schoeler, H.
Schoenflies, A.
Schonte, P.
Schröder, I.
Schubert, H.
Schüßler, R.
Schumacher.
Schultz, E.
Schnlze, E.
Schwering, K.
Segre, C.
Simon, M.
Sintzow, D.
Skutsch, R.
Spieß, O.
Stäckel, P.
Stahl, H.
Staude, O.
Stegemann, W.
Steinitz, E.
Steinwehr, v.
Stéphanos, C.
Sterneck, R. v.
Stolz, O.
Stndnička, F. J.
Study, E.
Sturm, R.
Sumec, I. K.

Tachauer, A.
Teixeira, G.
Thieme, H.
Thienemann, W.
Timerding, H. E.

Uppenborn, F.

Vahlen, Th.
Vater, R.
Veltmann, W.
Visnya, A.
Vivanti, G.
Vries, J. de

Wallenberg, G.
Wangerin, A.
Weber, E. v.
Weber, H.
Weingarten, J.
Weinmeister, Ph.
Weinnoldt, E.
Wellstein, J.
Weltzien, C.
Wendler, A.
Westphal, W.
Wieghardt, K.
Wieleitner, H.
Willgrod, H.
Wilson, E.
Wölffing, E.
Wolfskehl, P.

Zacharias, M.
Züge, H.
Zühlke, P.

Berichtigung zum ersten Hefte dieses Bandes.

S. 24, Z. 10 v. u. hinter dem Worte „definit“ zn ergänzen „in $x^2 = u$“.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN
GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

FÜNFTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Digitized by Google

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Denizot, A., Über das Foucaultsche Pendel . . . . 78—81

Fleck, A., Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen . . . . . . 2—9

Fuchs, R., Über lineare homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung mit nur wesentlichen singulären Stellen . . . . 46—50

Güntsche, R., Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie . . 27—38

Haentzschel, E., Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen . 54—57

Hessenberg, G., Über die Projektion des räumlichen Punktgitters . . . 64—70

Jolles, St., Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen 51—53

Koebe, P., Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft . . . . 39—42

Koebe, P., Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht, in bezug auf ihr Verhalten bei der Iteration . . . . 57—64

Koppe, M., Die Kongruenz $x^2 \equiv x$ (mod 10^n) . . . . 74—78

Lampe, E., Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal . 17—27

Meissner, O., Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen . . . . 70—72

Rothe, R., Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz . . . . 9—15

Schafheitlin, P., Die Lage der Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art . . . . 82—93

Skutsch, R., Ein Apparat zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts in der Ebene . . . . 42—46

Zühlke, P., Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen . . . . 15—16

Mitglieder-Verzeichnis . . . . 94—96

Siebenunddreißigste	Sitzung am	25. Oktober 1905	1
Achtunddreißigste	„ „	29. November „	1
Neununddreißigste	„ „	13. Dezember „	17
Vierzigste	„ „	31. Januar 1906	17
Einundvierzigste	„ „	28. Februar „	39
Zweiundvierzigste	„ „	28. März „	39
Dreiundvierzigste	„ „	25. April „	39
Vierundvierzigste	„ „	30. Mai „	73
Fünfundvierzigste	„ „	27. Juni „	73

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

37. Sitzung am 25. Oktober 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 35 Herren.

Nachdem Herr Färber den Kassenbericht verlesen, wird ihm auf Antrag der beiden Revisoren Herren Hessenberg und Rothe Entlastung erteilt. Darauf findet die Neuwahl des Vorstandes statt: Es werden wieder gewählt zum Vorsitzenden Herr Knoblauch, zum Schriftführer Herr Jahnke und zum Kassenwart Herr Färber.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Zühlke: Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen (s. u.).

Herr Koppe: Über das Vierfarbenproblem.

38. Sitzung am 29. November 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 45 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kötter: Über die Aufgabe, ein Seilpolygon durch drei Punkte zu legen.

Herr Koppe: Über die iterierte Sinusfunktion.

Der Vorsitzende teilt mit, daß beabsichtigt wird, aus freiwilligen Beiträgen ein

Grabdenkmal für Karl Weierstraß

zu errichten. Gründe, die dies bis jetzt verhindert haben, liegen nicht mehr vor, und die Aufstellung des Grabmals soll deshalb im nächsten Frühjahr erfolgen.

Die Gesellschaft beschließt, diese Mitteilung in ihren Sitzungsberichten zu veröffentlichen, um dadurch Schülern und Freunden von Weierstraß Gelegenheit zu geben, sich durch einen Beitrag an der Errichtung des Grabdenkmals zu beteiligen. Ein besonderer Aufruf soll nicht erlassen werden.

Beiträge werden bis zum 15. Februar 1906 an den Vorsitzenden J. Knoblauch (Berlin W., Karlsbad 12) erbeten, der auch jede Auskunft in dieser Angelegenheit gern erteilen wird.

Digitized by Google

Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen.

Von Albert Fleck.

Während der Satz, daß jede ganze Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar ist, auf mehrfache Arten, so von Gauß, Lagrange, Jacobi und Dirichlet bewiesen worden ist, hat man dem entsprechenden Problem der Zerlegung ganzer Zahlen in (positive) Kuben ganzer Zahlen lange Zeit nicht beikommen können. Bis vor kurzem war keine bestimmte Anzahl als für die Darstellung jeder ganzen Zahl hinreichende Kubenzahl bekannt. Man beschränkte sich auf einige induktiv gewonnene Vermutungen.

Waring[1]) hat 1770 die Zerlegung der Zahlen von 1—3000 geprüft. Jacobi[2]) verdankt man eine Tabelle der kleinsten Anzahlen von positiven Kuben, in welche sich alle ganzen Zahlen von 1—12000 zerlegen lassen. Aus derselben läßt sich feststellen, daß, wenn man mit K_n eine Zahl bezeichnet, die *durch n, aber nicht weniger als n* Kuben darstellbar ist,
zu den K_9 nur die Zahlen 23, 239,
zu den K_8 nur die Zahlen 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 303, 364, 420, 428, 454
gehören. Für die K_7 bildet 8042 eine obere Grenze. Die Zahlen K_6 finden sich bis zum Schlusse der Tabelle.

Im Jahre 1903 hat Herr v. Sterneck[3]) die Tabelle Jacobis bis auf 40000 erweitert, hauptsächlich zu dem Zwecke, zu prüfen, ob das Abbrechen der Zahlen K_9, K_8, K_7 auch für diese Zahlenstrecke gültig ist. Es ergab sich, daß dies der Fall ist, daß also 239 die höchste K_9, 454 die höchste K_8, 8042 die höchste K_7 ist.

Über die andern Zahlen erhält Herr v. Sterneck das Resultat:
Die K_6 werden gegen die 40000 hin schon selten, scheinen aber sehr langsam abzunehmen.
Die K_5 kommen vom 4. Tausend ab relativ konstant zu 390 pro 1000 Zahlen bis zum Schlusse der Tabelle hin vor.
Die K_4 wachsen an Zahl bis zu dem Maximum 481 pro 1000 beim 39. Tausend.
Die K_3 bewegen sich um 100 pro 1000 herum.
Die K_2 zählen 10 pro 1000.
Das plötzliche Abbrechen der Zahlen K_9, K_8, K_7, besonders aber der erstgenannten Zahlen, also der Umstand, daß z. B. zwischen 240 und 40000 keine K_9 mehr existiert, macht es wahrscheinlich, *daß über eine gewisse Grenze hinaus (vielleicht 8042) wohl keine ganze Zahl existieren mag, welche sich nicht durch höchstens 6 Kuben darstellen ließe.*

Es wäre allerdings auch schon sehr viel erreicht, wenn die Zahl 9 als obere *hinreichende und notwendige* Grenze allgemein bewiesen wäre.

1) Meditationes algebr. III. Ausgabe. Cambridge 1782.
2) Crelle Bd. 42 S. 41—69; Werke Bd. 6, S. 322—354.
3) Sitzungsberichte der K. A. d. Wissensch. in Wien. Math.-naturw. Klasse. Bd. 112, Abt. IIa. Dez. 1903.

Erst in neuerer Zeit ist — auf verhältnismäßig elementarem Wege — durch Ed. Maillet[1]) der strenge Beweis geführt worden, *daß jede ganze Zahl als Summe von höchstens 17 Kuben positiver ganzer Zahlen darstellbar ist.*

Der Beweis sei kurz folgendermaßen charakterisiert:

Bekanntlich läßt sich jede Zahl, die nicht von der Form $4^h(8n+7)$ ist, als Summe von 3 Quadraten darstellen. Seien m und m' 2 solche Zahlen, für welche

(1) $$0 < m < \alpha^2; \quad 0 < m' < \alpha'^2,$$

so läßt sich beweisen, daß bei gewissen Annahmen die Gleichung

(2) $$\alpha m + \alpha' m' = M$$

für jede ganze Zahl M zwischen bestimmten Grenzen durch positive Zahlen m und m' obiger Art erfüllbar ist.

Um dies zu erreichen, haben wir nur

(3) $$\alpha < \alpha' < \frac{\alpha^2}{8}$$

anzunehmen. Geben wir nun m die Werte

$$0,\ 1,\ 2, \ldots (8\alpha' - 1),$$

womit selbst der größte Wert von m unter der in (1) und (3) geforderten Grenze α^2 bleibt, und betrachten wir die $8\alpha'$ Zahlen:

(4) $$M,\ M-\alpha,\ M-2\alpha, \ldots M-(8\alpha'-1)\alpha.$$

Unter diesen gibt es, wenn α relativ prim zu α' angenommen wird, genau 8 Zahlen, die durch α' teilbar sind. Diese Zahlen sind sicher positiv, sobald $M > 8\alpha\alpha'$. Als obere Grenze für M ergibt sich aus (1) und (2) $\alpha^3 + \alpha'^3$. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn $M < \alpha'^3$ angenommen wird (weshalb das geschieht, folgt sofort).

Wir haben also

(5) $$8\alpha\alpha' \leq M \leq \alpha'^3.$$

Für jede der 8 durch α' teilbaren Zahlen der Reihe (4) wird nun $\frac{M-\alpha m}{\alpha'} = m'$ eine ganze Zahl, d. h. die Gleichung (2) erfüllt.

Nun soll aber m' noch die Bedingung (1) $m' < \alpha'^2$ erfüllen, was in der Tat durch die obige Annahme $M < \alpha'^3$ erreicht ist, da dann $m' = \frac{M-\alpha m}{\alpha'} < \alpha'^2 - \frac{\alpha m}{\alpha'} < \alpha'^2$ wird.

Ist nun μ' der kleinste ganze Wert von m', so gibt es 8 Zahlen $m' = \mu' + j\alpha$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), denen die Werte $m = \mu - j\alpha'$ entsprechen. Da α und α' ungerade, so werden die 8 Werte von m einander (mod. 8) inkongruent sein, desgleichen die von m'.

Also gibt es unter ihnen sicher je 5 Werte, die nicht von der Form $4^h(8n+7)$ sind. Jeder dieser 5 Werte von m kann nun einem der 8 Werte m' entsprechen, nur 3 Werte m jedoch entsprechen Zahlen m' von der Form $4^h(8n+7)$, also bleiben sicher 2 Paare von Zahlen m und m'

1) Association franç. pour l'avancement des sc. — Congrès de Bordeaux 1895.

übrig, welche beide nicht diese Form haben, also als Summen von 3 Quadraten darstellbar sind.

Es ist also bewiesen: *Jede Zahl M, die der Bedingung*

(5) $$8\alpha\alpha' < M \leq \alpha'^3$$

genügt, läßt sich in der Form

(2) $$\alpha m + \alpha' m' = M$$

darstellen, bei gleichzeitiger Erfüllung der Bedingungen

(1) $$0 < m < \alpha^2, \quad 0 < m' < \alpha'^2,$$

(3) $$\alpha < \alpha' < \frac{\alpha^2}{8},$$

wo α prim zu α' und beide ungerade sind und m, m' Zahlen, die eine Zerlegung in 3 Quadrate gestatten.

Nun setzen wir $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $m' = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$.
Dann ist wegen (1)

(6) $$x_i < \alpha_i; \quad x_i' < \alpha_i' \quad (i = 1, 2, 3),$$
und es wird

$$6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6M = 6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6\alpha m + 6\alpha' m'$$
$$= 6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6\alpha'(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\left[(\alpha + x_i)^3 + (\alpha - x_i)^3\right] + \sum_{i=1}^{3}\left[(\alpha' + x_i')^3 + (\alpha' - x_i')^3\right],$$

d. h. in Rücksicht auf (6) die Summe von 12 Kuben *positiver* Zahlen.

Hier kann M jede Zahl bedeuten, die der Bedingung (5) genügt, also ist jede Zahl
$$6N = 6(\alpha^3 + \alpha'^3 + M),$$
für welche
$$\alpha^3 + \alpha'^3 + 8\alpha\alpha' \leq N \leq \alpha^3 + 2\alpha'^3,$$
sobald (3) erfüllt ist, die Summe von 12 positiven Kuben.

Jetzt nehmen wir zunächst $\alpha = \gamma - 2$, $\alpha' = \gamma$, wobei der Bedingung (3) genügt ist, und dann $\alpha = \gamma$, $\alpha' = \gamma + 2$, dann gilt unser Satz für jedes Sechsfache von N, wo N einmal für jede beliebige Zahl des Intervalls von
$$(\gamma - 2)^3 + \gamma^3 + 8(\gamma - 2)\gamma \text{ bis } (\gamma - 2)^3 + 2\gamma^3,$$
das zweite Mal im Intervall von
$$\gamma^3 + (\gamma + 2)^3 + 8\gamma(\gamma + 2) \text{ bis } \gamma^3 + 2(\gamma + 2)^3$$
bedeutet. Indem wir nun γ immer wieder um 2 erhöhen, erhalten wir immer höher liegende Intervalle, in denen N jede Zahl sein kann.

Können wir nun beweisen, daß die Intervalle *ineinander übergreifen*, also die obere Grenze des einen Intervalles schon größer ist als die untere Grenze des nächst höheren Intervalls, so gilt der Satz lückenlos für alle Zahlen $6N$.

Der geforderte Nachweis ist aber leicht, denn die Ungleichung

$$(\gamma - 2)^3 + 2\gamma^3 > \gamma^3 + (\gamma + 2)^3 + 8\gamma(\gamma + 2)$$

ist sicher für hinreichend große γ erfüllt, da, wenn die Ungleichheit auf 0 gebracht wird, links das Glied mit γ^3 positiv ist. Es wird nämlich:

$$\gamma^3 - 20\gamma^2 - 16\gamma - 16 > 0.$$

Die linke Seite wird für $\gamma = 20$ noch negativ, dagegen für $\gamma \geqq 21$ [1]) positiv.

Also gilt der Satz: *Über eine gewisse Grenze hinaus ist jedes Multiplum von 6 als Summe von höchstens 12 positiven Kuben darstellbar.*

Da nun jede Zahl Z von der Form

$$Z = 6N + \alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

ist, so brauchen wir zu den 12 Kuben, durch die $6N$ darstellbar ist, nur noch höchstens 5 Einsen hinzuzufügen, um jede Zahl als Kubensumme zu erhalten. Es gilt also der Satz: *Jede Zahl Z oberhalb einer gewissen Grenze ist sicher als Summe von 17 Kuben darstellbar, von denen mindestens fünf gleich 0 oder 1 sind.*

Soweit geht Maillet. —

Die Grenzbestimmung $\gamma \geqq 21$ gibt als Minimalwert das 25 292-fache von 6, d. h. $6N = 151\,752$. Da jedoch 151 752 zwischen 53^3 und 54^3 liegt, deren Differenz 8587 ist, so wird für jedes Sechsfache, das kleiner als 151 752, wenn der nächst niedere Kubus abgezogen wird, ein Rest erscheinen, der sicher < 8587, d. h. nach der Jacobischen Tabelle höchstens durch 9 Kuben darstellbar ist. Also ist jedes Sechsfache unterhalb 151 752 höchstens eine Summe von 10 Kuben, und der obige Satz gilt für jede Zahl Z ohne Einschränkung.

Das Verfahren von Maillet ist sehr scharfsinnig. Um so eigentümlicher ist es, daß er es unterlassen hat, durch folgende einfache Schlußweise die Anzahl 17 der Kuben auf 13 zu reduzieren. Diese Reduktion ist so einfach, daß ich sie garnicht als eigene Leistung erwähnen würde, wenn das Resultat nicht in unverhältnismäßig höherem Grade wichtig wäre.

Nach Maillet ist jedes Multiplum von 6 eine Summe von höchstens 12 Kuben. Die Zahlen $6m + \alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$ stellt er als $(12 + \alpha)$ Kuben dar, indem er α Einsen addiert. An Stelle dessen ist es aber nur notwendig, α^3 abzusondern und zu berücksichtigen, daß die Kongruenz

$$\alpha^3 \equiv \alpha \pmod{6}$$

für jedes α gilt. So wird:

$$6m + \alpha = \alpha^3 + 6\mu = \alpha^3 + \sum_{12} x^3 = \sum_{13} x^3.$$

Wir haben also den

Satz: *Jede Zahl von der Form $6m + \alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5,)$ ist gleich α^3 plus einer Summe von höchstens 12 Kuben, d. h. eine Summe von höchstens 13 Kuben.*

1) Maillet gibt die Grenze irrtümlich als $\gamma \geqq 13$ an.

Google

Die weitere Reduktion der Anzahl 13 der Kuben stößt auf bisher ungelöste Schwierigkeiten. Es wäre nicht unmöglich, daß dieselben auf dem von Maillet beschrittenen Wege gehoben werden könnten. Dagegen spricht, daß die Grundzahlen der Kuben sich symmetrisch um α und α' gruppieren, diese Zerlegung daher nicht die allgemeinste einer Zahl in regellos verstreute Kuben wäre, daß uns diese Methode also nie die kleinstmögliche Anzahl, nämlich etwa die 9 ergeben könnte. Doch ist es denkbar, daß über eine gewisse Grenze hinaus, wo ja wahrscheinlich jede Zahl höchstens nur 6 Kuben liefert, bei einer Anzahl von 8 Kuben für jedes Multiplum von 6 noch symmetrische Anordnung von je 4 Kuben um α und α' stets durchführbar wäre, daß dann also 9 Kuben für jede Zahl $6m + \varrho$ genügten.

Da schon das quadratische Problem Jacobi auf unendliche Reihen von der Form ΣZ^{k^2} geführt hat, so ist auch schwer anzunehmen, daß die zu weit komplizierteren Funktionen als die elliptischen führenden Reihen ΣZ^{k^3}, auf welche die analytisch-zahlentheoretische Behandlung des vorliegenden Problems führt, uns bald dem Ziele näher bringen werden.

Wir müssen uns daher vorläufig damit begnügen, festgestellt zu haben, daß *jede Zahl durch höchstens 13 Kuben darstellbar ist.*

Ähnliche Reduktionen, wie hier, sind auch möglich in der Mailletschen Arbeit von 1896[1]), in welcher die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von Werten der Polynome $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ in ähnlicher Weise behandelt wird, wie es bei der Darstellung durch Kuben geschah.

Lebesgue hat, wie mir Herr Landau mitteilte, in seinem 1859 erschienenen Buche „Exercices d'analyse numérique" p. 147 bewiesen, *daß jede rationale Zahl als Summe von 4 Kuben rationaler positiver Zahlen darstellbar ist.*

Schließlich komme ich noch einmal auf die Arbeit des Herrn v. Sterneck. Derselbe führt aus, daß für die Zahlen k von 1 bis 23 die Zerlegungen von $3k^3$ in nicht weniger als 3 Kuben und zwar nur in der Form $3k^3 = k^3 + k^3 + k^3$ möglich ist, und vermutet, daß dies ein allgemein geltendes Gesetz sei. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß das nicht der Fall ist. Es ist nämlich:

$$3[21(18^3 + 1)]^3 = [18^4 - 36]^3 + [2 \cdot 18^3 - 1]^3 + [28 \cdot 18^3 + 28]^3,$$

also eine Zahl $3k^3$ in 3 *verschiedene* Kuben zerlegt.[2])

1) Liouville Journ. de math. 1896, p. 363.

2) Der Beweis wird so geführt: Wenn wir die beiden Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad x^3 + y^3 = \beta z^3, \quad 3\zeta^3 = \beta\xi^3 + \eta^3$$

ganzzahlig lösen könnten, dann wäre

$$\text{(1)} \qquad x^3\xi^3 + y^3\xi^3 = \beta\xi^3 z^3, \text{ also } x^3\xi^3 + y^3\xi^3 + \eta^3 z^3 = \beta\xi^3 z^3 + \eta^3 z^3$$
$$= (\beta\xi^3 + \eta^3)z^3 = 3\zeta^3 z^3,$$

also wäre $3\zeta^3 z^3$ in 3 verschiedene Kuben zerlegt, und nicht nur $= (\zeta z)^3 + (\zeta z)^3 + (\zeta z)^3$.

Nun kann aber für $\beta = 17$ das System (A) gelöst werden.

Setzen wir $\zeta = 3$, so ist für $\beta = 17$, $\xi = 1$ und $\eta = 4$:

$$3 \cdot 3^3 = 17 \cdot 1^3 + 4^3.$$

Ferner ist $18^3 + (-1)^3 = 17 \cdot 7^3$, also $x = 18$, $y = -1$, $z = 7$.

Digitized by Google

Ich will nun kürzer auf die additive Zerlegung ganzer Zahlen in *Biquadrate* eingehen. Man kann hier auf viel einfacherem Wege eine obere Grenze für die Anzahl der Biquadrate feststellen, in die sich jede ganze Zahl zerlegen läßt, als dies bei den Kuben der Fall war. Es sind demgemäß auch schon viel früher Sätze bewiesen worden, welche eine obere Grenze feststellen.[1])

Lebesgue[2]) führt schon 1859 einen Beweis Liouvilles an, daß jede ganze Zahl durch höchstens **53** Biquadrate darstellbar ist.

Realis[3]) reduziert die 53 auf **47**.

Viel einfacher, wenngleich auf ähnlicher Grundlage wie der Liouvillesche, ist ein Beweis von Lucas[4]), der eine obere Grenze von **45** Biquadraten feststellt. Das Liouvillesche Resultat geht daraus sofort hervor.

Sei nämlich
$$n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$
eine ganze, in 4 Quadrate zerlegte Zahl, so ist sofort erkennbar, daß
$$6n^2 = (x+y)^4 + (x+z)^4 + (x+u)^4 + (y+z)^4 + (y+u)^4 + (z+u)^4$$
$$+ (x-y)^4 + (x-z)^4 + (x-u)^4 + (y-z)^4 + (y-u)^4 + (z-u)^4.$$

Ist aber jede Zahl der Form $6n^2$ die Summe von 12 Biquadraten, so ist jede Zahl $6N = 6(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2)$ die Summe von 48 Biquadraten, also jede Zahl $M = 6N + \alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), indem höchstens 5 Einsen hinzugefügt werden, die Summe von höchstens 53 Biquadraten. Lucas[5]) reduziert dann noch die von ihm gefundenen 45 auf **41**.

Es läßt sich nun ganz leicht zeigen, *daß jede ganze Zahl in* **39** *Biquadrate zerlegbar ist.*

Nach dem Obigen ist $6n^2$ durch 12 Biquadrate darstellbar. Ist ferner N eine Zahl, die nicht die Form $4^h(8m+7)$ hat, so läßt sie sich durch 3 Quadrate darstellen, also
$$N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

Doch brauchen wir statt eines negativen Wertes von y einen positiven. Diesen gewinnen wir leicht, da Legendre und andere gezeigt haben, daß aus einem Wertsystem $x = f$, $y = g$, $z = h$ der Gleichung $x^3 + y^3 = 17z^3$ ein zweites durch die Formeln
$$x = f(f^3 + 2g^3), \quad y = -g(2f^3 + g^3), \quad z = h(f^3 - g^3)$$
gefunden werden kann Dies gibt hier
$$x = 18(18^3 - 1); \; y = (2 \cdot 18^3 - 1); \; z = 7(18^3 + 1),$$
also wird nach (1)
$$3(\zeta z)^3 = 3[21(18^3 + 1)]^3 = [18(18^3 - 1) \cdot 1]^3 + [(2 \cdot 18^3 - 1) \cdot 1]^3 + [7(18^3 + 1) \cdot 4]^3,$$
q. e. d.

1) Induktiv scheint sich 19 als hinreichende und notwendige obere Grenze zu ergeben.
2) l. c. S. 113.
3) Nouv. Corresp. mathématique éd. p. Catalan Bd. 4. 1878.
4) ebenda.
5) E. Lucas Nouvelles Annal. (2) XVII 1878, S. 536.

Also läßt sich $6N$ sicher durch 36 Biquadrate ausdrücken, sobald $6N$ eine der folgenden Formen hat:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} 6(8m+1) = 48m+6, & 6(8m+2) = 48m+12, \\ 6(8m+3) = 48m+18, & 6(8m+5) = 48m+30, \\ 6(8m+6) = 48m+36. \end{cases}$$

Nun hat 48 nur die vier biquadratischen Reste: 0, 1, 16, 33. Wir versuchen jetzt für jede Zahl $48m+a$ dadurch, daß wir eine möglichst kleine Zahl von Biquadraten subtrahieren, auf eine der Formen (A) zu kommen, und zwar soll die Anzahl der abgezogenen Biquadrate höchstens 3 sein. Wir finden als Reste von $p^4+q^4+r^4$ (mod 48) die folgenden

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} 1 \equiv 1^4; & 16 \equiv 2^4; \quad 33 \equiv 3^4 \\ 2 \equiv 1^4+1^4; & 17 \equiv 1^4+2^4; \quad 18 \equiv 3^4+3^4 \quad 1^4+1^4+2^4; \\ & 32 \equiv 2^4+2^4; \quad 34 \equiv 1^4+3^4 \\ 3 \equiv 1^4+1^4+1^4; & 19 \equiv 1^4+3^4+3^4; \quad 35 \equiv 1^4+1^4+3^4. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß z. B. $48k+31 = 19+48k+12 = 1^4+3^4+3^4 + (48m+12)$, und da $48m+12$ die Form (A) hat, so gestattet $48k+31$ eine Darstellung durch 39 Biquadrate.

Addieren wir nun alle Zahlen (B) sukzessive zu allen Zahlen (A), so erhalten wir eine ganze Reihe von Formen $48m+a$, die durch höchstens 39 Biquadrate ausdrückbar sind.

Man überzeugt sich ohne Mühe, daß so nur die Formen

$$48m+10,\ 11,\ 26,\ 27,\ 42,\ 43$$

als unerledigt übrig bleiben.

Ziehen wir von diesen Zahlen resp. die Zahlen 34, 35, 2, 3, 18, 19 ab, so bleibt jedesmal übrig eine Form $48k+24 = 6\cdot 4(2k+1)$ also $N = 4(2k+1)$.

Diese ist als Summe von 3 Quadraten nur dann *nicht* darstellbar, wenn $2k+1$ die Form $8m+7$ hat. In letzterem Falle braucht man aber nur das Biquadrat 1^4 (welches ja in den obigen Zahlen: 34, 35 etc. stets als einer der höchstens 3 biquadratischen Summanden konstatiert werden kann) durch 5^4 zu ersetzen, das ja $\equiv 1$ (mod 48) ist, und hat dann wegen

$$1^4 = 5^4 - 13\cdot 48$$

z. B. $48m+10 = 34+(48n+24) = 1^4+3^4+(48k+24) = 5^4+3^4 + [48(k-13)+24]$.

Es ist aber wegen $2k+1 = 8m+7$:

$$48(k-13)+24 = 6\cdot 4(8m+7-26) = 6\cdot 4(8l+5) = 6N.$$

Diese Zahl $6N$ ist aber, da N eine Summe von höchstens drei Quadraten ist, sicher eine Summe von höchstens 36 Biquadraten, also $48m+10$ eine solche von 38 Biquadraten. Man sieht, daß sich auch bei den andern 5 restierenden Formen nie mehr als 39 Biquadrate ergeben.

Die höchste abzuziehende Zahl wird $5^4+3^4+3^4 = 787$. Ist $48m+a$ so niedrig, daß der Rest negativ wird, also < 787, so kann man leicht

induktiv feststellen, daß auch hier die Zahl 39 der Biquadrate mehr als genügend ist.

Folgende und auch einen Teil der bisher erwähnten Literaturangaben, sowie die Anregung zur Beschäftigung mit dem Problem verdanke ich der Güte des Herrn E. Landau.

Zornow, De compositione numerorum e cubis integris positivis; Crelle 14, 1835.

Maillet, Intermédiaire des Math. Dez. 1904. S. 293.

Oltramare, Intermédiaire 1895, S. 30, beweist, daß jeder Kubus in 9 positive ganze Kuben zerlegbar ist.

Als streng bewiesen ergibt sich aus dem Obigen, daß jede ganze Zahl in 4 Quadrate oder in 13 Kuben oder in 39 Biquadrate zerlegbar ist. Doch lassen sich *vermutlich* diese Anzahlen auf resp. 4, 9, 19 reduzieren.

Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz.

Von Rudolf Rothe.

Das Problem, eine Fläche mit einem Netz *äquidistanter* Kurven zu bekleiden, heißt, das Quadrat des Linienelements der Fläche auf die Form

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv + dv^2 \tag{1}$$

zurückzuführen. Die Wichtigkeit dieses von Tschebyschef herrührenden Problems tritt vielfach in der Flächentheorie hervor, besonders in dem bekannten Satze von Hatzidakis, wonach eine Fläche, auf der ein Tschebyschefsches Netz durch die Asymptotenkurven gebildet werden kann, notwendigerweise konstantes (negatives) Krümmungsmaß besitzen muß.

Wenn ein auf einem regulären Flächenstück ausgebreitetes, aus beliebigen Kurven (Fäden) zusammengesetztes Netz, dessen Fäden an den Kreuzungspunkten fest verknotet sein mögen, ohne Dehnung auf einem andern, nicht durch Biegung aus dem ersten hervorgegangenen regulären Flächenstück falten- und lückenlos ausgebreitet werden kann, so unterscheiden sich die Linienelemente beider Flächen, bezogen auf die Fäden des Netzes als Koordinatenlinien, nur hinsichtlich des mittleren Koeffizienten. Denn je zwei entsprechende Maschen stimmen in den Längen der entsprechenden unendlichkleinen Seiten überein, unterscheiden sich dagegen hinsichtlich des Öffnungswinkels. Zwei Flächen, für die das Quadrat des Linienelements die Form

$$E\,du^2 + 2\sqrt{EG}\cos\alpha\, du\, dv + G\, dv^2$$

und

$$E\,du^2 + 2\sqrt{EG}\cos\alpha'\, du\, dv + G\, dv^2$$

hat, können also als „mit demselben Netz bekleidet“ bezeichnet werden. Daraus folgt, daß, solange über den Maschenöffnungswinkel keine beschränkende Voraussetzung gemacht wird, jedes beliebige, eine Fläche bekleidende Netz auf einer beliebigen andern Fläche ohne Dehnung ausgebreitet werden kann.

Im Nachstehenden soll zuerst eine besondere Art von Netzen untersucht werden, die ich als Gewebe bezeichne, und in denen das Tschebyschefsche Netz als spezieller Fall enthalten ist. Daran schließt sich der Beweis eines Theorems, welches eine Verallgemeinerung des oben angeführten Hatzidakisschen Satzes bildet.

1. Ein Netz soll als *Gewebe* bezeichnet werden, wenn die beiden von einem Knotenpunkt ausgehenden Fäden einer Masche dieselbe Länge besitzen. Diese Annahme entspricht näherungsweise der praktischen Verfertigung eines Gewebes, bei welchem die Maschen über Stäbchen oder dergl. geknüpft oder geflochten werden. Da $\sqrt{E}\,.\,\partial u$ und $\sqrt{G}\,.\,\partial v$ die Bogendifferentiale der vom Knotenpunkt (u, v) ausgehenden u- bezw. v-Linien sind, so existiert, der obigen Definition zufolge, im Falle eines Gewebes eine Funktion $\varphi(u, v)$ derart, daß

$$(2)\qquad \sqrt{E} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \sqrt{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

ist; dann bedeutet φ die Bogenlänge der u-Linie und der v-Linie, gemessen von irgend einem Anfangswert $\varphi = 0$ an. Das Quadrat des Linienelements einer mit einem Gewebe bekleideten Fläche wird danach

$$(3)\qquad ds^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\alpha\; du\,dv + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

unter $\alpha = \alpha(u, v)$ eine Funktion des Ortes auf der Fläche verstanden.

Wenn $\varphi(u, v) = u + v$, so ergibt sich das Tschebyschefsche Netz (1).

Es soll nun zunächst bewiesen werden, daß es auf jeder Fläche Gewebe gibt, für welche der Maschenöffnungswinkel eine willkürlich anzunehmende Ortsfunktion ist. Zu dem Zweck ist zu zeigen, daß *die Kurven $\varphi(u, v) = const.$ die Eigenschaft haben, das Supplement des Koordinatenwinkels α zu halbieren.* Berechnet man in der Tat den Winkel β, den die positive Richtung der Linie $\varphi(u, v) = \text{const.}$ mit der positiven Richtung der u-Linie einschließt, nach der Formel

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\cos\alpha\,dv}{ds},$$

wo du und dv durch die Relation $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = 0$ zu verbinden sind, so erhält man

$$\cos\beta = -\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi+\alpha}{2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Man führe nun außer den Kurven $\varphi = \text{const.}$ noch die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = 0$$

genügenden Kurven $\psi(u, v) = \text{const.}$ in die Rechnung ein, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = d\varphi, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = \nu\,d\psi,$$

unter ν einen vom Winkel α unabhängigen integrierenden Faktor verstanden.

Digitized by Google

Multipliziert man die erste der vorstehenden Gleichungen beiderseits mit $\cos\frac{\alpha}{2}$, die zweite mit $\sin\frac{\alpha}{2}$ und addiert die Quadrate, so kommt

$$ds^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}\,d\varphi^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\nu^2 d\psi^2, \tag{4}$$

d. h. die Kurven $\psi =$ const. stehen auf den Kurven $\varphi =$ const. senkrecht, sind mithin die Halbierenden des Winkels α.

Es ist aber bekanntlich stets möglich, das Quadrat des Linienelements einer gegebenen Fläche auf eine Form mit verschwindendem mittleren Koeffizienten zu bringen, in welcher der erste Koeffizient eine willkürlich zu nehmende, nicht beständig verschwindende Funktion des Ortes auf der Fläche ist.

Als Integrabilitätsbedingung, welcher die Funktion ν zu genügen hat, ergibt sich die Gleichung

$$2\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\nu}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\nu}{\partial u},$$

welche sich leicht in die Formel

$$\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} \tag{5}$$

verwandeln läßt.

2. Ein Gewebe der Eigenschaft, daß alle Maschen, deren Seitenlängen gleich sind, auch denselben Öffnungswinkel besitzen, soll ein *gestreiftes* Gewebe heißen.

Für ein solches Gewebe ist also α eine Funktion allein der Bogenlänge φ, die Maschen gleichen Öffnungswinkels sind streifenförmig längs der Kurven $\varphi =$ const. angeordnet. Nach dem im Vorhergehenden Gesagten gibt es auf jeder Fläche gestreifte Gewebe. Da aber die Wahl des Maschenöffnungswinkels nicht mehr willkürlich ist, so können zwei beliebige Flächen im allgemeinen nicht mit demselben gestreiften Gewebe bekleidet werden.

Setzt man

$$d\varphi' = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot d\varphi,$$

$$\nu' = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\nu,$$

so wird nach der Gleichung (4)

$$ds^2 = d\varphi'^2 + \nu'^2 d\psi^2,$$

d. h. das System (φ', ψ), also auch das System (φ, ψ) ist orthogonal-geodätisch, die Linien (φ) sind seine geodätischen Linien. Also besteht der Satz:

Die Winkelhalbierenden eines gestreiften Gewebes bilden ein orthogonal-geodätisches System.

Versteht man unter Maschenhöhe den geodätisch gemessenen Abstand des Scheitels des Winkels α vom gegenüberliegenden Knoten, so gilt auch der Satz:

In einem gestreiften Gewebe haben die Maschen eines Streifens dieselbe Höhe. Denn diese ist gleich $d\varphi'$, also längs eines Streifens $\varphi =$ const. konstant.

Digitized by Google

Ferner läßt sich der Satz beweisen:

In einem gestreiften Gewebe sind an jedem Knoten die geodätischen Krümmungen der beiden Fäden einander gleich.

Setzt man nämlich in die für die geodätischen Krümmungen g_u und g_v der Koordinatenlinien geltenden Formeln

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{EG}\,\sin\alpha\cdot g_u = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\cos\alpha\right) - \dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \\ \sqrt{EG}\,\sin\alpha\cdot g_v = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\,\cos\alpha\right) - \dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \end{cases}$$

für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ die für ein Gewebe geltenden Werte (2) ein und bildet die Differenzen auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$(g_u - g_v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial(\alpha,\varphi)}{\partial(u,v)}.$$

Ist nun das Gewebe gestreift, so verschwindet die rechte Seite vorstehender Gleichung identisch, also muß, da $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ nicht beständig gleich Null sein kann,

$$g_u = g_v$$

sein. — Wenn umgekehrt $g_u = g_v$, so verschwindet die linke Seite, also ist α eine Funktion allein von φ, d. h.:

Wenn in einem Gewebe an jedem Knoten die geodätischen Krümmungen der beiden Fäden einander gleich sind, so ist das Gewebe gestreift.

Man bezeichne mit g den gemeinsamen Wert von g_u und g_v, dann genügt g zufolge jeder der Formeln (6) der Gleichung

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(g + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right)\sin\alpha = 0,$$

oder die Funktion

$$\left(g + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = g^*$$

genügt der Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + g^*\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0.$$

Im Verein mit der Relation (5) ergibt sich demnach

$$(8)\qquad \frac{\partial v}{\partial\varphi} + g^* v = 0.$$

Mittels dieser Formel kann man z. B. leicht zeigen, daß *ein aus geodätischen Linien gebildetes gestreiftes Gewebe nur auf den Rotationsflächen und deren Biegungen existieren kann.* Denn für den Fall, daß die Fäden des gestreiften Gewebes aus geodätischen Linien gebildet werden, ist $g = 0$, also g^* eine von φ allein abhängige Größe. Infolge der vorstehenden Gleichung (8) ergibt sich dann aber v in der Gestalt $\Phi(\varphi)\cdot\Psi(\psi)$, sodaß bei passender Wahl der Variablen φ, ψ das Quadrat des Linienelements auf die Form

$$(9)\qquad ds^2 = d\varphi^2 + F(\varphi)\cdot d\psi^2$$

gebracht werden kann, womit die Behauptung bewiesen ist. Nur in dem Falle, wo gleichzeitig der Mascheuöffnungswinkel α eine Konstante ist, würde mit g auch g^* verschwinden, also v eine allein von ψ abhängige Größe

Digitized by Google

werden, d. h. die Fläche eine Developpable sein. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem bekannten Satz von Liouville, nach welchem nur auf der Ebene und ihren Biegungen zwei unter konstantem Winkel sich schneidende Systeme von geodätischen Linien existieren können.[1])

Auf die Rotationsflächen und ihre Biegungen wird man auch geführt durch die Untersuchung der Frage, wann ein äquidistantes Netz (Tschebyschefsches Gewebe) gestreift sein kann. Dann verschwindet nämlich $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v}$, also zufolge der Gleichungen (7) bezw. (8) auch g^* und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, sodaß ν eine Funktion von ψ allein wird, welche unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 genommen werden kann. Das Linienelement (4) gehört also, da $\alpha = \alpha(\varphi)$, den Rotationsflächen und deren Biegungen an.

3. Ich wende mich jetzt zu der oben angekündigten Verallgemeinerung des Hatzidakisschen Theorems und werde folgende beide Sätze beweisen:

1) Wenn auf einer Fläche die Asymptotenkurven ein Gewebe bilden, so ist das Krümmungsmaß der Fläche längs der einen Schar von Krümmungslinien konstant. (Ribaucoursche Flächen.)

2) Wenn aber das Gewebe der Asymptotenkurven gestreift ist, so ist die Fläche eine Rotationsfläche.

Da die Asymptotenkurven in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden, so hat man zum Beweise dieser Sätze auf die Krümmungseigenschaften der Fläche einzugehen, also die flächentheoretischen Fundamentalgleichungen zu untersuchen. Sind E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung in der jetzt üblichen Bedeutung, so ist außer den Bedingungen $L = 0$, $N = 0$ noch das Bestehen folgender Gleichungen notwendig und hinreichend dafür, daß das Netz der Koordinatenlinien (u, v) aus Asymptotenkurven gebildet wird:

$$M = \sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{-K},$$

$$\frac{\partial \log M}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log M}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

darin bedeuten K das Gaußsche Krümmungsmaß und $\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}$ die aus den Größen E, F, G gebildeten Christoffelschen Symbole. Sollen nun die Asymptotenkurven ein Gewebe bilden, so sind die Werte für E, F, G aus dem Linienelement (3) zu entnehmen, und es ergibt sich

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \alpha \sqrt{-K},$$

$$\frac{\partial \log M}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \alpha\right) - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \log M}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \alpha\right) - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

---

1) In bezug auf den Fall des aus *orthogonalen* Fäden gebildeten (gestreiften) Gewebes verweise ich auf eine frühere, in diesen Berichten veröffentlichte Arbeit (Jahrg. I. S. 97). Ein Vergleich mit den dort entwickelten Sätzen zeigt, daß ein großer Teil derselben schlechtweg oder mit geringen Abänderungen für die gestreiften Gewebe gilt.

Digitized by Google

Demnach folgt durch Elimination von M

$$(10)\qquad \frac{\partial \log \sqrt{-K}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial \log \sqrt{-K}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v},$$

und daraus

$$\frac{\partial(\log \sqrt{-K}, \varphi)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Es muß daher K eine Funktion von φ allein sein, welche sich auch auf eine Konstante reduzieren kann. Im letzteren Falle würden die linken Seiten der vorstehenden Formeln verschwinden, also φ von der Form $U(u) + V(v)$ sein müssen. Es ist alsdann stets möglich, das Quadrat des Linienelements auf die Form

$$du^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv + dv^2$$

zu bringen; das ist aber gerade der von Herrn Hatzidakis besprochene Fall.

Im allgemeineren Fall ist das Krümmungsmaß K längs der Kurvenschar $\varphi =$ const. konstant. Da aber bewiesen wurde, daß die Kurven $\varphi =$ const. die Winkelhalbierenden des Systems (u, v) sind, welches von den Asymptotenkurven gebildet wird, so sind sie Krümmungslinien. Damit ist der erste Satz bewiesen. Zu den bemerkenswerten Eigenschaften der Flächen, für welche K längs einer Schar von Krümmungslinien konstant ist, gehört übrigens die, daß bei ihnen die Asymptotenkurven der Evolute denen der Evolvente entsprechen.[1]

Setzt man nun den Wert $K = K(\varphi)$ in die Gleichungen (10) ein, so ergibt sich aus jeder der beiden:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d\log\sqrt{-K(\varphi)}}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Integrabilitätsbedingung (5), welcher die im Linienelement (4) auftretende Funktion ν zu genügen hat, so ergibt sich folgende Formel

$$(11)\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d\log\sqrt{-K(\varphi)}}{d\varphi} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial \varphi}.$$

Aus ihr folgt zunächst, daß im Falle konstanten Krümmungsmaßes die Funktion ν allein von ψ abhängt, also das Quadrat des Linienelements bei passender Wahl der Variablen ψ auf die bekannte Form

$$ds^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}\,d\varphi^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}\,d\psi^2$$

gebracht werden kann, wo φ, ψ jetzt die Parameter der Krümmungslinien bedeuten.

Aus der Formel (11) folgt aber ferner unmittelbar der Beweis des zweiten oben angegebenen Satzes. Ist nämlich das Netz der Asymptotenkurven gestreift, also $\alpha = \alpha(\varphi)$, so wird $\frac{\partial \log \nu}{\partial \varphi}$ ebenfalls allein von φ ab-

1) Vgl. J. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen. S. 227.

Google

hängig, d. h. ν von der Form $\Phi(\varphi)\,.\,\Psi(\psi)$; das Linienelement läßt sich also auf die den Rotationsflächen zukommende Form (9) bringen. Da aber $(\varphi,\,\psi)$ das System der Krümmungslinien ist, so ist die Fläche selbst eine Rotationsfläche.

Charlottenburg, April 1905.

Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen.

Von P. Zühlke.

Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben hat man zu unterscheiden, ob die dazu erforderlichen Hilfskonstruktionen nur theoretisch, d. h. (mit Steiner zu reden) „bloß mittels der Zunge" oder auch wirklich auf dem Zeichenbrett mit Lineal, Zirkel und Schiebdreiecken ausgeführt werden sollen. Was theoretisch kurz und einfach ist, braucht praktisch noch nicht empfehlenswert zu sein; z. B. sind die sogenannten geometrographischen Konstruktionen für die wirkliche Ausführung trotz der Kleinheit des „Einfachheitskoeffizienten" nicht immer genau genug, was von den Geometrographen auch eingestanden wird.[1]) Die Genauigkeit einer Zeichnung ist nämlich außer von der Anzahl der zu ihrer Herstellung notwendigen Elementarkonstruktionen, deren jede mit einem kleinen Fehler behaftet ist, noch wesentlich abhängig von der gegenseitigen Lage der in der Figur benutzten Punkte und Geraden.

Die Lageverhältnisse einer Figur sollen als ungünstig bezeichnet werden, 1) wenn Punkte, die zur Konstruktion gebraucht werden, *unzugänglich* sind, d. h. außerhalb des zur Verfügung stehenden Zeichenblattes liegen, 2) wenn einerseits die Schnittpunkte von Geraden (oder Kreisen), andrerseits die Verbindungslinien von Punkten zwar erreichbar sind, aber *nicht sicher genug bestimmt* erscheinen.

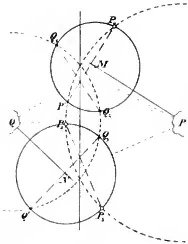
Abgesehen von der bekannten Steinerschen Aufgabe[2]) und der zu ihr dualen, die beide in geometrischen Schulbüchern oft behandelt oder wenigstens gestellt werden, findet man in der Literatur, soweit sie dem Verfasser bekannt geworden und zugänglich gewesen ist, nur wenige Bemerkungen über die Art und Weise, wie die unentbehrlichsten Elementarkonstruktionen zu umgehen oder zu ersetzen sind, wenn ihre „normale" Ausführung durch ungünstige Lageverhältnisse erschwert oder unmöglich gemacht wird; am häufigsten noch trifft man auf solche Notizen in einigen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, so z. B. bei Chr. Wiener, Bd. 1, Leipzig 1884, S. 77, 190, Rohn-Papperitz, Bd. 1, Leipzig 1893 S. 49, J. Schröder, Bd. 1, Leipzig 1901, S. 73, 113, R. Schüssler, Ortho-

1) Vgl. z. B. J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. (Progr. Realsch. i. Thann) Leipzig 1904, S. VII, Fußnote.

2) „Durch einen gegebenen Punkt mittels des Lineals eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden nach einem und demselben Punkte gerichtet ist, wenn nämlich dieser Punkt vorhandener Hindernisse wegen unzugänglich ist." Steiner, Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 469.

Digitized by Google

gonale Axonometrie, Leipzig 1905, S. 19 f. Vgl. auch G. Müller, Zeichnende Geometrie, Eßlingen 1884, § 8, S. 23 und Català-Wiggins, Math. quest. a. solut. from the Educational Times (2) 5, 83, London 1904, Nr. 15401. Ausführliche Anweisungen findet man bei J. Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Teil 4, Dresden 1896 (Vorwort), eine besondere, recht eingehende Behandlung bei A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Progr. (Nr. 564) Gymn. z. h. Kreuz, Dresden 1899. — Aufgaben, die irgend einem Spezialgebiete, wie etwa der darstellenden Geometrie entstammen, wurden im Vortrage nicht berücksichtigt, vielmehr wurden rein planimetrische Aufgaben behandelt, die zu einem der im vorigen Abschnitte als 1) und 2) bezeichneten Typen gehören. Als Beispiel gelte hier etwa die folgende



Aufgabe: *Von zwei Kreisen, deren Mittelpunkte P, Q unzugänglich sind, kennt man je drei Punkte P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3. Die Chordale der beiden Kreise ist zu zeichnen.*

Die unzugänglichen Mittelpunkte P, Q sind durch die (in der Figur nur angedeuteten) Mittellote auf $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$ bestimmt. Man wähle drei nicht zu einem der gegebenen Tripel gehörige Punkte, z. B. Q_1, Q_2, P_1 und verbinde den Mittelpunkt M des durch diese drei Punkte gehenden Kreises mit P. Die von P_1 auf MP gefällte Senkrechte ($P_1 P'$) schneidet $Q_1 Q_2$ in einem Punkte der gesuchten Chordale, nämlich in dem Chordalpunkt der drei Kreise M, P, Q. Führt man dieselbe Konstruktion bei den andern Punkten, z. B. P_2, P_3, Q_3 aus, so ist die Aufgabe gelöst. — Liegen die Punkte $P_1, \ldots Q_3$ von vornherein ungünstig, so kann man sie durch andere ersetzen; z. B. könnte man im zweiten Teil der Konstruktion statt des Punktes Q_3 auch den symmetrischen Gegenpunkt von Q_1 in bezug auf das Mittellot von $Q_2 Q_3$ wählen.

Westend, d. 25. Oktober 1905.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

39. Sitzung am 13. Dezember 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 35 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal (s. u.).

Herr Koebe: 1) Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft. 2) Über eine Einteilung der birationalen Transformationen, durch welche das algebraische Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht.

Herr Güntsche: Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie (s. u.).

40. Sitzung am 31. Januar 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 42 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Koppe: Über die iterierte Sinusfunktion.

Herr Skutsch: Vorführung eines Apparates zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts ebener Kräftesysteme.

Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal.

Von E. Lampe.

Das alte Problem der Dreiteilung eines beliebigen Winkels und seine Erweiterung, das der Teilung eines Winkels in $n(>3)$ Teile, übt noch immer einen gewissen Zauber auf solche Menschen aus, die der nötigen mathematischen Einsicht ermangeln, um den Sinn der Aufgabe zu erfassen. Die Mitteilung, daß die Trisektion eines Winkels mit Zirkel und Lineal, die zuerst vergeblich gesucht, jetzt als unmöglich nachgewiesen sei, findet bei diesen Grüblern keinen Glauben; sie vermeinen vielmehr, noch heute hohe wissenschaftliche Ehren und große Reichtümer gewinnen zu können, wenn sie die Dreiteilung mit Zirkel und Lineal zuwege bringen. Es nützt gar nichts, ihnen zu sagen, daß die geometrische Dreiteilung des Winkels für die Technik keine Bedeutung hat, und daß das Problem auf viele Arten geometrische Lösungen gefunden hat.

Für die Geometrie sind natürlich die auf solche Weise entstandenen angenäherten Lösungen der Winkelteilung ohne besonderes Interesse. Höchstens kann der Lehrer sie als Aufgaben benutzen, entweder die erreichte Annäherung zu bestimmen, unter Umständen auch das Maximum der Abweichung zu berechnen, oder aber den Trugschluß zu entdecken, der bei der Konstruktion gemacht ist.

Von solchen vermeintlichen Lösungen der Winkelteilung mit Zirkel und Lineal soll hier nicht die Rede sein, sondern von gewissen Konstruktionen, die in Anlehnung an die bekannten strengen Lösungen aus diesen auf leichtem Wege herzuleiten sind.

Zur Trisektion eines beliebigen Winkels sind bekanntlich dieselben Mittel erforderlich, welche zur geometrischen Konstruktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung dienen. Eine der einfachsten Trisektionen, die in vielen Lehrbüchern der analytischen Geometrie gelehrt wird, ist die mit Hilfe einer Hyperbel vom Asymptotenwinkel 120⁰. Herr Kübl, gegenwärtig zu Haiger (Nassau) wohnhaft, der sich mit dieser Lösung eingehend beschäftigt und aus ihr eine sehr gute Näherungskonstruktion geschlossen hat, sandte mir vor etwa einem Jahre einen ausführlichen Aufsatz hierüber zu, in welchem unter anderem die erreichte Annäherung durch eine von fünf zu fünf Graden fortschreitende Fehlertabelle veranschaulicht wurde. Auf meinen Rat hat er dann die schon bekannten Ergebnisse seiner Untersuchung gestrichen und die von mir ihm angegebene Ableitung einer allgemeinen Formel für die Abweichung an die Stelle seiner Tabelle gesetzt, aus der er jetzt nur einige Zahlen aufgenommen hat. Die auf diese Weise unter meiner Mitwirkung entstandene Note möge als erster Teil in der neuen Abfassung folgen. Hieran knüpfe ich im zweiten Teile einige Betrachtungen, welche für drei verschiedene angenäherte Winkelteilungen die erreichte Genauigkeit erkennen lassen. Die Rechnungen, welche zu den verhältnismäßig einfachen Ergebnissen führen, können als Übungsaufgaben für den Gebrauch der Reihenentwicklungen bei den elementaren Funktionen benutzt werden.

I.

Eine Näherungskonstruktion für die Dreiteilung des Winkels.

Von Hans Kühl.

Errichte ich über einer festen Grundlinie $MN = 2a$ eine Schar gleichschenkliger Dreiecke, von denen eins durch das Dreieck MEN der Figur 1 dargestellt sein möge, und führe ich in jedem Falle die Dreiteilung des Winkels 2α an der Spitze aus, so ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte dieser Dreiteilenden EE_1 und EE_2 mit dem um den Scheitel E des Winkels als Mittelpunkt durch M und N beschriebenen Kreise bekanntlich gegeben durch je einen Ast zweier kongruenten Hyperbeln. Mache ich den Halbierungspunkt C von MN zum Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Abszissenachse EC ist, so haben diese (nicht gezeichneten) Hyperbeläste die Gleichungen:

$$y = -\tfrac{1}{3}\left(a - \sqrt{4a^2 + 3x^2}\right) \quad \text{und} \quad y = +\tfrac{1}{3}\left(a - \sqrt{4a^2 + 3x^2}\right).$$

Die Gleichungen der in Betracht kommenden Hyperbeln selbst lauten nämlich:

$$3y^2 + 2ay - x^2 - a^2 = 0 \quad \text{und} \quad 3y^2 - 2ay - x^2 - a^2 = 0.$$

Es sind dies zwei Hyperbeln, deren halbe Hauptachse gleich $\frac{2}{3}a$, deren halbe Nebenachse gleich $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$, deren Exzentrizität gleich $\frac{4}{3}a$, deren Asymptotenwinkel 120^0 ist, und deren Mittelpunkte auf der Ordinatenachse liegen und die Ordinaten $-\frac{1}{3}a$, bezw. $+\frac{1}{3}a$ haben.

Diese Tatsachen hat man schon immer zur Herleitung einer Dreiteilungskonstruktion des Winkels MEN benutzt; denn die Lage der Punkte E_1 und E_2 ist dadurch gekennzeichnet, daß sie die Schnittpunkte des Kreises um E über der Sehne MN mit den definierten Hyperheln bilden.

Berücksichtigt man nun, daß für die Dreiteilung eines spitzen Winkels über der Sehne MN von den beiden Hyperbelästen nur dem Scheitel sehr nahe liegende Kurventeile in Frage kommen, so liegt der Gedanke nahe, diese durch die Krümmungskreise im Scheitel zu ersetzen; und man erhält so in der Tat eine Konstruktion von sehr weitgehender Annäherung. Der Nachweis hierfür ist der Zweck dieser Zeilen. Es genügt offenbar, die weiteren Überlegungen nur für die eine Hyperbel mit der Gleichnng $3y^2 + 2ay - a^2 - x^2 = 0$ durchzuführen.

Bezeichne ich mit ξ und η die Mittelpunktskoordinaten und mit ϱ den Radius des Krümmungskreises der Hyperbel in einem beliebigen Punkte x, y, so ist:

$$a^2\xi = -x^3, \quad a^2\eta = 3y(3y^2 + 3ay + a^2),$$

$$a^2\varrho = 2\,(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für den Scheitel der Hyperbel folgt demnach:

$$\xi = 0, \quad \eta = \tfrac{7}{3}a, \quad \varrho = 2a.$$

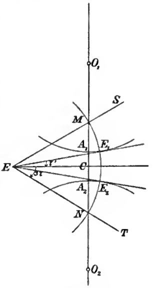


Fig 1.

Unter Benutzung dieser Daten ergibt sich folgende einfache Konstruktion für eine sehr angenäherte Dreiteilung des Winkels $SET = 2\alpha$. Ich beschreibe um den Scheitel E einen beliebigen Kreis, welcher die Schenkel des Winkels in M und N schneide, und ziehe MN. Dann teile ich die Sehne MN in den Punkten A_1 und A_2 in drei gleiche Teile, nehme MN in den Zirkel und messe von A_1 nach oben O_1 und von A_2 nach unten O_2 ab. Ich beschreibe nun um O_1 und O_2 Kreise durch A_1 und A_2, welche den Kreis um E in E_1 und E_2 schneiden. Verbinde ich E mit E_1 und E_2, so ist Winkel SET in drei sehr angenähert gleiche Teile geteilt.

Um ein Maß für die Größe des Fehlers zu haben, betrachte ich den inneren der drei gebildeten Winkel $E_1EE_2 = 2\tau'$, während der wahre Wert des dritten Teiles von 2α mit 2τ bezeichnet werden möge. Dann ist der

Fehler $\delta = \tau' - \tau$ zu berechnen. Setzt man noch $EC = m$, so folgt aus der Figur:

$$\operatorname{tg}\tau' = \frac{y}{m+x}\,.$$

Die Gleichung des Kreises um E ist: $(x+m)^2 + y^2 = a^2 + m^2$ und die des Krümmungskreises im Scheitel der Hyperbel

$$x^2 + \left(y - \frac{7a}{3}\right)^2 = 4a^2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\tau' = a \cdot \frac{7(11a^2 + 9m^2) - 6m\sqrt{80a^2 + 81m^2}}{3(11a^2 + 9m^2) + 14a^2\sqrt{80a^2 + 81m^2}}\,.$$

Nun ist $a = m \operatorname{tg}\alpha$, somit

$$\operatorname{tg}\tau' = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{7(11\operatorname{tg}^2\alpha + 9) - 6\cdot\sqrt{80\operatorname{tg}^2\alpha + 81}}{3(11\operatorname{tg}^2\alpha + 9) + 14\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sqrt{80\operatorname{tg}^2\alpha + 81}}\,.$$

Diese Formel kann für große Winkel direkt zur Berechnung von τ', also des Fehlers $\delta = \tau' - \tau$ dienen. Sie ist für kleine Winkel aber sehr unbequem, indem bei Winkeln unter 20^0 selbst siebenstellige Logarithmen zur Bestimmung von δ nicht ausreichen; sie läßt sich alsdann zweckmäßig durch eine Näherungsformel ersetzen.

Man entwickele $\operatorname{tg}\tau'$ nach Potenzen von $\operatorname{tg}\alpha$. Es ist

$$\sqrt{80\operatorname{tg}^2\alpha + 81} = 9\left(1 + \tfrac{80}{81}\operatorname{tg}^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = 9\left[1 + \tfrac{40}{81}\operatorname{tg}^2\alpha - \tfrac{800}{81^2}\operatorname{tg}^4\alpha + \cdots\right].$$

Daher ist:

$$7(11\operatorname{tg}^2\alpha + 9) - 6\cdot\sqrt{80\operatorname{tg}^2\alpha + 81} = 9 + \tfrac{151}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \tfrac{1600}{243}\operatorname{tg}^4\alpha \mp \cdots$$

$$3(11\operatorname{tg}^2\alpha + 9) + 14\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sqrt{80\operatorname{tg}^2\alpha + 81} = 27 + 159\operatorname{tg}^2\alpha + \tfrac{560}{9}\operatorname{tg}^4\alpha \mp \cdots$$

Mithin ist:

$$\operatorname{tg}\tau' = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{9 + \frac{151}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1600}{243}\operatorname{tg}^4\alpha \mp \cdots}{27 + 159\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{560}{9}\operatorname{tg}^4\alpha \mp \cdots}$$

$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha - \tfrac{8}{81}\operatorname{tg}^3\alpha + \tfrac{376}{6561}\operatorname{tg}^5\alpha \mp \cdots$$

Nun ist aber für $\alpha < \frac{1}{4}\pi$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{2}{15}\alpha^5 + \cdots,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\tau' = \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^3 &+ \tfrac{2}{45}\alpha^5 \cdots \\ - \tfrac{8}{81}\alpha^3 &- \tfrac{8}{81}\alpha^5 \cdots \\ &+ \tfrac{376}{6161}\alpha^5 \cdots \\ \hline \operatorname{tg}\tau' = \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{81}\alpha^3 &+ \tfrac{98}{32805}\alpha^5 \cdots, \end{aligned}$$

woraus mit Hilfe der Beziehung:

$$\operatorname{arctg}\,\theta = \theta - \tfrac{1}{3}\theta^3 + \tfrac{1}{5}\theta^5 \cdots$$

folgt:

$$\tau' = \operatorname{tg}\tau' - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tau' + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5\tau' \mp \cdots,$$

also:

$$\begin{array}{rl} \tau' = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{81}\alpha^3 + \frac{98}{32805}\alpha^5 + \cdots \\ - \frac{1}{81}\alpha^3 - \frac{1}{729}\alpha^5 - \cdots \\ + \frac{1}{1215}\alpha^5 + \cdots \\ \hline \tau' = \frac{1}{3}\alpha + \frac{16}{6561}\alpha^5 + \cdots \end{array}$$

Es ist $\frac{\alpha}{3} = \tau$, und somit wird der gesuchte Fehler δ:

$$\delta = \tau' - \tau = \frac{16}{6561}\alpha^5 \cdots$$

Es ist also für kleine Winkel der Fehler, der beim Ersatz der Hyperbel durcb den Krümmungskreis entstebt, der fünften Potenz des Winkels proportional.

Wegen des Fortlassens der böberen Potenzen von α kann ich diese Formel selbstredend nur zur Fehlerberechnung bei kleinen Winkeln benutzen, doch reicht sie his 45° für Zehntelsekunden aus.

Ich füge einige Daten über die Größe des Fehlers bei:

$2\alpha = 5^0$	10^0	20^0	45^0	
$2\tau = 1^0 40'$	$3^0 20'$	$6^0 40'$	15^0	
$2\delta = 0.000\,159''$	$0.00\,509''$	$0.163''$	$9.4''$	
$2\alpha = 60^0$	90^0	120^0	150^0	180^0
$2\tau = 20^0$	30^0	40^0	50^0	60^0
$2\delta = 40{,}2''$	$5'16''$	$22'40''$	$1^0 12'10''$	$3^0 10'30''$.

Man sieht, daß die Konstruktion für kleine Winkel sehr genau ist, und daß der Fehler selbst bis $2\alpha = 60^0$ nicht den Betrag einer Minute erreicht; führt man also stumpfe Winkel durcb Benutzung ihres Snpplements auf spitze Winkel zurück, und unterwirft man Winkel zwiscben 60^0 und 120^0 znnächst einer Halhierung, so hleiht der Fehler stets kleiner als eine Minute.

II.

Drei Näherungskonstruktionen für die Winkelteilung nebst der zugebörigen Feblerbestimmung.

Von E. Lampe.

Der im vorstehenden angewandte Kunstgriff, die trisezierende Kurve, im behandelten Falle die Hyperbel, längs einer gewissen Strecke durch einen der Kurve nahe kommenden Kreis zu ersetzen, ist mir auch in der Programmabhandlung von E. Marx begegnet: „Über einige Trisektionskurven" (Friedland, 1886). Die Rechnungen, welche ich bei Gelegenheit eines Referates über diese Arbeit durchgeführt habe, um den Grad der erreichten Annäberung zn ermitteln, hahe ich nicht veröffentlicht. Inzwischen hat Collignon den Gedanken, eine Klasse der Sektrixkurven durch ihren Krümmungskreis im Scheitel zu ersetzen, um dadurch angenäherte Winkelteilungen zu erhalten, in einem Teile seiner Abbandlung erörtert: „Courbes divisant en parties

Digitized by Google

égales une série d'arcs de cercles (courbes isocyclotomes)". Assoc. Franç. Montauban (1902), p. 13—44. Der Ausgangspunkt seiner Untersuchung ist genau derselbe wie bei Herrn Kübl. Merkwürdig ist es, daß der französische Gelehrte von der allgemein bekannten Benutzung der von ihm behandelten Sektrixkurven zur Lösung des Problems der Winkelteilung nichts erwähnt, also des Glaubens gewesen zu sein scheint, er habe die Eigenschaften dieser Kurven zum ersten Male erforscht. Die von ihm gemachten Angaben über die erreichte Annäherung bei dem Ersatze der Kurven durch den Krümmungskreis im Scheitel sind in den ersten Anfängen stecken geblieben. Daher scheint es nicht überflüssig, genauere Berechnungen, die sich außerdem noch auf andere Sektrixkurven beziehen, hier folgen zu lassen.

I. In einem Dreiecke ABC sei die Basis $AB = c$ fest, der Winkel B n-mal so groß wie A. Dann ist der Ort der dritten Ecke C eine Kurve, die zur n-Teilung des Winkels B benutzt werden kann. Setzt man den Winkel A gleich φ, $AC = r$ und nimmt A als Pol, AB als Polarachse von Polarkoordinaten r, φ an, so ist die Polargleichung der Kurve:

$$r = c\frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi} = c\left\{\frac{n}{n+1} + \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}\varphi^2 + \cdots\right\}.$$

Für $\varphi = 0$ folgt $r_0 = cn/(n+1) = AS$, wenn S den Scheitel der Kurve auf AB bedeutet. Ferner berechnet man aus der Formel für den Krümmungsradius R in Polarkoordinaten (am bequemsten aus den ersten beiden Gliedern der Reihe für r) den Krümmungsradius in diesem Scheitel

$$R_0 = 3cn/2(n^2-1).$$

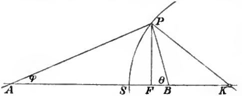


Fig. 2.

Zur Ausführung der angenäherten n-Teilung eines spitzen Winkels trage man demnach (Fig. 2) auf der willkürlich angenommenen Strecke $AB = c$ von A aus die Länge $AS = cn/(n+1) = r_0$ ab, von S aus $3cn/2(n^2-1) = SK$, beschreibe um K als Mittelpunkt mit KS als Radius den Kreis, trage den zu teilenden Winkel $\theta = ABP$ in B an BA an; dann ist PAB $(= \varphi)$ angenähert θ/n.

Beweis: Man fälle das Lot PF von P auf AB, so ist

$$(1) \qquad PK^2 = PF^2 + FK^2.$$

Durch c, θ, φ ausgedrückt erhält man:

$$PF = \frac{c}{\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\theta} = \frac{c\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta},\quad BF = PF\operatorname{cotg}\theta = \frac{c\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta},$$

$$KB = KS - BS = \frac{3cn}{2(n^2-1)} - \frac{c}{n+1} = \frac{c(n+2)}{2(n^2-1)}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so folgt die Gleichung zwischen θ und φ:

$$\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta}\right\}^2 + \left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta} + \frac{n+2}{2(n^2-1)}\right\}^2 = \frac{9n^2}{4(n^2-1)^2}$$

oder nach $\operatorname{tg}\varphi$ geordnet:

$$\{n^2(n+2)+(n+1)^2(n-1)\operatorname{tg}^2\theta\}\operatorname{tg}^2\varphi+n(n-1)\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi$$
$$-(2n+1)\operatorname{tg}^2\theta=0.$$

Die brauchbare Wurzel ist:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{2}\operatorname{tg}\theta\frac{-(n-1)+3(n+1)\left\{1+\frac{4}{9n^2}(2n+1)(n-1)\operatorname{tg}^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}}{n^2(n+2)+(n+1)^2(n-1)\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Nun ist

$$\left\{1+\frac{4}{9n^2}(2n+1)(n-1)\operatorname{tg}^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$1+\frac{2}{9n^2}(2n+1)(n-1)\operatorname{tg}^2\theta-\frac{2}{81n^4}(2n+1)^2(n-1)\operatorname{tg}^4\theta+\cdots$$

Substituiert man diesen Wert in dem Zähler des Bruches für $\operatorname{tg}\varphi$ und entwickelt dann diesen Bruch durch Division in eine Reihe nach Potenzen von $\operatorname{tg}\theta$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{n}\operatorname{tg}\theta-\frac{n^2-1}{3n^3}\operatorname{tg}^3\theta+\frac{1}{27n^5}(n-1)^2(n+1)(5n+4)\operatorname{tg}^5\theta\pm\cdots$$

Durch Einsetzung von $\operatorname{tg}\theta=\theta+\frac{1}{3}\theta^3+\frac{2}{15}\theta^5+\cdots$ folgt weiter

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{\theta^3}{3n^3}+\frac{\theta^5}{135n^5}(-2n^4-5n^3+5n+20)+\cdots=t.$$

Also endlich $\varphi=\operatorname{arctg}t=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\cdots$, oder nach einfachen Reduktionen:

$$\varphi=\frac{\theta}{n}-\frac{\theta^5}{135n^5}(n^2-1)(2n+1)(n+2)\pm\cdots$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen den Winkeln φ und θ; charakteristisch ist der Wegfall der dritten Potenz in der Reihe. Bei kleinen Winkeln θ kann als einziges Fehlerglied in der Differenz $\delta=\varphi-\theta/n$ das Glied mit der fünften Potenz von θ genommen werden, dessen numerischer Koeffizient mit n abnimmt. Die hier zum Ausgang dienenden Kurven sind die von Collignon am angeführten Orte untersuchten.

II. In einem Dreiecke ABC sei die Basis $AB=c$ fest, der Winkel B $(n-1)$-mal so groß wie A. Dann ist der Außenwinkel von C n-mal so groß wie A; die zu den Kurven unter I gehörige Ortskurve für C kann daher zur n-Teilung dieses Außenwinkels dienen: Der Kreisbogen über AB als Sehne, welcher $\pi-\theta$ als Peripheriewinkel faßt, bestimmt auf der Ortskurve denjenigen Punkt C, für den der Winkel $CAB=\theta/n$ ist. Die Polargleichung der Ortskurve für C ist:

$$r=c\frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}=c\left\{\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\varphi^2+\cdots\right\}.$$

Für $\varphi=0$ folgt $r_0=(n-1)c/n=AS$, wenn S der Scheitel der Kurve auf AB ist. Der Krümmungsradius R_0 im Scheitel ist:

$$R_0=3c(n-1)/2n(n-2).$$

Zur Ausführung einer angenäherten Konstruktion trage man auf der beliebig gewählten Strecke $AB = c$ (Fig. 3) von A aus die Länge $AS = (n-1)\,c/n = r_0$ ab, von S aus die Strecke $R_0 = 3c\,(n-1)/2n\,(n-2) = SK$ und beschreibe um K als Zentrum mit KS als Radius den Kreis.

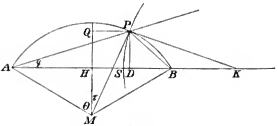


Fig. 3.

Ein zweiter Kreis über AB als Sehne, der den Peripheriebogen $\pi - \theta$ faßt, (Radius $r = MA = MB$) schneide den ersten in P, so ist $PAB\ (= \varphi)$ angenähert θ/n.

Beweis. Aus $AS = \frac{n-1}{n}c$ folgt $HS = AS - \frac{1}{2}c = \frac{n-2}{2n}c$,

$$HK = HS + SK = \frac{n^2 - n + 1}{2n(n-2)}c = \frac{n^2 - n + 1}{n(n-2)} r \sin\theta,$$

weil $\theta = AMH$. Nun ist, wenn PD Lot zu AB, $PD^2 + DK^2 = PK^2$, oder wenn man den Winkel $PMQ = \tau$ einführt:

$$r^2(\cos\tau - \cos\theta)^2 + r^2\left\{\frac{n^2 - n + 1}{n(n-2)}\sin\theta - \sin\tau\right\}^2 = \frac{9r^2(n-1)^2\sin^2\theta}{n^2(n-2)^2}.$$

Nach einigen Reduktionen geht diese Beziehung zwischen den Winkeln τ und θ über in:

$$1 + \frac{n-1}{n^2}\sin^2\theta - \frac{n^2 - n + 1}{n(n-2)}\sin\tau\sin\theta = \cos\theta\cos\tau.$$

Quadriert man diese Gleichung und ersetzt $\cos^2\tau$ durch $1 - \sin^2\tau$, so ergibt sich folgende quadratische Gleichung für $\sin\tau$:

$$\{(n^2-1)(2n-1)\sin^2\theta + n^2(n-2)^2\}\sin^2\tau$$
$$- 2\sin\theta\sin\tau(n^2 - n + 1)\frac{(n-2)}{n}\{n^2 + (n-1)\sin^2\theta\}$$
$$+ \frac{(n-2)^2}{n^2}\sin^2\theta\,\{n^2(n^2 + 2n - 2 + (n-1)^2\sin^2\theta\} = 0.$$

Die Diskriminante $\varDelta$ dieser Gleichung verschwindet für $\sin^2\theta = 1$, hat also den Faktor $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, läßt sich also in die Form bringen

$$\varDelta = 9n^2\sin^2\theta(n-1)^2(n-2)^2\left\{1 - \frac{(n-2)^2}{9n^2}\sin^2\theta\right\}\cos^2\theta.$$

Demnach folgt:

$$\sin\tau = \frac{(n-2)\sin\theta\,\{(n^2-n+1)(n^2+\overline{n-1}\sin^2\theta) - 3n^2(n-1)\cos\theta\,\varDelta_1^{1/2}\}}{n\,\{(n^2-1)(2n-1)\sin^2\theta + n^2(n-2)^2\}},$$

wo gesetzt ist:

$$\varDelta_1^{1/2} = \left\{1 - \frac{(n-2)^2}{9n^2}\sin^2\theta\right\}^{1/2} = 1 - \frac{(n-2)^2}{18n^2}\sin^2\theta - \frac{(n-2)^4}{648n^4}\sin^4\theta\cdots$$

$$= 1 - \frac{(n-2)^2\theta^2}{18n^2} + \frac{11n^2+4n-4}{648n^4}(n-2)^2\theta^4 \pm \cdots$$

Man ersetze überhaupt in dem Ausdruck für $\sin\tau$ sowohl $\sin\theta$ als $\cos\theta$ durch ihre Reihenentwicklungen nach Potenzen von θ, so geht nach Ahtrennung des Faktors $\frac{n-2}{n}$ der Zähler üher in:

$$n^2(n-2)^2\theta + \tfrac{1}{6}(-n^4+20n^3-30n^2+20n-10)\theta^3$$

$$+\frac{\theta^5}{1080n^2}(9n^6-1156n^5+2376n^4-2360n^3+980n^2+240n-80)+\cdots$$

und der Nenner in:

$$n^2(n-2)^2 + (n^2-1)(2n-1)\theta^2 - (n^2-1)(2n-1)\frac{\theta^4}{3} + \cdots$$

Somit folgt nach Ausführung der Division:

$$\sin\tau = \frac{n-2}{n}\left\{\theta - \tfrac{1}{6}\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\theta^3 + \frac{\theta^5}{1080n^4}(9n^4-40n^3+200n^2-320n+160)\pm\cdots\right\}.$$

Setzt man $\sin\tau = s$, so ist $\tau = \arcsin s = s + \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{3}{40}s^5 + \cdots$, also

$$\tau = \frac{n-2}{n}\theta + \frac{2(n-2)(2n-1)(n^2-1)}{135n^5}\theta^5 \pm \cdots$$

Nun ist $\theta - \tau = PME = 2PAB = 2\varphi$; mithin:

$$\varphi = \frac{1}{n}\theta - \frac{(n-2)(2n-1)(n^2-1)}{135n^5}\theta^5 \pm \cdots$$

Die Differenz $\delta = \varphi - \theta/n$ wird also für kleine Winkel θ durch das Glied mit der fünften Potenz von θ gegehen. Für $n = 3$ ist dieses Glied $\frac{8}{6561}\theta^5$, wie nach der Mitteilung des Herrn Kübl aus der dort angegehenen Formel für diesen besonderen Fall von mir herechnet war.

III. In einem Dreiecke ABC sei die Basis $AB = c$ fest, der Außenwinkel bei B n-mal so groß wie der Winkel $A\,(=\varphi)$, mithin $C = (n-1)\varphi$. Dann hat die Ortskurve für C, die als Sektrixkurve für die n-Teilung eines Winkels gebraucht werden kann, die Polargleichung:

$$r = c\frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi} = c\left\{\frac{n}{n-1} - \frac{n(2n-1)}{6(n-1)}\varphi^2 \pm \cdots\right\}.$$

Für $\varphi = 0$ folgt $r_0 = nc/(n-1) = AS$, wenn S der Scheitel der Kurve auf AB ist. Ferner ist der Krümmungsradius R_0 in diesem Scheitel $R_0 = 3cn/2(n^2-1)$.

Zur angenäherten n-Teilung trage man (Fig. 4) auf der willkürlich angenommenen Strecke $AB = c$ von A aus $AS = r_0$ ab, von S aus (in der Richtung SA) $SK = R_0$, beschreibe um K mit R_0 den Kreis, trage im Punkte B den zu teilenden Winkel $\theta = PBS$ an, so ist PAS angenähert θ / n.

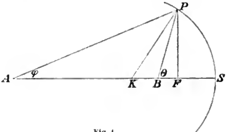


Fig. 4.

Beweis. Man fälle das Lot PF auf AB, so ist $KP^2 = KF^2 + PF^2$.

Nun ist $KB = KS - BS = \frac{3cn}{2(n^2-1)} - \frac{c}{n-1} = \frac{(n-2)c}{2(n^2-1)}$,

$$PF = \frac{c}{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\theta} = \frac{c \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}, \quad BF = PF \operatorname{cotg}\theta = \frac{c \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}.$$

Also folgt zwischen θ und φ die Beziehung:

$$\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}\right\}^2 + \left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi} + \frac{n-2}{2(n^2-1)}\right\}^2 = \frac{9n^2}{4(n^2-1)^2},$$

oder für $\operatorname{tg}\varphi$ die quadratische Gleichung:

$$\{n^2(n-2) + (n-1)^2(n+1)\operatorname{tg}^2\theta\}\operatorname{tg}^2\varphi + n(n+1)\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi - (2n-1)\operatorname{tg}^2\theta = 0,$$

woraus als brauchbare Wurzel folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{2}\operatorname{tg}\theta \frac{-(n+1) + 3(n-1)\left\{1 + \frac{4}{9n^2}(2n-1)(n+1)\operatorname{tg}^2\theta\right\}^{1/2}}{n^2(n-2) + (n-1)^2(n+1)\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Eine analoge Rechnung wie unter I liefert:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{n}\operatorname{tg}\theta - \frac{n^2-1}{3n^3}\operatorname{tg}^3\theta + \frac{1}{27n^5}(n+1)^2(n-1)(5n-4)\operatorname{tg}^5\theta \pm \cdots$$

$$= \frac{1}{n}\theta + \frac{\theta^3}{3n^3} + \frac{\theta^5}{135n^5}(-2n^4 + 5n^3 - 5n + 20) + \cdots$$

Hieraus ergibt sich dann die Schlußformel:

$$\varphi = \frac{1}{n}\theta - \frac{(n^2-1)(2n-1)(n-2)}{135n^5}\theta^5 \pm \cdots$$

Die Differenz $\delta = \varphi - \frac{1}{n}\theta$ hat also hier im ersten Gliede denselben Wert wie bei II. Der numerische Koeffizient von θ^5 hat extreme Werte, wenn $n^4 - 5n^3 + 10n - 5 = 0$, d. h. für

$$n_1 = 4{,}57434, \quad n_2 = 1{,}27977, \quad n_3 = 0{,}591023, \quad n_4 = -1{,}44513,$$

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

und zwar bestimmt n_1 ein Maximum. Faktisch sind die ersten hier in Betracht zu ziehenden Werte des Koeffizienten für

$$n = 3: \quad \frac{8}{6561} = \frac{1}{820\frac{1}{8}},$$

$$n = 5: \quad \frac{24}{15625} = \frac{1}{651\frac{1}{24}},$$

$$n = 7: \quad \frac{208}{151263} = \frac{1}{727\frac{74}{208}} \text{ usw.}$$

Die Annäherung im Falle I ist, weil der Koeffizient von θ^5 ein wenig größer als bei II und III wird, um ein geringes weniger gut als in den Fällen II und III. Gemeinschaftlich ist den drei Fällen das Verschwinden der dritten Potenz von θ in dem Ausdrucke für S offenbar veranlaßt durch den Umstand, daß der Krümmungskreis im Scheitel der Sektrixkurve sie daselbst vierpunktig berührt.

Wenn man einen beliebigen Winkel θ in n gleiche Teile zerlegen soll, kann man immer zunächst einen passend gewählten Winkel α n-mal von θ abschneiden. Der Restbogen $\theta' = \theta - n\alpha$, der nach wenigen Versuchen sehr klein gemacht werden kann, ist dann nach einer der vorstehend angegebenen Methoden zu teilen, und hierbei wird der Fehler ungemein klein. Demnach kann $\theta/n = \alpha + \theta'/n$ mit sehr großer Genauigkeit unter Anwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Hiermit ist der Weg gewiesen, aus den exakten Lösungen des Problems der Winkelteilung mit Hilfe höherer ebener Kurven angenäherte Lösungen herzuleiten, die nur die Anwendung von Zirkel und Lineal erfordern, und wie sich aus dem vorstehenden ergibt, sind die auf diesem Wege planmäßig hergeleiteten Annäherungskonstruktionen viel genauer als die durch Probieren gefundenen.

Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie.

Von R. Güntsche.

1. In einem Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c, dem halben Umfange s, dem Inkreisradins ϱ und dem Inhalt I ist nach dem Halbwinkelsatze

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \frac{s-a}{\varrho},$$

mithin

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \frac{s(s-a)}{I}.$$

Wenn also die Seiten und der Inhalt des Dreiecks rational sind, sind es auch die Kotangenten der Hälften der drei Winkel des Dreiecks. Diese drei Kotangenten mögen mit α, β, γ bezeichnet werden; zwischen ihnen besteht die Beziehung

(1) $$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma.$$

Digitized by Google

Nimmt man zwei von diesen drei Winkelfunktionen, etwa α und β, rational, sonst willkürlich, an, so ist mithin die dritte rational bestimmt durch die Gleichung

$$(2) \qquad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-1}.$$

Die Seiten und der Inhalt ergeben sich dann, wenn man $\varrho = 1$ voraussetzt, aus

$$s-a=\alpha, \quad s-b=\beta, \quad s-c=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-1}.$$

Setzt man aber $\varrho = \alpha\beta - 1$, so wird

$$s-a=\alpha(\alpha\beta-1), \quad s-b=\beta(\alpha\beta-1), \quad s-c=\alpha+\beta, \quad s=\alpha\beta(\alpha+\beta),$$

und für die Seiten und den Inhalt erhält man die bekannten Ausdrücke:

$$(3) \quad a=\alpha(\beta^2+1), \; b=\beta(\alpha^2+1), \; c=(\alpha\beta-1)(\alpha+\beta), \; I=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1).$$

Wird dagegen $\varrho = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta}$ angenommen, so ergibt sich:

$$(4) \quad a=\beta+\frac{1}{\beta}, \quad b=\alpha+\frac{1}{\alpha}, \quad c=\alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}, \quad I=\alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}.$$

Fügt man den Ausdrücken für die Seiten eine beliebige rationale Zahl (k), dem Ausdruck für den Inhalt das Quadrat derselben (k^2) als Faktor hinzu, so stellen diese Ausdrücke (4) die umfassende Lösung aller heronischen Dreiecke bei festgesetzter Längeneinheit dar.

Es ist zu beachten, daß α, β und γ, wenn man von Ausartungen absieht, außer der Relation (1) keiner Einschränkung unterliegen; negative Werte, die etwa dafür auftreten, kann man dadurch beseitigen, daß man

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha, & \beta, & \gamma \quad \text{ersetzt durch} \\ -\alpha, & \frac{1}{\beta}, & \frac{1}{\gamma}, \\ \alpha, & -\frac{1}{\beta}, & -\frac{1}{\gamma}, \\ -\alpha, & -\beta, & -\gamma. \end{cases}$$

Wir betrachten deshalb Typen von Dreiecken, welche sich nur in der durch (5) charakterisierten Weise unterscheiden, als nicht wesentlich voneinander verschieden. Die unter (5) angegebene Umwandlung, die mit der „stetigen Transformation"[1]) verwandt ist, wird im folgenden wiederholt vorgenommen werden, ohne daß jedesmal besonders darauf hingewiesen wird.

Das obige Verfahren zur Behandlung heronischer Dreiecke findet sich u. a. bei F. Bessell[2]); im wesentlichen geht es auf Vieta zurück. Vor einer Reihe von Jahren habe ich eine größere Anzahl Aufgaben an rationalen Figuren unter Benutzung dieses Verfahrens behandelt; es führte u. a. zur

1) Siehe z. B. E. Lemoine: Transformation continue dans le triangle. Arch. (3) **8**, 243 ff., 1902.
2) Arch. (1) **65**, 371, 1880.

Auffindung von Tetraedern, in denen die Kanten, die Inhalte der Begrenzungsdreiecke und der Rauminhalt rational sind. Vor kurzem ist nun eine Schrift von Herrn H. Schubert[1]) erschienen, in welcher in ähnlicher Weise vorgegangen wird. Es findet sich daselbst u. a. die Aufgabe: „Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie zu finden“, welche Herr Schubert schon früher[2]) auf anderem Wege bearbeitet hatte. Um Herrn Schuberts Ausführungen zu ergänzen und in einem Punkte zu berichtigen, möge im folgenden dargelegt werden, wie ich die Aufgabe damals behandelt habe. Der Ausgangspunkt ist im wesentlichen derselbe wie bei Herrn Schubert.

2. Es wird ein Dreieck ABC verlangt, in dem die Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, der Inhalt 2Φ und die Mittellinie $CF = \frac{1}{2}d$ rationale Maßzahlen besitzen. Die Kotangenten der Hälften der Winkel CAB, ABC, BCA, BCF, ACF, CFB mögen mit α, β, γ, φ, ψ, ν bezeichnet werden. Da die Teildreiecke CFA und CFB ebenfalls heronisch sind, so gilt nach der obigen Darstellung (4) der heronischen Dreiecke die Gleichung:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} - \nu + \frac{1}{\nu} = \nu - \frac{1}{\nu} + \beta - \frac{1}{\beta}. \tag{6}$$

Dieser ist durch rationale Werte von α, ν und β zu genügen; die Seiten und der halbe Flächeninhalt ergeben sich dann aus (4) in der Form

$$\left\{\begin{aligned} &a = \beta + \frac{1}{\beta},\quad b = \alpha + \frac{1}{\alpha},\quad c = \alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta},\quad d = 2\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right),\\ &\Phi = \tfrac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta}\right) = \alpha - \frac{1}{\alpha} - \nu + \frac{1}{\nu} = \nu - \frac{1}{\nu} + \beta - \frac{1}{\beta}; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

die Anwendung der Gleichung (2) liefert die übrigen Winkelfunktionen.

Um die Gleichung (6) symmetrischer zu gestalten, führen wir nach Bedarf

$$\beta' = \frac{1}{\beta} = \cot\tfrac{1}{2}(\pi - ABC)$$

statt $\beta = \cot\frac{1}{2}ABC$ ein; sie lautet hiernach

$$2\,\frac{\nu^2 - 1}{2\nu} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} + \frac{\beta'^2 - 1}{2\beta'}. \tag{8}$$

Hier sei die Bemerkung eingeschaltet, daß man mit *einer* Lösung der Aufgabe zugleich noch drei andere erhält. Bezeichnen wir nämlich die zu F diametralen Gegenpunkte von C, sowie von D und E, den Mitten von BC und CA, mit C', D', E', so lassen sich folgende vier Lösungssysteme auseinander ableiten:

(9)

$\triangle ABC$	a	b	c	d	α	β	γ	ν
$\triangle BCF$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}c$	a	b	β	φ	ν	$1:\gamma$
$\triangle CC'B$	b	a	d	c	φ	ψ	$1:\gamma$	$1:\nu$
$\triangle CAF$	$\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d$	b	a	ψ	α	$1:\nu$	γ.

1) H. Schubert, Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. 48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905. Leipzig 1905, Spamer. Siehe daselbst S. 21 ff.

2) Unt.-Bl. f. Math. u. Nat. 6, Nr. 4, 70—71, 1900.

Digitized by Google

Die Winkelfunktionen sind durch folgende Gleichnngen miteinander verkettet, die man aus (1) und (8) erhält:

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma \\ \beta + \varphi + \nu = \beta\varphi\nu \\ \varphi + \psi + \frac{1}{\gamma} = \varphi\psi\frac{1}{\gamma}. \\ \psi + \alpha + \frac{1}{\nu} = \psi\alpha\frac{1}{\nu}. \end{cases} \qquad (11)\quad \begin{cases} 2\,\frac{\nu^2-1}{2\nu} = \frac{\alpha^2-1}{2\alpha} - \frac{\beta^2-1}{2\beta} \\ -2\,\frac{\gamma^2-1}{2\gamma} = \frac{\beta^2-1}{2\beta} - \frac{\varphi^2-1}{2\varphi} \\ -2\,\frac{\nu^2-1}{2\nu} = \frac{\varphi^2-1}{2\varphi} - \frac{\psi^2-1}{2\psi} \\ 2\,\frac{\gamma^2-1}{2\gamma} = \frac{\psi^2-1}{2\psi} - \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}. \end{cases}$$

Mit einem heronischen Parallelogramm $BCAC'$ hat man also auch ein zweites $DED'E'$.

Die Gleichung (8) läßt sich in die Form bringen:

$$(12)\qquad 2\nu^2\beta'\alpha - \nu\,[\beta'^2\alpha + \beta'(\alpha^2-1) - \alpha] - 2\beta'\alpha = 0.$$

Diese Gleichung soll nun durch rationale Werte von α, ν und β' erfüllt werden. Sie ist in bezug auf alle drei Größen quadratisch, es liegt also, wenn man eine, etwa α, als gegebene rationale Zahl betrachtet, die z. B. einem willkürlich zu wählenden Parameter gleich sein kann, eine Aufgabe der Art vor, wie sie bei verwandten Problemen häufig auftritt, nämlich rationale Werte für x und y zu finden, welche der Gleichung genügen:

$$(13)\quad (e_{22}x^2 + e_{12}x + e_{02})\,y^2 + (e_{21}x^2 + e_{11}x + e_{01})\,y + (e_{20}x^2 + e_{10}x + e_{00}) = 0,$$

in der die Koeffizienten $e_{22}, \ldots e_{00}$ rational sind. Diese ist bis jetzt nicht umfassend gelöst, wohl aber hat bekanntlich Euler eine Methode angegeben[1]), welche aus einer bekannten Lösung x_0, y_0 eine unendliche Serie neuer finden lehrt. Wenn man nämlich den Wert x_0 für x in die Gleichung (13) einsetzt, liefert sie für y außer der Wurzel y_0 noch eine zweite rationale y_1; diesem Werte y_1 entspricht in derselben auch in x quadratischen Gleichung außer der Wurzel x_0 noch eine zweite x_1; diesem Werte x_1 entspricht außer y_1 noch ein zweiter y_2 usw. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine unendliche Serie von Wertepaaren für x, y.

3. Wollte man nun dies Verfahren auf die Gleichung (12) in der Weise anwenden, daß man α als unveränderlich ansieht und aus einem bekannten Wertepaare $\nu = \nu_0$, $\beta' = \beta_0'$ einen neuen β_0' zugehörigen Wert ν_1 aufsucht, so würde man zunächst nichts Neues finden, denn es würde sich $\nu_1 = -\frac{1}{\nu_0}$ ergehen; das bedeutet aber nur, daß der zugehörige Winkel um π vergrößert wird. Das Eulersche Verfahren wird aber brauchbar, wenn man ξ statt ν einführt durch die Substitution

$$(14)\qquad \nu = \frac{\xi}{\beta'}.$$

Entsprechendes gilt in dem etwas allgemeineren Falle, in dem die Gleichung (13) die besondere Form hat:

$$(15)\qquad px^2y + qxy^2 + rxy + hqx + hpy = 0,$$

1) Diese findet sich u. a. in Comm. arithm. coll. 2, 474 ff., Petersburg 1849. Über den Zusammenhang dieses Verfahrens mit den elliptischen Funktionen und dem Abelschen Theorem siehe C. G. J. Jacobi, Journ. f. Math. 13, 353—355, 1835, und K. Schwering, Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen, Progr. Düren 1898.

Digitized by Google

die deshalb noch von Interesse ist, weil sie auch die Gleichung in sich begreift, welche E. Kummer[1]) der Aufsuchung von rationalen Vierecken zugrunde legt. Für die Gleichung (15) läßt sich das Eulersche Verfahren in folgender Weise übersichtlich gestalten, wie eine einfache Umrechnung ergibt.

(16) Es seien die Funktion $\theta(\xi_i)$ und die Bezeichnungen $\bar{x}_i$ und $\bar{y}_i$ eingeführt durch

$$\theta(\xi_i) = \frac{q\xi_i + ph}{p\xi_i + qh}, \quad \bar{x}_i = \frac{h}{x_i}, \quad \bar{y}_i = \frac{h}{y_i}.$$

Aus dem Paare bekannter Anfangswerte

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

bilde man

$$\xi_1 = x_0 y_0, \quad \theta_1 = \theta(\xi_1), \quad x_1 = y_0\theta_1, \quad y_1 = \bar{x}_0\theta_1,$$
$$\xi_2 = x_1 y_1, \quad \theta_2 = \theta(\xi_2), \quad x_2 = y_1\theta_2, \quad y_2 = \bar{x}_1\theta_2,$$
$$\xi_3 = x_2 y_2, \quad \theta_3 = \theta(\xi_3), \quad x_3 = y_2\theta_3, \quad y_3 = \bar{x}_2\theta_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ \ldots$ stellen dann neue Paare von Lösungen der Gleichung (15) dar.

Legt man das Wertepaar $x = x_0$, $y = \bar{y}_0$ zugrunde, so erhält man eine zweite entsprechende Reihe von Lösungspaaren, die sich ebenfalls ins Unendliche erstreckt. Aber hier wie in allen ähnlichen Fällen gilt die Bemerkung, daß das Verfahren unter Umständen versagen kann, weil es von selbst abbricht oder auf bekannte Lösungen zurückführt.

Für unsere Grundgleichung

$$(12) \qquad 2\nu^2\beta'\alpha - \nu\left[\beta'^2\alpha + \beta'(\alpha^2 - 1) - \alpha\right] - 2\beta'\alpha = 0$$

haben wir also nach folgender Vorschrift zu verfahren:

(17) Es seien die Funktion $\theta(\xi_i)$ und die Bezeichnungen $\bar{\nu}_i$ und $\bar{\beta}'_i$ eingeführt durch

$$\theta(\xi_i) = -\frac{\xi_i + 2}{2\xi_i + 1}, \quad \bar{\nu}_i = -\frac{1}{\nu_i}, \quad \bar{\beta}'_i = -\frac{1}{\beta'_i};$$

aus einem Paare bekannter Anfangswerte

$$\nu = \nu_0, \quad \beta' = \beta'_0$$

bilde man

$$\xi_1 = \nu_0\beta'_0, \quad \theta_1 = \theta(\xi_1), \quad \nu_1 = \beta'_0\theta_1, \quad \beta'_1 = \bar{\nu}_0\theta_1,$$
$$\xi_2 = \nu_1\beta'_1, \quad \theta_2 = \theta(\xi_2), \quad \nu_2 = \beta'_1\theta_2, \quad \beta'_2 = \bar{\nu}_1\theta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\nu_1, \beta'_1;\ \nu_2\beta'_2;\ \ldots$ stellen dann neue Lösungspaare der Gleichung (12) dar.

4. Es handelt sich also nur noch darum, Anfangswerte zu finden, welche der Gleichung (12) genügen; hierbei sind triviale Lösungen nicht ohne weiteres zu verwerfen, weil sich aus ihnen andere, nicht triviale ergeben können. Solche Anfangswerte bieten sich aber u. a. leicht in den folgenden Fällen dar, wobei p einen beliebigen rationalen Parameter bedeutet.

1) Journ. f. Math. 37, 1 ff., 1848.

Digitized by Google

a) $\alpha = p,\ \nu = 1,\ \beta' = \frac{1}{p}$. Dies ergibt sich aus Gleichung (8); es liegt in diesem Falle ein aus zwei pythagoreischen Dreiecken zusammengesetztes gleichschenkliges Dreieck vor.

b) $\alpha = p,\ \nu = \frac{p^2-1}{2p},\ \beta' = \frac{p-1}{p+1}$: jedes pythagoreische Dreieck stellt nämlich auch eine Lösung unserer Aufgabe dar.

c) $\alpha = p,\ \nu = \frac{p(p-2)}{2p-1},\ \beta' = \frac{p-2}{2p-1}$ und

d) $\alpha = p,\ \nu = \frac{p(p+2)}{2p+1},\ \beta' = -\frac{p+2}{2p+1}$.

Beide Fälle erhält man, wenn man die Gleichung (8) auf die Form

$$\frac{2(\nu+1)(\nu-1)}{\nu} = \frac{(\alpha\beta'-1)(\alpha+\beta')}{\alpha\beta'} \tag{18}$$

bringt und $\nu = \pm\alpha\beta'$ setzt.[1])

e) $\alpha = \nu = \beta' = p$.

f) $\alpha = p,\ \nu = 0,\ \beta' = 0$.

Diese beiden Fälle e) und f) ergeben sich aus den Gleichungen (8) und (12) und bedeuten, daß eine Ecke ins Unendliche gerückt ist.

g) $\alpha = p,\ \nu = \frac{2(p^2-1)}{3p},\ \beta' = \frac{p^2-1}{3p}$.

Dieser Fall wird erhalten, wenn man der Gleichung (12) die Gestalt gibt

$$\nu\beta'[2\nu\alpha - (\alpha^2 + \beta'\alpha - 1)] + \alpha(\nu - 2\beta') = 0 \tag{19}$$

und die beiden Summanden des linksstehenden Teils für sich annulliert.

Man erkennt aber bald, daß die Fälle a) bis d), sowie e) bis g) teils durch (10) und (11), teils durch (17) auseinander abgeleitet werden können. Wir haben also vorläufig dem unter (17) angegebenen Verfahren zwei Typen zugrunde zu legen, die im folgenden in §§ 5 und 8 enthalten sind.

5. Wir gehen von dem trivialen Typus

$$\alpha = p,\quad \nu_0 = 1,\quad \beta_0' = \frac{1}{p} \tag{20}$$

aus und wenden auf ihn das unter (17) dargelegte Verfahren an. Es ergibt sich $\xi_1 = \frac{1}{p},\ \theta_1 = -\frac{2p+1}{p+2}$, mithin erhält man einen Typus, der durch folgendes System von Werten charakterisiert ist:

$$\alpha = p,\quad \nu_1 = -\frac{2p+1}{p(p+2)},\quad \beta_1' = \frac{2p+1}{p+2}. \tag{21}$$

Diese Ausdrücke wandeln wir nach (5) um und bilden nach (7) unter Weglassung eines Proportionalitätsfaktors die Ausdrücke für die Seiten und den halben Flächeninhalt des Dreiecks; es ist der von Herrn Schubert angegebene Typus (s. oben § 4 c) und d)). Für p hat man irgend eine positive

1) Diese beiden Fälle sind es, welche Herr Schubert so findet, wie hier unter d) angegeben. Sie gehen, da p positiv oder negativ sein kann, nach (5) ineinander über und stellen zusammen *einen* Typus dar. Dieser ist aber, wie aus dem folgenden ersichtlich, nicht der einzig mögliche Typus, der die vorliegende Aufgabe löst, und es muß vorläufig dahingestellt bleiben, ob die These, die Herr Schubert mit dieser Annahme begründet, richtig ist, daß es keine heronischen Dreiecke mit mehr als einer rationalen Mittellinie gibt.

Digitized by Google

oder negative rationale Zahl einzusetzen. Die sich anschließende Tabelle enthält auch die Beispiele, welche Herr **Schubert** anführt.

$$\text{Typus } I_1 \left\{ \begin{aligned} \alpha &= p, \quad \nu = \frac{p(p+2)}{2p+1}, \quad \beta = \frac{p+2}{2p+1}, \\ a &= p\,[(p+2)^2 + (2p+1)^2], \\ b &= (p+2)\,(2p+1)\,(p^2+1), \\ c &= 2\,(p^2-1)\,(p^2+p+1), \\ d &= 2\,\{[p\,(p+2)]^2 + (2p+1)^2\}, \\ \Phi &= p\,(p^2-1)\,(p+2)\,(2p+1)\,(p^2+p+1). \end{aligned} \right.$$

Beispiele zum Typus I_1.

	p	α	ν	β	a	b	c	d	Φ
1.	2	2	8 : 5	4 : 5	41	50	21	89	210
2.	3	3	15 : 7	5 : 7	111	175	104	274	2 730
3.	3 : 2	3 : 2	21 : 16	7 : 8	339	364	95	697	7 980
4.	4 : 3	4 : 3	40 : 33	10 : 11	1326	1375	259	2 689	85 470
5.	5	5	35 : 11	7 : 11	425	1001	744	1 346	71 610
6.	5 : 3	5 : 3	55 : 39	11 : 13	2175	2431	784	4 546	420 420
7.	5 : 4	5 : 4	65 : 56	13 : 14	3650	3731	549	7 361	499 590
8.	6	6	48 : 13	8 : 13	699	1924	1 505	2 473	234 780
9.	6 : 5	6 : 5	96 : 85	16 : 17	8175	8296	1 001	16 441	2 042 040
10.	7 : 2	7 : 2	77 : 32	11 : 16	2639	4664	3 015	6 953	1 857 240
11.	7 : 3	7 : 3	91 : 51	13 : 17	4809	6409	3 160	10 882	3 666 390
12.	8	8	80 : 17	10 : 17	1556	5525	4 599	6 689	1 563 660
13.	9	9	99 : 19	11 : 19	2169	8569	7 280	10 162	3 423 420
14.	— 3	3	3 : 5	5	39	25	56	34	210
15.	— 3 : 2	2 : 3	3 : 8	4	51	26	35	73	210
16.	— 4	4	8 : 7	7 : 2	106	119	195	113	2 730
17.	— 4 : 3	3 : 4	8 : 15	5 : 2	174	125	91	289	2 730
18.	— 5 : 2	5 : 2	5 : 16	8	325	116	399	281	7 980
19.	— 5 : 3	3 : 5	5 : 21	7	375	119	304	466	7 980
20.	— 6	6	24 : 11	11 : 4	411	814	1 085	697	71 610
21.	— 6 : 5	5 : 6	24 : 35	7 : 4	975	854	341	1 801	71 610
22.	— 7	7	35 : 13	13 : 5	679	1625	2 064	1 394	234 780
23.	— 7 : 3	7 : 3	7 : 33	11	1281	319	1 480	1 138	85 470
24.	— 7 : 4	4 : 7	7 : 40	10	1414	325	1 221	1 649	85 470
25.	— 7 : 6	6 : 7	35 : 48	8 : 5	1869	1700	559	3 529	234 780
26.	— 8 : 3	8 : 3	16 : 39	13 : 2	2076	949	2 695	1 777	420 420
27.	— 8 : 5	5 : 8	16 : 55	11 : 2	2500	979	1 911	3 281	420 420
28.	— 9	9	63 : 17	17 : 7	1521	4879	5 840	4 258	1 563 660
29.	— 9 : 2	9 : 2	45 : 32	16 : 5	2529	3400	5 159	3 049	1 857 240
30.	— 9 : 4	9 : 4	9 : 56	14	3546	679	3 965	3 217	499 590
31.	— 9 : 5	5 : 9	9 : 65	13	3825	689	3 416	4 306	499 590
32.	— 9 : 7	7 : 9	45 : 77	11 : 5	4599	3575	2 144	7 954	1 857 240
33.	— 9 : 8	8 : 9	63 : 80	10 : 7	5364	5075	1 241	10 369	1 563 660
34.	— 10	10	80 : 19	19 : 8	2125	7676	9 009	6 761	3 423 420
35.	— 10 : 3	10 : 3	40 : 51	17 : 4	4575	3706	7 189	4 201	3 666 390
36.	— 10 : 7	7 : 10	40 : 91	13 : 4	6475	3874	4 029	9 881	3 666 390
37.	— 10 : 9	9 : 10	80 : 99	11 : 8	8325	7964	1 729	16 201	3 423 420
38.	— 11 : 2	11 : 2	77 : 40	20 : 7	4939	8750	12 051	7 529	9 279 270
39.	— 11 : 3	11 : 3	55 : 57	19 : 5	6369	6175	10 864	6 274	8 514 660
40.	— 11 : 5	11 : 5	11 : 85	17	7975	1241	8 736	7 346	2 042 040
41.	— 11 : 6	6 : 11	11 : 96	16	8481	1256	7 735	9 337	2 042 040

6. Wendet man nun das unter (17) beschriebene Verfahren auf die in (21) enthaltene Lösung an, so erhält man

$$\theta_2 = -\frac{2p^3+4p^2+4p-1}{p^3-4p^2-4p-2},$$

und daraus

$$\text{Typus } \mathrm{I}_2 \begin{cases} \alpha = p, \quad \nu = \dfrac{(p+2)(p^3-4p^2-4p-2)}{(2p+1)(2p^3+4p^2+4p-1)}, \quad \beta = \dfrac{p(p+2)(2p^3+4p^2+4p-1)}{(2p+1)(p^3-4p^2-4p-2)}, \\ a = [p(p+2)(2p^3+4p^2+4p-1)]^2 + [(2p+1)(p^3-4p^2-4p-2)]^2, \\ b = (p+2)(2p+1)(p^2+1)(p^3-4p^2-4p-2)(2p^3+4p^2+4p-1), \\ c = 2(p^3-1)(p^2+p+1)(4p^2+p+4)(p^4+3p^3+p^2+3p+1), \\ d = 2p\{[(p+2)(p^3-4p^2-4p-2)]^2+[(2p+1)(2p^3+4p^2+4p-1)]^2\}, \\ \Phi = p(p^3-1)(p+2)(2p+1)(p^2+p+1)(4p^2+p+4) \times \\ \quad \times (p^3-4p^2-4p-2)(2p^3+4p^2+4p-1)(p^4+3p^3+p^2+3p+1). \end{cases}$$

Beispiele zum Typus I_2.

	p	α	ν	β	a	b	c	d	Φ
1.	2	1 : 2	24 : 65	52 : 15	2 929	1 950	1 309	4 801	510 510
2.	3	1 : 3	115 : 707	1515 : 161	1 160 573	406 525	809 432	1 539 222	49 358 151 570
3.	— 3	3	155 : 53	93 : 265	39 437	41 075	2 072	80 502	12 766 110
4.	4	1 : 4	4 : 69	92 : 3	8 478	1 178	7 420	9 554	1 028 960
5.	— 5	5	57 : 23	95 : 69	6 893	17 043	17 864	18 890	29 274 630
6.	— 5 : 4	5 : 4	37 : 52	148 : 65	26 129	19 721	22 008	40 730	105 858 480

7. Durch erneute Anwendung des obigen Iterationsverfahrens erhält man, hier wie in den übrigen Fällen, Ausdrücke, welche immer verwickelter werden: θ_3 würde in diesem Falle, wenn man $\alpha = p$ festhält, schon als Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen 7. Grades von p auftreten. Wir beschränken uns auf das folgende

Beispiel zum Typus I_3:

$p = 2, \quad \alpha = 2, \quad \nu = 267 : 533, \quad \beta = 1157 : 246,$

$a = 1\,399\,165, \quad b = 711\,555, \quad c = 1\,705\,066, \quad d = 1\,421\,512,$

$\Phi = 242\,649\,647\,526.$

8. Die oben § 4 g) aufgestellten Ausdrücke ergeben den folgenden Typus:

$$\text{Typus } \mathrm{II}_1 \begin{cases} \alpha = p, \quad \nu = \dfrac{2(p^2-1)}{3p}, \quad \beta = \dfrac{3p}{p^2-1}, \\ a = (p^2-1)^2 + (3p)^2, \\ b = 3(p^4-1), \\ c = (p^2+2)(2p^2+1) = 2(p^2-1)^2 + (3p)^2, \\ d = [2(p^2-1)]^2 + (3p)^2, \\ \Phi = \tfrac{3}{2}p(p^2-1)(p^2+2)(2p^2+1). \end{cases}$$

Beispiele zum Typus II_1.

	p	α	ν	β	a	b	c	d	Φ
1.	3	3	16 : 9	9 : 8	145	240	209	337	7 524
2.	3 : 2	3 : 2	5 : 9	18 : 5	349	195	374	424	16 830
3.	4	4	5 : 2	4 : 5	41	85	66	116	660
4.	4 : 3	4 : 3	7 : 18	36 : 7	1 345	525	1 394	1 492	175 644
5.	5	5	16 : 5	5 : 8	89	208	153	281	3 060
6.	5 : 2	5 : 2	7 : 5	10 : 7	149	203	198	296	6 930
7.	5 : 3	5 : 3	32 : 45	45 : 16	2 281	1632	2 537	3 049	913 320
8.	5 : 4	5 : 4	3 : 10	20 : 3	409	123	418	436	12 540
9.	6	6	35 : 9	18 : 35	1 549	3885	2 774	5 224	873 810
10.	6 : 5	6 : 5	11 : 45	90 : 11	8 221	2013	8 342	8 584	4 129 290
11.	7	7	32 : 7	7 : 16	305	800	561	1 073	31 416
12.	7 : 2	7 : 2	15 : 7	14 : 15	421	795	646	1 096	67 830
13.	7 : 3	7 : 3	80 : 63	63 : 40	5 569	6960	7 169	10 369	9 032 940
14.	7 : 4	7 : 4	11 : 14	28 : 11	905	715	1 026	1 268	158 004
15.	7 : 5	7 : 5	16 : 35	35 : 8	1 289	592	1 353	1 481	189 420
16.	7 : 6	7 : 6	13 : 63	126 : 13	16 045	3315	16 214	16 552	13 279 266
17.	8	8	21 : 4	8 : 21	505	1365	946	1 828	79 464
18.	8 : 5	8 : 5	13 : 20	40 : 13	1 769	1157	1 938	2 276	503 880
19.	8 : 7	8 : 7	5 : 28	56 : 5	3 161	565	3 186	3 236	446 040
20.	10	10	33 : 5	10 : 33	1 189	3333	2 278	4 456	375 870
21.	10 : 7	10 : 7	17 : 35	70 : 17	5 189	2533	5 478	6 056	3 259 410
22.	11	11	80 : 11	11 : 40	1 721	4880	3 321	6 521	730 620
23.	11 : 2	11 : 2	39 : 11	22 : 39	2 005	4875	3 526	6 568	1 512 654
24.	11 : 4	11 : 4	35 : 22	44 : 35	3 161	4795	4 386	6 836	3 377 220
25.	11 : 5	11 : 5	64 : 55	55 : 32	4 049	4672	5 073	7 121	4 464 240
26.	11 : 7	11 : 7	48 : 77	77 : 24	6 505	4080	7 081	8 233	6 542 844
27.	11 : 8	11 : 8	19 : 44	88 : 19	8 105	3515	8 466	9 188	7 077 576
28.	11 : 10	11 : 10	7 : 55	110 : 7	12 149	1547	12 198	12 296	4 696 230

9. Folgenden neuen Typus erhält man durch Anwendung des unter (17) beschriebenen Verfahrens auf den Typus II_1:

$$\text{Typus } II_2 \left\{ \begin{aligned} &\alpha = p, \quad \nu = \frac{3p(4p^4+p^2+4)}{2(p^2-1)(p^4+7p^2+1)}, \quad \beta = \frac{(p^2-1)(4p^4+p^2+4)}{3p(p^4+7p^2+1)}, \\ &a = [(p^2-1)(4p^4+p^2+4)]^2 + [3p(p^4+7p^2+1)]^2, \\ &b = 3(p^4-1)(p^4+7p^2+1)(4p^4+p^2+4), \\ &c = (p^2+2)(2p^2+1)(2p^4-4p^2-7)(7p^4+4p^2-2), \\ &d = [2(p^2-1)(p^4+7p^2+1)]^2 + [3p(4p^4+p^2+4)]^2, \\ &\Phi = \tfrac{3}{2}p(p^2-1)(p^2+2)(2p^2+1)(p^4+7p^2+1)(2p^4-4p^2-7) \times \\ &\qquad \times (4p^4+p^2+4)(7p^4+4p^2-2). \end{aligned} \right.$$

Beispiele zum Typus II_2:

(1) $p = 3, \ \alpha = 3, \ \nu = 6783 : 6611, \ \beta = 11\,419 : 3927,$

$a = 14\,581\,489, \quad b = 14\,947\,471, \quad c = 23\,455\,200, \quad d = 17\,942\,882,$

$\Phi = 52\,589\,388\,269\,880.$

(2) $p = 4, \quad \alpha = 4, \quad \nu = 232 : 205, \quad \beta = 145 : 41,$

$a = 90\,824, \quad b = 101\,065, \quad c = 166\,551, \quad d = 95\,849,$

$\Phi = 1\,980\,291\,390.$

10. Dem in (17) ausgedrückten Verfahren steht ein gleiches gegenüber, das man erhält, wenn man in (12) und (17) α und β' vertauscht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dem Verfahren (17) läßt sich jeder Typus in doppelter Form zugrunde legen, einmal unmittelbar, das andere Mal nach Vertauschung der Ausdrücke für α und β'. Die Ausdrücke (21) des Typus I_1 würden hier allerdings nichts wesentlich Neues ergeben, wohl aber gelangt man auf diese Weise, wenn man von den Ausdrücken des Typus II_1

$$(22) \qquad \alpha = \frac{p^2-1}{3p}, \quad \nu = \frac{2(p^2-1)}{3p}, \quad \beta' = p$$

ausgeht, zu dem folgenden neuen Typus:

$$\text{Typus } II_{1a} \begin{cases} \alpha = \dfrac{p^2-1}{3p}, \quad \nu = \dfrac{4p^2-1}{2p(p^2+2)}, \quad \beta = \dfrac{(p^2-1)(4p^2-1)}{3p(p^2+2)}, \\ a = [(p^2-1)(4p^2-1)]^2 + [3p(p^2+2)]^2, \\ b = (4p^2-1)(p^2+2)(p^4+7p^2+1), \\ c = (2p^2+1)(5p^2+1)(2p^4-10p^2-1), \\ d = 3(p^2-1)\{(4p^2-1)^2+[2p(p^2+2)]^2\}, \\ \Phi = \frac{3}{2}p(p^2-1)(p^2+2)(2p^2+1)(4p^2-1)(5p^2+1)(2p^4-10p^2-1). \end{cases}$$

Beispiele zum Typus II_{1a}.

	p	α	ν	β	a	b	c	d	Φ
1.	3	8 : 9	35 : 66	280 : 99	88 201	55 825	62 054	133 944	860 068 440
2.	1 : 3	8 : 9	15 : 38	171 : 40	30 841	13 775	26 026	40 056	89 008 920
3.	4	5 : 4	7 : 16	35 : 8	1 289	574	1 287	1 525	180 180
4.	1 : 4	5 : 4	8 : 11	11 : 5	584	451	483	925	53 130
5.	5	8 : 5	11 : 30	88 : 15	7 969	2 937	8 806	8 168	5 811 960
6.	1 : 5	8 : 5	35 : 34	85 : 56	10 361	10 591	8 730	19 048	20 777 400
7.	5 : 2	7 : 10	32 : 55	112 : 55	15 569	13 112	5 031	28 343	15 495 480
8.	2 : 5	7 : 10	5 : 24	60 : 7	3 649	894	3 245	4 207	681 450
9.	5 : 4	20 : 3	95 : 56	95 : 21	37 864	54 397	86 339	36 483	344 492 610

11. Die in § 2 erwähnte Eulersche Aufgabe kommt darauf hinaus, eine ganze rationale Funktion vierten Grades, nämlich die Diskriminante der quadratiscben Gleichung (13), zu einem rationalen Quadrat zu machen. Euler bat nun sein in § 2 angedeutetes Lösungsverfahren in der angeführten posthumen Abhandlung weiter ausgebildet. Von den daselbst angegebenen Wegen soll im folgenden einer (a. a. O. §§ 29, 30) beschrieben und zur Auffindung nener Typen beschritten werden.

Soll der Ausdruck

$$(23) \qquad V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

zu einem Quadrat gemacht werden, und ist ein Fall $x = x_0$ bekannt, dnrch den $V = f^2$ wird, so setze man

$$(24) \qquad x = x_0 + t;$$

hierdurch geht V über in

$$(25) \qquad V = f^2 + gt + ht^2 + kt^3 + lt^4;$$

setzt man nun noch

(26) $$P = f + \frac{g}{2f} \cdot t$$

und bildet

(27) $$QR = V - P^2 = t^2\left(h - \frac{g^2}{4f^2} + kt + lt^2\right),$$

wo die Faktoren Q und R so zu wählen sind, daß sie in t höchstens vom zweiten Grade sind, so ist die vorliegende Aufgabe darauf zurückgeführt, die „kanonische Gleichung“

(28) $$Qy^2 + 2Py - R = 0$$

in t und y rational zu lösen; sie ist von der Form der Gleichung (13) und liefert ebenso wie diese eine unendliche Serie von Lösungen.

12. Hier ist die Diskriminante der Gleichung (12)

(29) $$V = [\beta'^2\alpha + \beta'(\alpha^2 - 1) - \alpha]^2 + (4\beta'\alpha)^2$$

oder

(30) $$V = \beta'^4\alpha^2 + \beta'^3 \cdot 2\alpha(\alpha^2 - 1) + \beta'^2(\alpha^4 + 12\alpha^2 + 1) - \beta' \cdot 2\alpha(\alpha^2 - 1) + \alpha^2,$$

in der wir α als unveränderlich annehmen, zu einem rationalen Quadrat zu machen; bekannt ist für $\alpha = -p$ der Fall $\beta' = p$, der $\sqrt{V} = 4p^2$ ergibt, wir setzen daher

(31) $$\beta' = t + p, \quad P = 4p(t + p)$$

und erhalten

$$QR = t^2[tp + (p^2 + 1)]^2;$$

es ist also die quadratische Gleichung

(32) $$y^2t^2 + y \cdot 8p(t + p) - [tp + (p^2 + 1)]^2 = 0$$

(32a) $$t^2(y^2 - p^2) - t \cdot 2p(-y \cdot 4 + p^2 + 1) + [y \cdot 8p^2 - (p^2 + 1)^2] = 0$$

in y und t rational zu lösen.

Für $y = -p$ erhalten wir somit

$$t = -\frac{p^4 + 8p^3 + 2p^2 + 1}{2p(p^2 + 4p + 1)}.$$

Hieraus ergibt sich nach (31) folgender Typus:

Typus III
$$\begin{cases} \alpha = p, \quad \nu = \dfrac{(p^2+1)(p^2+4p+1)}{4p(p^2-1)}, \quad \beta = \dfrac{(p^2+1)(p^2-1)}{2p(p^2+4p+1)}, \\ a = [(p^2+1)(p^2-1)]^2 + [2p(p^2+4p+1)]^2, \\ b = 2(p^2+1)^2(p^2-1)(p^2+4p+1), \\ c = (p^2+2p-1)(p^2-2p-1)(p^2+2p+3)(3p^2+2p+1), \\ d = [(p^2+1)(p^2+4p+1)]^2 + [4p(p^2-1)]^2, \\ \Phi = p(p^2+1)(p^2-1)(p^2+2p-1)(p^2-2p-1)(p^2+4p+1) \times \\ \qquad \times (p^2+2p+3)(3p^2+2p+1). \end{cases}$$

Digitized by Google

Beispiele zum Typus III.

	p	α	ν	β	a	b	c	d	Φ
1.	3	3	55 : 24	20 : 33	1 489	2 200	1 071	3 601	353 430
2.	— 3	1 : 3	5 : 24	20 : 3	409	200	231	601	6 930
3.	— 3 : 2	3 : 2	120 : 143	132 : 65	21 649	18 590	20 349	34 849	87 297 210
4.	4	4	187 : 80	85 : 88	14 969	31 790	27 531	41 369	102 965 940
5.	— 4	4	17 : 240	255 : 8	65 089	8 670	72 611	57 889	74 063 220
6.	— 5	5	13 : 40	52 : 5	2 729	1 352	3 927	1 769	510 510

13. Dieser Typus liefert nun wieder, nacb dem Eulerscben Verfahren (§ 2) behandelt, unendliche Serien neuer Typen. So würde das Verfahren (17) für $p = -3$ unmittelbar und unter Berücksichtigung des § 10 als Beispiele der nächsten Stufe ergeben:

(1) $\alpha = 3, \quad \nu = 39:136, \quad \beta = 156:17, \quad a = 24\,625, \quad b = 8840,$
$c = 31\,119, \quad d = 20\,017, \quad \Phi = 41\,263\,794;$

(2) $\alpha = 3:20, \quad \nu = 2:33, \quad \beta = 132:5, \quad a = 17\,449, \quad b = 4\,499,$
$c = 13\,098, \quad d = 21\,860, \quad \Phi = 4\,322\,340.$

14. In ähnlicber Weise kann man aucb die übrigen Vorschriften des posthumen Eulerschen Verfahrens zur Auffindung neuer Typen verwenden. Die Substitution (14) ist auch nicht die einzige, welcbe die Gleicbung (12) zur Anwendung des in § 2 dargelegten Eulerschen Verfahrens geeignet macht; eine andere braucbbare Form der Grundgleichung würde man durch die Substitution $\beta' = \eta + 2\nu$ erhalten. Ein weiterer einfacher Typus ist

$$\alpha = \frac{2p^2 - 1}{3p}, \quad \nu = \frac{p(p^2 - 2)}{2p^2 - 1}, \quad \beta = \frac{3p}{p^2 - 2}.$$

Um den Raum nicht zu sebr in Anspruch zu nehmen, möge die Ausführung dieser Notizen einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben. Es kam hier zunächst darauf an, darzutun, daß man unzählige partikuläre Lösungen der vorliegenden Aufgabe angeben kann, welche einen rational, sonst willkürlich zu wählenden Parameter enthalten.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

41. Sitzung am 28. Februar 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 34 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Fuchs: Über lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung mit nur wesentlich singulären Stellen (s. S. 46).
Herr Jolles: Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen (s. S. 51).
Herr Haentzschel: Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen (s. S. 54).

42. Sitzung am 28. März 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 32 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Hessenberg: Über die Projektion des räumlichen Punktgitters (s. S. 64).
Herr Valentin: Zum Goldbachschen Satze.

43. Sitzung am 25. April 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 34 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Denizot: Zur Kritik der Theorie des Foucaultschen Pendels.
Herr Meissner: Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen (s. S. 70).

Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft.

Von Paul Koebe.

Im Folgenden handelt es sich im wesentlichen um den Nachweis zweier Sätze, a) und b), welchen am Schluß ein weiterer Satz c) und ein zusammenfassender Satz d) hinzugefügt ist.

a) *In einer Ebene, deren Punkte durch rechtwinklige Kartesische Koordinaten x, y bestimmt werden, sei ein Bereich Σ gegeben und in diesem Bereiche eine reelle Funktion $u(x, y)$ erklärt, welche folgende Eigenschaften besitzt: $u(x, y)$ ist eine stetige Funktion der beiden von einander unabhängigen reellen Veränderlichen x, y; $u(x, y)$ besitzt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, und diese Ableitungen sind ebenfalls stetige Funktionen der Veränderlichen x, y, ferner: wenn S irgend ein Teilbereich von Σ ist, s seine Begrenzung, $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung der Funktion u in der Richtung der inneren Normalen zur Begrenzung, so soll stets das über die vollständige Begrenzung s des Bereiches S erstreckte Integral $\int_s \frac{\partial u}{\partial n} ds$ den Wert Null haben,*

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{1}$$

Es soll bewiesen werden, daß die Funktion $u(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt; insbesondere ist auch die Existenz der Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ nachzuweisen.

b) *Im Raume, dessen Punkte durch rechtwinklige Kartesische Koordinaten x, y, z bestimmt werden, sei ein dreidimensionaler Bereich Σ gegeben und für diesen Bereich eine reelle stetige Funktion $u(x, y, z)$ mit stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ erklärt; ferner sei, wenn S irgend einen im Innern von Σ enthaltenen Raumteil, s seine Oberfläche, $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung der Funktion u in der Richtung der inneren Normalen zur Oberfläche bezeichnet,*

$$\iint_s \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{2}$$

Es soll bewiesen werden, daß die Funktion $u(x, y, z)$ die Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ besitzt, und daß

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist.

Bisher ist meines Wissens nur der erste Satz bewiesen worden und zwar durch Übergang von der gegebenen Funktion zu einer Funktion komplexen Arguments.[1])

Es sollen nun hier zwei Beweisanordnungen mitgeteilt werden, mit deren Hilfe der Satz a) unter Vermeidung der Betrachtung von Funktionen komplexen Arguments bewiesen werden kann. Von diesen beiden Beweis-

1) Bei den üblichen Methoden der Herleitung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ aus der Gleichung (1) bezw. (2) wird für die Funktion u die Existenz stetiger partieller Ableitungen zweiter Ordnung von vornherein als bekannt vorausgesetzt.

Digitized by Google

anordnungen ist die zweite ohne weiteres auch im Falle des Newtonschen Potentials (Satz b)) anwendbar. Es wird sich zugleich ergeben, daß es genügt, die Geltung der zu Grunde liegenden Integralbedingung (1) bezw. (2) nur für solche Gebiete S zu verlangen, welche von einem *Kreise* bezw. von einer *Kugelfläche* begrenzt sind.

Erste Beweisanordnung: Es bezeichne K irgend eine Kreisfläche, welche ganz im Innern des Definitionsbereiches Σ der Funktion $u(x, y)$ liegt. Wendet man die Integralbedingung (1) auf das System der mit K konzentrischen Kreise an, so ergibt sich leicht, daß der Wert der Funktion u im Mittelpunkt des Kreises K gleich dem arithmetischen Mittel der Werte der Funktion u auf der Peripherie von K ist. D. h.: Für die Funktion u gilt die Gaußsche Integralformel. Vom Gaußschen Integral aber kann man mittels konformer Abbildung des Kreises K auf sich selbst, wobei die Integralbedingung (1) erhalten bleibt, zum Poissonschen Integral übergehen. Die Geltung der Poissonschen Integralformel hat die Richtigkeit des Satzes a) zur unmittelbaren Folge.

Die vorstehende Beweisanordnung ist im Raume darum nicht anwendbar, weil es, wie sich bei genauerer Prüfung zeigt, nicht möglich ist, die Invarianz der Integralbedingung (2) gegenüber der im Raume in Betracht zu ziehenden Thomsonschen Transformation direkt einzusehen.

Zweite Beweisanordnung: Die zweite Beweisanordnung unterscheidet sich von der ersten nur durch die Form, in welcher der Übergang vom Gaußschen zum Poissonschen Integral gemacht wird.

Man bestimme diejenige reelle Funktion $v(x, y)$, welche auf der Peripherie des Kreises K dieselben Werte wie die Funktion $u(x, y)$ besitzt und im ganzen Innern des Kreises K der partiellen Differentialgleichung $\Delta v = 0$ genügt. Die Funktion $v(x, y)$ existiert und wird durch das Poissonsche Integral dargestellt.[1] Bildet man nun die Funktion

$$w(x, y) = u(x, y) - v(x, y),$$

so besitzt $w(x, y)$ folgende Eigenschaften: $w(x, y)$ ist eine im ganzen Gebiete K mit Einschluß der Begrenzung von K stetige und auf der Begrenzung verschwindende Funktion; ferner, wenn K_1 irgend eine Kreisfläche innerhalb K ist, so ist, wie bei u und v, der Wert der Funktion im Mittelpunkte von K_1 gleich dem arithmetischen Mittel der Werte auf der Peripherie von K_1. Infolge der letzteren Eigenschaft kann die Funktion w im Innern von K weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen. Die Funktion w nimmt daher sowohl ihren größten als auch ihren kleinsten Wert auf der Begrenzung von K an, längs welcher w verschwindet. Folglich hat w für alle Punkte der Kreisfläche K den Wert Null; d. h.: es ist

$$u(x, y) = v(x, y),$$

oder anders ausgedrückt: für die Funktion u gilt die Poissonsche Integralformel.

Damit ist aufs neue der Satz a) bewiesen, und man erkennt sofort, daß nach der letzteren Methode auch der Satz b) bewiesen werden kann.

Der der zweiten Beweisanordnung zu Grunde liegende Gedanke kann als ein Satz für sich formuliert werden.

1) s. H. A. Schwarz, Ges. Abh. Bd. II, S. 185—188 und 360—361.

c) *Ist u eine in der Ebene oder im Raume erklärte stetige reelle Funktion, welche inbezug auf jede ganz im Innern des Definitionsbereiches liegende Kreisfläche bezw. Kugel die erwähnte Gaußsche Mittelwerteigenschaft besitzt, so ist u eine Potentialfunktion.*

Die Sätze a), b), c) lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

d) *Anstatt von einer Funktion* $u(x, y)$ oder $u(x, y, z)$ *zu verlangen 1., daß sie nebst ihren partiellen Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ *stetig ist und der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ *genügt, kann man verlangen 2., daß sie nebst ihren partiellen Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ *stetig ist und der Integralbedingung* $\int\limits_s \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ *genügt, oder 3., daß sie stetig ist und die Gaußsche Mittelwerteigenschaft besitzt. Die genannten drei Forderungen sind völlig äquivalent.*

Ein Apparat zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts in der Ebene.

Von R. Skutsch.

Die Astatik betrachtet Kräfte am starren Körper bei Lagenänderungen desselben und setzt voraus, daß diese Kräfte erstens Größe und Richtung nicht ändern und zweitens ihre Wirkungslinien durch bestimmte Punkte des Körpers unabänderlich hindurchgehen. Bei Erfüllung dieser beiden Voraussetzungen sprechen wir von gebundenen Kräftesystemen; die betreffenden Punkte nennen wir die Angriffspunkte der Kräfte, so wie man z. B. den Schwerpunkt als den Angriffspunkt der Schwerkraft bezeichnet.

Besteht bei Lagenänderungen des Körpers dauernd Gleichgewicht, so nennt man dasselbe astatisch. Zwei gebundene Kräftesysteme an einem Körper sind astatisch äquivalent, wenn sie einem und demselben dritten gebundenen Kräftesystem an demselben Körper astatisches Gleichgewicht halten. Den Ersatz eines gebundenen Kräftesystems durch ein astatisch äquivalentes nennt man astatische Reduktion.

Die von Möbius begründete Astatik gilt als „eins der schönsten Kapitel der elementaren Mechanik" (Heun); eine anregende knappe Darstellung findet man in Petersens bekanntem kleinen „Lehrbuch der Statik fester Körper". In eine Vorlesung über angewandte Mechanik wird freilich die räumliche Astatik schwerlich aufgenommen werden können. Die Schwierigkeiten für die Anschauung sind nicht gering und ausgesprochen räumliche Anwendungen dürfte es außer dem Sonderfall der parallelen Schwerkräfte kaum geben.

Sind die Anwendungen nun auch in der Ebene nicht gerade bedeutsam, so ist doch die ganze Astatik der Ebene dafür auch so schnell und einfach zu erledigen, daß es sich empfehlen dürfte, wenigstens dieser zwecks Klarstellung der Begriffe einen bescheidenen Platz einzuräumen. Nur so

Digitized by Google

dürfte es möglich sein, die Lehre vom Schwerpunkt und die Lehre von der Stabilität schwimmender Körper dem Unterricht organisch einzufügen.

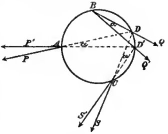


Fig. 1.

Die nachstehenden einfachen geometrischen Betrachtungen sind größtenteils bekannt, man vergleiche z. B. Somoffs „Theoretische Mechanik". Sie beschränken sich auf ebene Kräftesysteme und komplanare Lagenänderungen des Systems der Angriffspunkte.

1. Zwei Kräfte P und Q in einer Ebene mögen in den Punkten A und B angreifen (Fig. 1). Anstatt einer Drehung des Systems der Angriffspunkte wollen wir A und B ruhen lassen und P und Q um gleiche Winkel, z. B. um α, drehen, sodaß sie in die Lage P' und Q' kommen. Ihr Schnittpunkt D wandert dabei offenbar auf dem Kreise ABD nach D'. Die Resultante S dreht sich natürlich ebenfalls um den Winkel α, und da sie erst durch D, nachher durch D' geht, so geht sie bei der Drehung durch einen festen Punkt C des nämlichen Kreises. Die Kräfte P und Q haben also eine astatische Resultante.

2. Die erhaltene astatische Resultante könnte man mit einer dritten gegebenen Kraft zu einer neuen astatischen Resultante zusammensetzen, diese mit einer vierten etc. Es kann also jedes gebundene ebene Kräftesystem astatisch äquivalent durch eine Einzelkraft ersetzt werden.

3. Zwei Kräfte sind nur dann im astatischen Gleichgewicht, wenn sie erstens gleich und entgegengesetzt sind und zweitens ihre Angriffspunkte zusammenfallen. Trifft nur das erstere zu, so bilden sie ein astatisches Kräftepaar.

4. Verschwinden die Komponenten eines gebundenen ebenen Systemes von n Kräften nach zwei Richtungen, so ersetze man $n-1$ davon durch ihre astatische Resultante. Fällt der Angriffspunkt derselben mit demjenigen der $n$ten Kraft zusammen, so besteht astatisches Gleichgewicht, andernfalls ist das Kräftesystem einem astatischen Kräftepaar äquivalent.

5. Die beiden Kräfte eines astatischen Paares seien P, der Abstand ihrer Angriffspunkte sei a, der Winkel zwischen P und der Verbindungslinie der Angriffspunkte α. Dann ist das Moment des astatischen Paares $Pa \sin \alpha$. Es ist am größten, wenn die Kräfte senkrecht auf der Verbindungslinie der Angriffspunkte stehen, und verschwindet, wenn die Kräfte P in diese Verbindungslinie fallen. Hierbei ist aber das Gleichgewicht nicht „astatisch", sondern stabil, wenn die Kräfte voneinander fort, und labil, wenn die Kräfte aufeinander zu gerichtet sind.[1])

1) Die Kräfte an der Magnetnadel bilden ein astatisches Paar. Legt man zwei gleich stark magnetisierte Nadeln so aufeinander, daß der Nordpol der einen auf den Südpol der anderen fällt, so heben sich die astatischen Paare auf, und es entsteht astatisches Gleichgewicht. Sind die Nadeln gleich stark magnetisiert, fallen aber ihre Achsen nicht genau in dieselbe Vertikalebene, bilden vielmehr ihre Horizontalprojektionen einen kleinen Winkel δ mit einander, so heben sich bei einem Winkel α der Nadeln gegen den Meridian die astatischen Paare

Digitized by Google

6. Wenn 3 Kräfte PQR im astatischen Gleichgewichte sind (Fig. 2), so ist das Dreieck ABC ihrer Angriffspunkte ähnlich und zwar symmetrisch-ähnlich dem Kräftedreieck DEF. Denn es ist Winkel EFD = Winkel BAC als Snpplement zu dem nämlichen Winkel BDC, und es ist Winkel EDF = Winkel ABC als Peripheriewinkel über dem nämlichen Bogen AC.

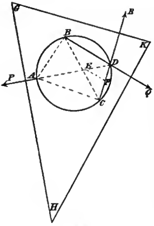


Fig 2

Der Demonstrationsapparat beruht auf folgendem Gedanken. Wenn man einen Faden über eine horizontale Kante führt und am einen Ende durch ein Gewicht belastet, so stehen beide Teile des Fadens um so näher senkrecht auf der Kante, je geringer die Reibung an ihr ist. Durch geeignete technische Hilfsmittel, eine Kombination von Rollen, die hier um so weniger Beschreibung verdient, als Vervollkommnungen noch bevorstehen, gelang es leicht, die Abweichungen vom Lot bis auf weniger als 1^0 zn bringen. Führt man nun das andere Ende des Fadens in einer durch die Kante gelegten (z. B. horizontalen) Ebene umher, so hat man in der Fadenspannung eine Kraft verwirklicht, wie sie die Astatik voraussetzt, deren Größe unverändert gleich dem spannenden Gewicht und deren Richtung ebenfalls unverändert, nämlich immer auf der Kante senkrecht bleibt. Ordnet man drei solche Kanten zu einem horizontalen Dreieck GHK an (Fig. 3), und belastet man drei über diese Kanten laufende, in einem Punkt D der Ebene GHK zu einem Knoten verbundene Fäden mit Gewichten P, Q und R, so ist dann und nur dann Gleichgewicht vorhanden, wenn das Kräftedreieck DEF sich schließt. Nun ist aber Dreieck $DEF \sim$ Dreieck GHK, weil ihre Seiten paarweise aufeinander senkrecht stehen: es ist also zum Gleichgewicht erforderlich, daß die Gewichte P, Q und R sich verhalten wie die Seiten des Kantendreiecks, über welche sie bezw. hängen. Selbstverständlich kann man dann dem Knoten D jede Lage in dem Dreieck GHK geben, ohne das Gleichgewicht zu stören.

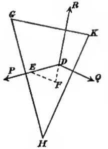


Fig 3

Vereinigt man dagegen die drei Fäden nicht zu einem Knoten, sondern befestigt sie in drei verschiedenen Pnnkten A, B und C einer horizontalen Scheibe (Fig. 2), so sind die drei Spannkräfte P, Q und R, trotzdem die Summe ihrer Komponenten nach

nicht auf, sondern setzen sich zu einem astatischen Paar mit dem Moment $Pa \sin(\alpha + \delta) - Pa \sin \alpha = Pa\, \delta \sin(90^0 + \alpha)$ zusammen: die sogenannten astatischen Nadelpaare stellen sich senkrecht zum Meridian. Auch Gewicht und Auftrieb des schwimmenden Schiffes können für hinreichend kleine Bewegungen als astatisches Paar gedeutet werden. Angriffspunkt des Auftriebs ist bekanntlich das sogenannte Metacentrum.

beliebiger Richtung verschwindet, im allgemeinen nicht in astatischem Gleichgewichte, sondern einem astatischen Kräftepaare äquivalent. Astatisches Gleichgewicht ist vielmehr nach Satz 6 nur dann vorhanden, wenn das Dreieck ABC symmetrisch ähnlich dem Dreieck DEF, also nach Vorstehendem auch symmetrisch ähnlich dem Dreieck GHK ist. In diesem Falle kann man die Scheibe ABC in eine beliebige Lage in der Ebene GHK bringen, ohne das Gleichgewicht zu stören.

Die Verwirklichung dieses Gedankens stieß auf erhebliche Schwierigkeiten. Einerseits scheint es unmöglich, volle Umdrehungen der Scheibe ABC vorzunehmen, ohne daß sich die Fäden stören; andrerseits galt die Betrachtung überhaupt nur für ebene Bewegungen, und es ist tatsächlich bei Bewegungen aus der Ebene GHK heraus das Gleichgewicht nicht astatisch, sondern unvermeidlich labil, sofern der triviale Fall ausgeschlossen bleibt, daß P, Q und R parallel sind und demzufolge A, B und C in eine Gerade fallen.

Diese Schwierigkeiten ließen sich nach Anregungen der Herren Professor Friedmann und cand. techn. Gathemann durch eine eigenartige konstruktive Ausbildung der Scheibe ABC überwinden, wie sie schematisch in Figur 4 wiedergegeben ist. Die Scheibe ist als Winkelhebel ausgebildet, und die Fäden greifen nicht unmittelbar in den Punkten A, B und C an, sondern vermittels dreier Gelenkstangen, welche infolge sauberer Herstellung der Gelenke nur komplanare Bewegungen ausführen können.

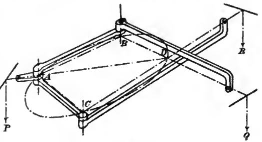


Fig 4

Die in B und C angreifenden Stangen sind so gekröpft, daß die für den Angriff der Fäden mit Ösen versehenen Enden der drei Stangen sich in einer und derselben zu den Zapfenachsen normalen Ebene bewegen. Bei genügender Länge der Stangen wird hierbei zweierlei erreicht: erstens kehren bei einer vollen Drehung des Winkelhebels die drei Fäden, ohne sich gestört zu haben, in ihre Anfangslage wieder zurück, und zweitens verhält sich die ganze Konstruktion bei Bewegungen aus ihrer Ebene heraus stabil. Sie bedarf also gar keiner Führung und verharrt, da ihr Gewicht gegenüber den Kräften P, Q und R recht klein gehalten werden konnte, in der Ebene GHK frei schwebend. Diese Konstruktion bewährt sich recht gut, der Reibungswiderstand bei Lagenänderungen des Winkelhebels bleibt ziemlich gering.

Um das astatische Kräftepaar zu demonstrieren, könnte man einen Winkelhebel mit anderen Abmessungen anwenden. Man kann aber auch bei demselben Winkelhebel bleiben, wenn man entweder den Kräften P, Q und R die Angriffspunkte A, B und C anders zuordnet, oder noch einfacher, indem man die bisherige Unterseite der Konstruktion nach oben kehrt,

Digitized by Google

wobei dann Dreieck ABC — entgegen Satz 6 — gleichen Umfahrungssinn wie das ihm ähnliche Dreieck GHK erhält.

Nachdem dies geschehen ist, zeigt sich, daß der Winkelhebel ABC zwei um 180^0 unterschiedene Gleichgewichtslagen hat, von denen die labile infolge der geringen Reibungswiderstände nur mit großer Vorsicht hergestellt werden kann. Das Verlassen derselben erfolgt bei der geringsten Erschütterung, und zwar so heftig, daß für diesen Versuch die Fallhöhe der Gewichte P, Q und R durch Unterbauten tunlichst beschränkt werden muß.

Den für astatisches Gleichgewicht erforderlichen Zusammenhang der Dreiecke ABC und GHK kann man auch kinematisch ableiten, ohne dabei auf das Krafteck DEF einzugehen.

Bei astatischem Gleichgewicht muß die Summe der von den Gewichten P, Q und R geleisteten Arbeiten bei jeder endlichen Verrückung des Winkelhebels verschwinden. P leistet keine Arbeit, wenn man Punkt A parallel zur Kante GH (Fig. 2) verschiebt, Q keine Arbeit, wenn man Pnnkt B parallel zur Kante HK verschiebt. Bei der hierdurch schon bestimmten Bewegung des Winkelhebels muß sich also auch C parallel zur Kante GK verschieben, damit auch R keine Arbeit leistet. Im allgemeinen beschreiben die Punkte des Winkelhebels bei der charakterisierten Bewegung bekanntlich Ellipsen (Leonardos Ovalwerk), gerade Linien werden nur von denjenigen Punkten beschrieben, welche auf dem Umfang eines Kreises mit AB als Sehne und Winkel GHK als Peripheriewinkel liegen, und eine gerade Linie parallel zu GK, wie leicht zu bestätigen, eben nur von dem Punkte C, für welchen Dreieck ABC ähnlich und zwar symmetrisch ähnlich zu Dreieck GHK ist.

Über lineare homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung mit nur wesentlichen singulären Stellen.

Von Richard Fuchs.

Wenn eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p_1\frac{d^2y}{dx^2} + p_2\frac{dy}{dx} + p_3 y = 0 \qquad \text{(A)}$$

der Fuchsschen Klasse eine Substitutionsgruppe besitzt, die von der Wahl der singulären Stellen unabhängig ist, so müssen, wenn σ die Anzahl der im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Stellen bedeutet, im allgemeinen neben diesen Singularitäten noch mindestens $\varrho = 3(\sigma - 1) - 2$ außerwesentliche singuläre Stellen vorhanden sein.[1]) In gewissen speziellen Fällen aber kann die Anzahl der außerwesentlichen Singularitäten eine geringere sein, und wir wollen uns hier die Aufgabe stellen, diejenigen Fälle hervorzuheben, bei denen diese Anzahl sich auf Null reduziert.

1) Vgl. die Riemannschen Fragmente, Werke S. 386 ff. und L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II_1, S. 383.

Wenn die Gruppe von der Wahl der wesentlichen singulären Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_\sigma$ unabhängig ist, so besteht für ein Fundamentalsystem von Integralen von (A) y_1, y_2, y_3 das Gleichungssystem[1])

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00} y_i + D_{01} \frac{\partial y_i}{\partial x} + D_{02} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wenn t irgend eine der Stellen t_i ist und D_{0i} rationale Funktionen von x bedeuten. Durch fortgesetzte Differentiation ergibt sich bei Benutzung von (A)

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial y_i^{(\alpha)}}{\partial t} = D_{\alpha 0} y_i + D_{\alpha 1} y_i' + D_{\alpha 2} y_i'', \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$

wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten. Das Bildungsgesetz der Größen $D_{\alpha\beta}$ spricht sich in dem Gleichungssystem[2]) aus

$$\text{(D)} \begin{cases} \dfrac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x} = D_{\alpha+1,\beta} - D_{\alpha,\beta-1} + p_{2-\beta} D_{\alpha 2}, \qquad (\alpha = 0, 1) \\ \dfrac{\partial D_{2\beta}}{\partial x} = - D_{2\beta} + p_{2-\beta} D_{22} - p_1 D_{2\beta} - p_2 D_{1\beta} - p_3 D_{0\beta} - \dfrac{\partial p_{2-\beta}}{\partial t}. \end{cases}$$

Für die rationale Funktion D_{02} hat mein Vater[3]) bewiesen, daß sie für alle wesentlichen singulären Stellen mindestens von erster Ordnung verschwinden muß und nur für außerwesentliche singuläre Stellen unendlich werden kann. Sollen also keine außerwesentlichen singulären Stellen vorhanden sein, so muß D_{02} eine ganze rationale Funktion sein. Wendet man dieselben Schlüsse auch auf D_{00} und D_{01} an, so findet man, daß bei Ausschluß außerwesentlicher Singularitäten D_{01} auch eine ganze rationale Funktion sein muß, D_{00} aber für wesentliche singuläre Stellen von erster Ordnung unendlich werden kann. Transformiert man (A) durch $x = \frac{1}{z}$, so geht (B) über in:

$$\text{(B')} \qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00} y_i + (2 D_{02} z^3 - D_{01} z^2) \frac{\partial y_i}{\partial z} + D_{02} z^4 \frac{\partial^2 y_i}{\partial z^2}.$$

Nimmt man, was durch eine Transformation von (A) stets zu erreichen ist, an, daß der unendlich ferne Punkt eine wesentliche singuläre Stelle ist, so muß $D_{02} z^4$ für $z = 0$ verschwinden und $D_{01} z^2$ für $z = 0$ nicht unendlich werden. Es kann also die ganze rationale Funktion D_{02} höchstens vom dritten und D_{01} höchstens vom zweiten Grade sein, wenn diese Funktionen nicht überhaupt identisch verschwinden sollen. D. h. aber: *es muß entweder $D_{02} = 0$ sein, oder es dürfen höchstens drei wesentliche singuläre Stellen im Endlichen vorhanden sein.* Der Fall nämlich, daß nur zwei wesentliche singuläre Stellen vorhanden sind, ist ohne Interesse, da zwei solche Stellen durch eine einfache Transformation von (A) stets in zwei feste Stellen, z. B. 0

1) L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berl. Akademie 1888, S. 1278—82.
2) L. Fuchs, S. B. d. Berl. Ak. 1898. S. 224, Gl. F, F' und Richard Fuchs, Beilage zum Programm des Bismarck-Gymnasiums, Dt. Wilmersdorf-Berlin, Ostern 1902.
3) L. Fuchs, Sitzungsberichte d. Berl. Ak. 1893, S. 983 und 1894, S. 1117.

Digitized by Google

und 1 übergeführt werden können; es hat also kein Interesse, sie als variabel zu betrachten. Es bleiben daher für die Untersuchung nur die beiden Fälle: 1) $D_{02} = 0$, 2) es gibt drei wesentliche singuläre Stellen t_1, t_2, t_3 im Endlichen.

1) Wenn $D_{02} = 0$, so erleichtert man sich die Rechnung, wenn man (A) vorher so transformiert, daß der Koeffizient der zweiten Ableitung verschwindet, wobei D_{03} unverändert bleibt. Aus (D) ergibt sich in diesem Falle

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \dfrac{\partial p_2}{\partial x} D_{01} + 2 p_2 \dfrac{\partial D_{01}}{\partial x} - 2 \dfrac{\partial^3 D_{01}}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial t} = \dfrac{\partial p_3}{\partial x} D_{01} + 3 p_3 \dfrac{\partial D_{01}}{\partial x} + \dfrac{\partial^4 D_{01}}{\partial x^4} + p_2 \dfrac{\partial^2 D_{01}}{\partial x^2}. \end{cases}$$

D_{01} muß, wie schon gesagt, eine ganze rationale Funktion von höchstens zweitem Grade sein und kann nicht identisch verschwinden. Denn wäre $D_{01} = 0$, so müßten nach (1) p_2 und p_3 von t unabhängig sein, was unmöglich ist. Wenn $D_{01} = c(x-a)(x-b)$ ist, so ergibt die Transformation $z = \dfrac{1}{x-a}$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D_{00} y - c\{z(a-b)+1\}\frac{\partial y}{\partial z}.$$

Man kann also von vornherein annehmen, daß D_{01} vom ersten Grade ist, wodurch sich die Gleichungen (1) erheblich reduzieren. Aus (1) folgt, daß p_2 und p_3 nur für solche von t verschiedenen Stellen unendlich werden können, für die D_{01} verschwindet, daß also neben $x = t$ nur noch eine im Endlichen gelegene singuläre Stelle vorhanden sein kann, welcher Fall, wie schon gesagt, ohne Interesse ist. Es bleibt also nur der Fall übrig, daß

$$2)\qquad D_{02} = c(x-t_1)(x-t_2)(x-t).$$

Aus (B) folgt

$$D_{02} = \frac{\partial y_1}{\partial t} z_1 + \frac{\partial y_2}{\partial t} z_2 + \frac{\partial y_3}{\partial z} z_3,$$

wenn z_1, z_2, z_3 das zu y_1, y_2, y_3 adjungierte Funktionssystem bedeutet. Ist dann, für $x = t_1$, η_1, η_2, η_3 ein bezw. zu den Wurzeln r_1, r_2, r_3 gehöriges kanonisches Fundamentalsystem von (A), so gehört das dazu adjungierte System ζ_1, ζ_2, ζ_3 zu den Wurzeln $2-r_1$, $2-r_2$, $2-r_3$. Es ist aber dann

$$D_{02} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t}\zeta_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial t}\zeta_2 + \frac{\partial \eta_3}{\partial t}\zeta_3 + \sum_{i,k} c_{ik}\eta_i\zeta_k,$$

wenn c_{ik} von x unabhängige Größen bedeuten. Wären also r_1, r_2, r_3 nicht um ganze Zahlen voneinander verschieden, so müßten, wenn D_{02} eine rationale Funktion von x sein soll, alle c_{ik} verschwinden. Dann müßte aber, weil $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial t}$ auch mindestens zum Exponenten r_i gehört, D_{02} für $x = t_1$ mindestens von zweiter Ordnung verschwinden. Es muß also hier der Fall eintreten, daß sich zwei der Wurzeln r_1, r_2, r_3 um die Einheit unterscheiden, und die beiden dazugehörigen Integrale von (A) von Logarithmen frei sind. Da man es durch die Transformation $y = (x-t_1)^{r_1} u$ stets so einrichten kann, daß in der aus (A) hervorgehenden Differentialgleichung einer der Exponenten

den Wert Null hat, so können wir annehmen, daß für $x = t_1$ zwei Integrale von (A) zu den Wurzeln 0 und 1 gehören, und daß diese Integrale keine Logarithmen enthalten.

Wenn die zu $x = t_1$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung von (A) die Wurzeln 0 und 1 besitzt, so folgt, daß, für $x = t_1$, p_2 höchstens von erster und p_3 höchstens von zweiter Ordnung unendlich wird. Wenn man aber dann (A) durch eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - t_1$ fortschreitende für $x = t_1$ nicht verschwindende Reihe zu genügen sucht, so zeigt es sich, daß auch p_3 für $x = t_1$ nur von erster Ordnung unendlich werden darf. Was für t_1 gilt, kann ebenso für t_2 und t gesagt werden. Verlegt man also durch die schon vorher erwähnte Transformation t_1 und t_2 nach 0 und 1, so müssen also p_1, p_2, p_3 die Gestalt haben

$$(3)\quad p_1 = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t}, \quad p_2 = \frac{\beta_0 + \beta_1 x}{x(x-1)(x-t)}, \quad p_3 = \frac{\delta}{x(x-1)(x-t)}.$$

Da die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für 0, 1, t, ∞ von t unabhängig sein müssen[1]), so müssen α, β, γ und, wie die Transformation $x = \frac{1}{z}$ zeigt, auch β_1 und δ von t unabhängig sein. Es kann also nur noch β_0 als Funktion von t angesehen werden. Setzt man in (B) für y eine nach positiven ganzen Potenzen von x, $x - 1$ oder $x - t$ fortschreitende Reihe, die für $x = 0$, 1 oder t nicht verschwindet, so sieht man, daß auch D_{00} für keine der Stellen 0, 1, t unendlich werden darf, was im allgemeinen noch möglich war. Da aber D_{00} für $x = \infty$ höchstens von erster Ordnung unendlich werden darf, so muß D_{00} eine ganze rationale Funktion ersten Grades von x sein. Setzt man nun $D_{00} = g_1(x)$, $D_{01} = g_2(x)$, $D_{02} = cx(x-1)(x-t)$ und die Werte für p_1, p_2, p_3 aus (3) in das System von Gleichungen (D) ein, so ergibt die Rechnung folgendes:

Es wird

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} D_{02} = \dfrac{a\,x(x-1)(x-t)}{t(t-1)}, \\ D_{01} = -\dfrac{x(x-1)}{t(t-1)} + p_1 D_{02} - \dfrac{a}{t(t-1)}\dfrac{\partial}{\partial x}\{x(x-1)(x-t)\}, \\ D_{00} = \dfrac{b\,x}{t(t-1)}; \end{cases}$$

und für a, b, α, β, γ, β_0, β_1, δ ergibt sich, wenn man zur Abkürzung $\varrho = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma = \alpha + \gamma + (\alpha + \beta)t$ setzt, folgendes Gleichungssystem:

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} b\beta_1 = 2a\delta(\varrho - 3) - 3\delta \\ b\beta_0 = (t+1)(2a+1)\delta - a\delta\sigma \\ \beta_1(2 - \varrho a) = 3a\delta - \varrho(2a\varrho - 6a + 2b - 2) \\ \beta_1(t + 1 - a\sigma) - \beta_0 = 2a\delta(t+1) - \sigma(2a\varrho - 6a + 2b - 2) \\ a\alpha\beta_1 + \beta_0 + (1 - t)\dfrac{db_0}{dt} = -a\delta + a(2a\varrho - 6a + 2b - 2) \\ 2a\beta_1 = \varrho - 6 + 4a(\varrho - 3) + 3b. \end{cases}$$

1) L. Fuchs, S. B. d. Berl. Ak. 1892, S. 162 Satz I.

Zu einer Auflösung dieser Gleichungen kann man z. B. auf folgende Weise gelangen: Die Substitutionsgruppe der reduktiblen Differentialgleichung

$$(4)\, x(x-1)(x-t)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[\frac{\alpha-\varkappa}{x}+\frac{\beta-\varkappa}{x-1}+\frac{\gamma-\varkappa}{x-t}\right]x(x-1)(x-t)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

deren Integrale leicht angegeben werden können, besitzt eine von t unabhängige Substitutionsgruppe. Dasselbe wird von der Differentialgleichung gesagt werden können, der $\frac{\partial^\varkappa y}{\partial x^\varkappa}=u_\varkappa$ genügt. Diese lautet, wenn $\psi(x) = x(x-1)(x-t)$,

$$(\mathrm{G})\begin{cases}\psi(x)u_\varkappa''' + \psi(x)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{x-t}\right)u_\varkappa'' + [-\varkappa\sigma+\varkappa(\varkappa+1)(t+1) \\ + x(2\varkappa\varrho-3\varkappa(\varkappa+1)]u'_\varkappa + [\varkappa(\varkappa-1)\varrho-2(\varkappa+1)\varkappa(\varkappa-1)]u_\varkappa=0.\end{cases}$$

Die Gleichungen (F) müssen also zu erfüllen sein durch:

$$(\mathrm{H})\begin{cases}\beta_0=-\varkappa\sigma+\varkappa(\varkappa+1)(1+t),\\ \beta_1=2\varkappa\varrho-3\varkappa(\varkappa+1),\\ b=\varrho-2(\varkappa+1),\\ a=\frac{1}{\varkappa-1},\\ \delta=\varkappa(\varkappa+1)\varrho-2\varkappa(\varkappa+1)(\varkappa-1).\end{cases}$$

Diese Ausdrücke genügen nun in der Tat den Gleichungen (F), und zwar nicht nur für ein ganzzahliges, sondern auch für ein ganz beliebiges $\varkappa$. Und man überzeugt sich leicht, daß, wenn $\varkappa$ eine beliebige Konstante ist, (H) die allgemeine Lösung von (F) angibt.

Die Gleichung (G) stellt daher die einzige Differentialgleichung dritter Ordnung dar, deren Substitutionsgruppe von der Wahl der singulären Stellen unabhängig ist, und die keine außerwesentlichen singulären Stellen besitzt. Die Größen α, β, γ, $\varkappa$ sind willkürliche Konstanten.

Die Gleichung (G) ist in der Literatur mehrfach behandelt worden. Sie ist zuerst von Tissot[1]) aufgestellt und dann von Herrn Pochhammer[2]) behandelt worden.[3]) Sie geht in die übliche Form über, wenn man setzt:

$$\alpha=-b_1+1,\quad \beta=-b_2+1,\quad \gamma=-b_3+1$$
$$\varkappa=-(\lambda-2).$$

1) Tissot, Sur un déterminant d'intégrales définies, 1852, Liouvilles Journal, Bd. 17, p. 177.

2) Pochhammer, Crelles Journal Bd. 71, S. 316 ff., Bd. 73, S. 135 ff. Mathematische Annalen Bd. 37 S. 512, u. a.

3) Vgl. auch Schlesinger, Crelles Journal, Bd. 116, S. 119 ff., Bd. 117, S. 161 ff., Handbuch II_1 S. 456.

Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen.

Von Stanislaus Jolles.

Die Fokaltheorie korrelativ involutorischer Räume ist identisch mit der Fokaltheorie der Flächen II. Klasse, und als solche Allgemeingut der Geometer. Die Fokaltheorie geschart involutorischer Räume dagegen ist bisher nicht aufgestellt worden. Nun bilden bekanntlich die Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes eine lineare Kongruenz, und umgekehrt bestimmt eine lineare Kongruenz einen geschart involutorischen Raum. Somit ist die Fokaltheorie des geschart involutorischen Raumes zugleich die Fokaltheorie der linearen Kongruenz, ebenso wie die Fokaltheorie des korrelativ involutorischen Raumes die seiner Inzidenzfläche. Im folgenden werden die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Kongruenzen ohne die zugehörigen Beweise mitgeteilt. Eine ausführliche Abhandlung über diese Theorie erscheint demnächst in den Mathematischen Annalen. Sie enthält unter anderem diese Beweise sowie die Beziehungen der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen zu den Forschungen anderer.

Eine Ebene, welcher durch eine lineare Kongruenz C_1^1 eine zu ihr normale Ebene zugeordnet ist, heiße eine Mittelebene der Kongruenz. Zu den Mittelebenen von C_1^1 gehört die Fluchtebene γ der Kongruenz, sie heiße ihre Hauptmittelebene. Die Mittelebenen von C_1^1 umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid C^2, das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz. Seine Scheitelebene ist γ, seine Hauptachse ist der zu γ normale Kongruenzstrahl c_d und seine Scheitelstrahlen c_1, c_2 sind die beiden in γ gelegenen durch den Punkt $c_d\gamma$ gehenden Geraden c_1, c_2, welchen durch C_1^1 zu einander normale Geraden zugeordnet sind. — c_d ist bekanntlich eine Symmetrieachse von C_1^1, Symmetrieachsen von C_1^1 sind aber auch c_1, c_2. Erstere Symmetrieachse wird als die Hauptsymmetrieachse, jede der beiden letzteren Symmetrieachsen als eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 bezeichnet. Die Erzeugenden des Fokalparaboloides C^2 sind durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet. Werden die beiden Regelscharen von C^2 die Fokalregelscharen und die sie bezw. paarenden Involutionen die Fokalinvolutionen von C_1^1 genannt, so ist C_1^1 hyperbolisch, wenn beide Fokalinvolutionen elliptisch sind, elliptisch, wenn die eine Fokalinvolution hyperbolisch, die andere elliptisch ist. Die Doppelstrahlen der auf C^2 gelegenen Fokalinvolutionen sind die Fokalachsen von C_1^1. Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat also zwei Paar konjugiert imaginäre Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reelle und ein Paar konjugiert imaginäre. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ist die eine Fokalinvolution parabolisch, die andere elliptisch. Letztere wird gebildet durch die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen der betreffenden Fokalregelschar. — Je zwei einander zugeordnete Geraden e_1, e_2 einer Fokalinvolution sind Leitstrahlen je einer in C_1^1 enthaltenen orthogonalen Regelschar II. Ordnung R^2, deren Kreisschnitte zu e_1 bezw. e_2 orthogonal sind. Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz degeneriert R^2 zweimal in einen Strahl, nämlich in die beiden reellen Fokalachsen f', f''. Sie liegen auf allen orthogonalen Regelscharen R^2, zu deren Leitstrahlen zwei

einander zugeordnete Geraden der elliptisch involutorischen Fokalregelschar gehören. Die in einer elliptischen linearen Kongruenz enthaltenen durch f', f'' gehenden Regelscharen II. Ordnung sind demnach orthogonal.

Eine in einer linearen Kongruenz C_1^1 enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung, zu deren Leitschar zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Geraden einer Fokalregelschar gehören, heiße mit dieser Fokalregelschar verbunden. Die Strahlen jeder mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelschar R^2 sind paarweise reziproke Polaren für das Fokalparaboloid C^2 der linearen Kongruenz; reziproke Polaren für C^2 sind auch im allgemeinen je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitstrahlen von R^2. Umgekehrt ist C^2 autopolar für jede mit einer Fokalregelschar verbundene orthogonale Regelschar R^2; einander zugeordnete Strahlen der mit R^2 verbundenen Fokalregelschar haben zu reziproken Polaren für R^2 im allgemeinen wiederum einander zugeordnete Strahlen dieser Fokalregelschar, während einander zugeordnete Strahlen der anderen Fokalregelschar selbst reziprok polar für R^2 sind. Jede mit der einen Fokalregelschar von C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar ist autopolar für jede mit der anderen Fokalregelschar verbundene, die durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen der einen sind reziproke Polaren für die andere.

Die Flächen der mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen bilden einen F^2 Büschel. Seine in vier Geraden zerfallende Basiskurve enthält das Paar Fokalachsen, welches zur andern Fokalregelschar gehört. Die reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen linearen Kongruenz sind reziproke Polaren für die Flächen des F^2 Büschels, welchen alle mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelscharen bilden. Je zwei zu einer Fokalregelschar gehörige Fokalachsen sind die Leitgeraden einer mit C_1^1 in bemerkenswerter Beziehung stehenden linearen Kongruenz. Sie heiße eine Fokalkongruenz der linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende zugeordnet wird, ist stets eine Fokalinvolution einer gewissen linearen Kongruenz. Da nun eine elliptische Fokalinvolution sowohl eine hyperbolische wie auch eine elliptische lineare Kongruenz bestimmen kann, so ist es von Wichtigkeit, die Kriterien für das eine und das andere zu ermitteln, was zu einer Fülle neuer Sätze führt. *Überhaupt scheinen die Fokalinvolutionen einer linearen Strahlenkongruenz für sie von derselben Wichtigkeit zu sein, wie die Fokalinvolutionen für das polare Feld und die Fokalfelder für den polaren Raum.*

Mit der Fokaltheorie von C_1^1 eng verknüpft sind rotatorische polare Räume Γ_e^2, für welche C_1^1 autopolar ist, und für welche die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind. Bisher hat man solche rotatorischen polaren Räume Γ_e^2 wohl für die hyperbolische lineare Kongruenz bestimmt, hingegen die betreffenden Untersuchungen für die elliptische lineare Kongruenz ganz unterlassen. Die Rotationsachsen der rotatorischen polaren Räume Γ_e^2 sind die Erzeugenden des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Während aber bei hyperbolischen linearen Kongruenzen zu diesen Rotationsachsen nur rotatorische polare Räume Γ_e^2 mit reellen Inzidenzflächen gehören, gehören bei elliptischen zu ihnen sowohl rotatorische

Digitized by Google

polare Räume Γ_e^2 mit reellen wie mit imaginären Inzidenzflächen. Alle Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz sind die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit imaginären Inzidenzflächen, ebenso alle Strahlen der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar, welche in denjenigen von den beiden Fokalachsen begrenzten Teil fallen, dem der Scheitelstrahl der Regelschar angehört. Alle außerhalb dieses Teiles gelegenen Strahlen der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar sind die Rotationsachsen von rotatorischen polaren Räumen Γ_e^2 mit reellen Inzidenzflächen. Für die Fokalachsen artet die Inzidenzfläche des zugehörigen rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2 in die betreffende Fokalachse selbst aus.

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Fokalparaboloide C^2 sollen konfokal heißen. Konfokale lineare Strahlenkongruenzen bilden einen quadratischen Strahlenkomplex Γ^2; sie sind für C^2 autopolar und haben dasselbe Achsenzylindroid C^3. Werden auf den Tangentialebenen von C^2 in ihren Schnittgeraden mit der Scheitelebene dieser Fläche Normalebenen errichtet, so umhüllen diese Ebenen das Achsenzylindroid C^3, es ist zugleich der Ort der Mittelpunkte aller C^2 umschriebenen Kegel des Hachette. Die zwischen den Flächen C^2 und C^3 bestehenden Beziehungen führen zu neuen Eigenschaften des gleichseitigen Paraboloides. So bilden z. B. die zueinander polaren Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloides die Regelschar eines Zylindroides und ebenso bilden die Regelschar eines Zylindroides die Scheitelstrahlen konfokaler hyperbolischer Paraboloide. Aus der Theorie des Fokalparaboloides und Achsenzylindroides konfokaler linearer Kongruenzen folgen beiläufig bemerkt recht anschauliche Bedingungen, unter denen zueinander normale Tangentialebenen eines Kegels II. Ordnung sich in den Strahlen eines Kegels II. Ordnung oder zweier Strahlenbüschel I. Ordnung schneiden.

Vier konfokale lineare Kongruenzen sollen vier harmonische konfokale lineare Kongruenzen heißen, wenn sie mit einem, und wie hieraus folgt, mit jedem Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2 vier harmonische Strahlen gemein haben. Ferner sollen die ∞^1 konfokalen linearen Kongruenzen, welche zu demselben Fokalparaboloide gehören, eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen genannt werden. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen läßt sich hiernach auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen. Heißt der von den Kongruenzen einer Kette gebildete quadratische Komplex Γ^2 der die Kette umfassende Komplex, so ist eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen zu einem Kegel des sie umfassenden Komplexes Γ^2 projektiv, wenn jede Kongruenz der Kette ihrem Schnittstrahle mit dem Kegel entspricht. Die einem beliebigen Punkte des Raumes durch die Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte bilden eine zur Kette projektive Parabel.

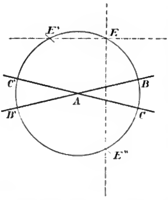
Halensee b. Berlin, d. 28. Februar 1906.

Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen.

Von Emil Haentzschel.

Die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen ist in den letzten Jahren mehrfach Gegenstand von Erörterungen gewesen. Die Anregung dazu ist im wesentlichen durch die von Herrn Lemoine veröffentlichte Schrift: Géométrographie, Paris, Gauthier-Villars, 1902, gegeben worden. Zur Erläuterung des von Herrn Lemoine eingeführten Begriffs „Genauigkeit“ greife ich aus derselben eine beliebige Aufgabe heraus. Auf S. 30 heißt es: Aufgabe 27. Durch einen Punkt E zu einer der Winkelhalbierenden des von den Geraden AB und AC gebildeten Winkels die Parallele zu ziehen. Geometrographische Konstruktion. Man nehme AE in den Zirkel, setze in A ein und beschreibe mit AE den Kreis, der AB in B und B', AC in C und C' schneiden wird. Jetzt nehme man BE in den Zirkel und beschreibe um C' den Kreis, der den um A beschriebenen Kreis in E' treffen wird. EE' ist die gesuchte Parallele. Wünscht man die Halbierungslinie des Nebenwinkels zu zeichnen, so setze man in C den Zirkel ein mit BE als Radius. Der um A beschriebene Kreis wird dann in E'' geschnitten; es ist EE'' die gesuchte Parallele.

Da wir, um EE' zu ziehen, das Lineal so anlegen mußten, daß es durch die beiden Punkte E und E' geht, so haben wir nach Herrn Lemoine die Operation R_1 (= règle), d. h. ein Lineal so anzulegen, daß es durch einen gegebenen Punkt geht, zweimal vollführt, also das Symbol R_1 zweimal zu notieren. Wir mußten die Zirkelspitzen in A, E, B, E, C' einsetzen, d. h. fünfmal die Operation C_1 (= centre) machen, wofür Herr Lemoine $5C_1$ anschreibt. Daraus ergibt sich nach ihm die Genauigkeit $2 + 5 =$ Sieben.



Dieses mechanische Abzählen der ausgeführten Operationen hat merkwürdigerweise einige Anhänger und Verteidiger gefunden, obschon doch diese durchaus oberflächliche Art, den schwierigen Begriff „Genauigkeit einer geometrischen Konstruktion“ zu definieren, unhaltbar ist. Man fühlt, daß hier ein Fehler gemacht wird; aber, wenn es nicht gleich gelang, ihn genau festzulegen, so liegt dies meines Erachtens an folgendem Umstande. Die Präzisions-Mathematik kennt ihrem Sinn und ihrer Bedeutung nach ein Unterscheiden der Genauigkeit geometrischer Konstruktionen überhaupt nicht. Die theoretische Geometrie läßt jede Gerade durch zwei Punkte, jeden Punkt durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt sein. Die natürliche oder Approximations-Geometrie aber muß hinzufügen, „wenn die beiden Punkte nicht zu nahe beieinander liegen,“ oder „doch

Digitized by Google

dürfen die beiden Geraden nicht einen gar zu spitzen Winkel einschließen" (Weber und Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 2, S. 115. Leipzig 1905).

Die Geometrographie gehört der Präzisionsmathematik an. Sehr richtig sagt deshalb Herr Lemoine, l. c. S. 18: Eine Konstruktion ist geometrographisch, wenn sie 1) allgemein ist, d. h. sich anwenden läßt, wie auch Größe und Lage der gegebenen Stücke beschaffen ist, 2) unter allen möglichen Konstruktionen die einfachste ist. Er nimmt daher unter die Annahmen, die der Geometrographie zugrunde liegen, mit Recht die folgende auf: Sie setzt voraus, daß ein Punkt vollkommen bestimmt ist, wie klein auch der Winkel sein mag, unter dem sich die beiden, ihn festlegenden Geraden schneiden (Lemoine, Archiv der Math. und Phys. 3. Reihe. Bd. 1. S. 99, 1901). In gleichem Sinne sagt Herr Reusch im Vorwort seiner Schrift: Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig, Teubner, 1904, S. VIII: Die Geometrographie ist rein theoretischer Natur. Herr Lemoine beging daher einen fundamentalen Fehler, als er den Begriff „Genauigkeit" in sein System aufnahm. Denn, indem dieser Begriff der Approximations-Mathematik eigentümlich ist, gab er Anlaß zur Verwirrung, vermischte Herr Lemoine zwei sich scharf sondernde Zweige der Geometrie.

Die Schwierigkeiten für eine erschöpfende Diskussion dieses Punktes häufen sich aber um deswillen, so daß die Polemik der Herren Mehmke (D. Math. Ver. Karlsbad 1902) und Holzmüller (Unterrichtsblätter f. Math. Jahrg. 11, 1905) gegen den der Approximationsgeometrie entlehnten Bestandteil der Geometrographie nicht völlig überzeugend gewirkt hat, weil, um mit Herrn Klein zu reden, „in der zeichnenden Geometrie eine rationelle Fehlertheorie, wie sie in der Geodäsie vorliegt, bisher nicht entwickelt ist." „Dabei nenne ich," führt Herr Klein fort, „eine Fehlertheorie rationell, welche auf Verwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen basiert ist, so daß wir, um die Genauigkeit einer Konstruktionsmethode zu beurteilen, sie wiederholt auf dieselbe Aufgabe anwenden und dann die erhaltenen Resultate mit der Methode der kleinsten Quadrate oder sonstwie abgleichen." (F. Klein: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Autographiertes Vorlesungsheft. Leipzig, Teubner, 1902.)

Herr W. Franz Meyer (Königsberg) hat daher einen jüngeren Fachgenossen veranlaßt, auf diesen Punkt sein Augenmerk zu richten. Herr Konrad Nitz hat das Ergebnis seiner Studien in einer Dissertation: Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Königsberg, 1905, niedergelegt. Eine reiche Literatur ist über diesen Punkt vorhanden, die, mit Bravais (1846) beginnend, u. a. Arbeiten von Chr. Wiener, Helmert (1868), Jordan (1871), Czuber aufführt, und mit den Dissertationen von F. Gener (Freiburg, 1902) und P. Böhmer (Göttingen, 1904) schließt. Es ist merkwürdig, daß Herr Lemoine sogar an den Arbeiten seiner Landsleute Bravais, Bienaymé (1851), Bertrand (C. R. 1888), d'Ocagne (C. R. 1894) achtlos vorübergegangen ist.

Um einen Einblick in diesen Ideenkreis zu geben, knüpfe ich an die im Eingang dargestellte Konstruktionsaufgabe an. Offenbar ist es doch bei Ausführung derselben keineswegs gleichgültig, unter welchem Winkel sich

Digitized by Google

die beiden Geraden schneiden. Ist er sehr klein, der Punkt A also ein sog. schleifender Punkt, so ist man von vorn herein im Zweifel, ob man auch wirklich in A den Zirkel eingesetzt hat; es ist praktisch unmöglich, A von den benachbarten Punkten zu unterscheiden. Abgesehen hiervon versagt die Konstruktion auch dann, wenn E und E' sehr nahe beieinander zu liegen kommen. Der stolze Bau einer geometrographischen Konstruktion erweist sich also in Hinsicht auf Genauigkeit (exactitude) und Einfachheit (simplicité) als ein Nebelgebilde; sie war eben doch nur, um mit Steiner zu reden, eine mit der Zunge ausgeführte Konstruktion. Ein Hinweis auf weniger einfache Konstruktionen für solche Fälle wäre in völligem Widerspruch mit dem Prinzip der Lemoineschen Geometrographie.

Die Fehlertheorie stellt den Satz auf: Alle Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit bei Ausführung der Operation C_1 für den Schnittpunkt zweier Geraden liegen auf konzentrischen, ähnlich liegenden Ellipsen um den gegebenen Schnittpunkt; dies sind die sog. Fehlerellipsen. Es ist dies das Theorem von Bravais. Macht man die gegebenen Geraden zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, bezeichnet man den Durchschnittswinkel mit ω, die mittleren Fehler beim Einsetzen des Zirkels in Beziehung auf jede Gerade mit m_1 bezw. m_2, — bei einer Strichbreite von 0,10—0,15 mm schwanken bei verschiedenen Personen und unter verschiedenen Umständen diese mittleren Fehler in den Grenzen 0,035—0,060 mm, — und ist k eine willkürliche Konstante, so ist die Gleichung der Fehlerellipse $\frac{x^2}{m_1^2}+\frac{y^2}{m_2^2}=\frac{2k^2}{\sin^2\omega}$. Sie ist dem Parallelogramm einbeschrieben, das von den sich schneidenden Geraden im Abstande $\pm m_1$ bezw. $\pm m_2$ gebildet wird. Für $m_1 = m_2 = m$ ist die Länge der Halbachsen: $a = \frac{km}{\sin\frac{\omega}{2}}$ und $b = \frac{km}{\cos\frac{\omega}{2}}$.

Für $\omega = 90^0$ haben wir also einen Fehlerkreis.

Schwieriger ist die Bestimmung der Fehlerfläche für die Punkte B und C', die sich als Schnittpunkte je einer der beiden Geraden und eines Kreises ergeben haben. Die Theorie zeigt hier, daß man es mit Kurven 4. Ordnung, den sog. Fehlerovalen 4. Ordnung, zu tun hat. Punkt E' ergibt sich als Schnittpunkt zweier Kreise. Die Fehlerfläche für einen solchen Punkt wird von einem Fehleroval 8. Ordnung begrenzt.

Zum Schluß wird in der Konstruktion die Gerade EE' gezogen. Nimmt man den einfachsten Fall an, nämlich den, daß zwei Punkte als Schnittpunkte von rechtwinkligen Geraden oder noch besser als kreisförmige Bleistiftpunkte gegeben sind, so daß der mittlere Fehler des Anlegens des Lineals nach jeder Richtung gleichgroß ausfällt, so ist die Genauigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte charakterisiert durch eine Schar konfokaler Hyperbeln in der Art, daß alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Hyperbeln umhüllen. Die Gleichung dieser Hyperbeln ist: $\frac{y^2}{k^2m^2}-\frac{x^2}{e^2-k^2m^2}=1$. Endlich bedarf noch der Erwähnung die Genauigkeit, mit der ein Kreis charakterisiert ist, der mit gegebenem Radius um einen gegebenen Punkt beschrieben werden soll. Da die Genauigkeit des Einsetzens der Zirkelspitze durch eine Schar von Fehlerflächen gegeben ist, und zwar durch Fehlerellipsen und Fehlerovale, so erkennt man, daß alle Kreise gleicher Wahrscheinlichkeit eine Parallel-

kurve zu einer Fehlerkurve des Mittelpunktes umhüllen; bei Fehlerellipsen im besonderen handelt es sich um die Toroiden.

Zum Schluß sei auf die photographische Nachbildung einer Zeichnung hingewiesen, — eine solche wurde vorgelegt, — die auf Veranlassung der Firma Clemens Riefler in Nesselwang und München vom Ingenieur Esseling angefertigt, ein regelmäßiges Sechzigeck mit seinen sämtlichen Diagonalen, also insgesamt 1770 gerade Linien, darstellt. Sie ist geeignet zu den mannigfachsten Gedanken anzuregen, so über die Güte des Zeichenmaterials, als eine der Vorbedingungen für die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen, und ferner über die Befähigung des Zeichners zu seiner Arbeit, also gleichsam über dessen persönliche Gleichung.

Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht, inbezug auf ihr Verhalten bei der Iteration.

Von Paul Koebe.

Die Gleichung

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

zwischen den Variablen x und y stellt, abgesehen von birationalen Transformationen, das allgemeine algebraische Gebilde vom Range *Eins* dar, wenn g_2 und g_3 willkürliche Konstanten bezeichnen, welche nur der Ungleichheitsbedingung $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ unterworfen sind. Wird mit u das elliptische Integral erster Art

$$u = \int_{\infty,\,\infty}^{x,\,y} \frac{dx}{y}$$

bezeichnet, so lassen sich zwei ein primitives Periodenpaar bildende und der Nebenbedingung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ [1]) genügende Konstanten 2ω, $2\omega'$ so angeben, daß

$$x = \wp(u \mid \omega, \omega'), \quad y = \wp'(u \mid \omega, \omega')$$

wird, wobei $\wp(u \mid \omega, \omega')$ die zu dem primitiven Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ gehörende Weierstraßsche *Pe*-Funktion bezeichnet.

Jeder birationalen Transformation, durch welche das algebraische Gebilde (x, y) in sich selbst übergeht, entspricht bekanntlich in der u-Ebene eine Transformation von der Form

$$(2) \qquad u_1 = \alpha u + \beta,$$

unter α und β Konstanten verstanden. Um alle birationalen Transformationen des Gebildes (x, y) in sich selbst zu erhalten, hat man in der Gleichung (2) der Konstanten β jeden reellen und komplexen Wert, der Konstanten α, wenn weder g_2 noch g_3 gleich Null ist, nur die Werte ± 1 beizulegen, wenn $g_3 = 0$ ist, außer den Werten ± 1 noch die Werte $\pm i$, wenn $g_2 = 0$

1) Das Zeichen $\Re$ soll bedeuten: Reeller Teil von.

ist, außer den Werten ± 1 noch die Werte $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$. Diejenigen birationalen Transformationen, denen in der u-Ebene eine Transformation (2) mit von *Eins* verschiedenem Koeffizienten α entspricht, verhalten sich, wie leicht zu sehen ist, bei der Iteration periodisch, und zwar ist die Zahl, welche angibt, nach wievielmaliger Anwendung der birationalen Transformation die identische Transformation erhalten wird, gleich dem Exponenten, zu welchem die Einheitswurzel α gehört, also eine der Zahlen 2, 3, 4, 6.

Die Transformationen von der Form

$$u_1 = u + a, \tag{3}$$

wobei a eine willkürliche Konstante bezeichnet, bilden den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung. Diese Transformationen zerfallen, wie sich zeigen wird, in *drei charakteristisch unterschiedene Klassen.*

Aus der Transformation (3) und der zu derselben inversen Transformation $u_{-1} = u - a$ entspringen durch Iteration die Transformationen

$$u_n = u + na. \qquad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots] \tag{4}$$

Bezeichnen m und m' zwei von einander und von n unabhängige Parameter, so wird durch die Gleichung

$$u_n = u + na + 2m\omega + 2m'\omega' \qquad \left[\begin{matrix} n \\ m \\ m' \end{matrix} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right] \tag{5}$$

dieselbe Gesamtheit birationaler Transformationen wie durch Gleichung (4) dargestellt. Vermöge der Gleichung (5) entspricht einem Punkte b der u-Ebene das System der Punkte $b + na + 2m\omega + 2m'\omega'$, dem Punkte $u = 0$ das System der Punkte $na + 2m\omega + 2m'\omega'$, welches aus dem System der Punkte $b + na + 2m\omega + 2m'\omega'$ durch eine bloße Parallelverschiebung hervorgeht. Die durch die Form $na + 2m\omega + 2m'\omega'$ dargestellte Punktmenge werde mit M bezeichnet. Die Natur dieser Punktmenge soll jetzt näher untersucht werden.

Zu dem Zwecke bemerke man zunächst folgende Eigenschaften der Punktmenge M:

I. Sind π_1 und π_2 zwei Punkte der Menge, so gehören auch die Punkte

$$\pi_1 + l(\pi_2 - \pi_1) \qquad [l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

zur Menge (s. Fig. 1).

Fig. 1.

II. Sind π_1, π_2, π_3 drei Punkte der Menge, die nicht in einer Geraden liegen, also ein eigentliches Dreieck bilden, so gehört auch das durch diese Punkte bestimmte Parallelpunktgitter

$$\pi_1 + l(\pi_2 - \pi_1) + l'(\pi_3 - \pi_1) \qquad \left[\begin{matrix} l \\ l' \end{matrix} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right]$$

zur Menge (s. Fig. 2).

Inbezug auf die Menge M lassen sich nun folgende drei Fälle unterscheiden:

a) Es gibt eine positive von Null verschiedene Zahl Δ von der Beschaffenheit, daß keine zwei Punkte der Menge M einen Abstand $< \Delta$ haben.

b) Wenn δ eine beliebig klein gegebene positive von Null verschiedene Größe ist, so lassen sich stets zwei von einander verschiedene Punkte der Menge M bestimmen, deren Abstand $< \delta$ ist; es existiert jedoch eine positive von Null verschiedene Zahl Δ_1 von der Beschaffenheit, daß es in der Menge M kein System von drei ein eigentliches Dreieck bildenden Punkten gibt, von denen je zwei einen Abstand $< \Delta_1$ haben.

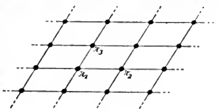


Fig. 2.

c) Wenn δ eine beliebig klein gegebene positive von Null verschiedene Größe ist, so lassen sich in der Menge M stets drei ein eigentliches Dreieck bildende Punkte bestimmen, von denen je zwei einen Abstand $< \delta$ haben.

Der Fall a).

Im Falle a) enthält jeder ganz im Endlichen liegende Bereich der u-Ebene nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge M, und man erkennt bei Beachtung der Eigenschaft II., daß die Punktmenge M ein durch drei geeignet auszuwählende Punkte der Menge bestimmtes *Parallelpunktgitter* darstellt. Unter den Punkten

$$b + na \qquad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

befinden sich im Falle a) nur eine endliche Anzahl solcher, die mod. $(2\omega, 2\omega')$ einander inkongruent sind; zu einem Punkte (x_0, y_0) des algebraischen Gebildes (x, y) gehören also nur eine *endliche Anzahl von Bildpunkten innerhalb des Gebildes*. Für das Eintreten des Falles a) ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Wenn

$$a = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

gesetzt wird, unter μ und μ' reelle Zahlen verstanden, so sind μ und μ' rational.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Brüche, durch welche μ und μ' dargestellt werden, gibt an, nach wievielmaliger Anwendung der birationalen Transformation die identische Transformation erhalten wird.

Der Fall b).

Im Falle b) kann von der Punktmenge M behauptet werden, daß sie folgende Eigenschaft besitzt: Sind $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ vier Punkte der Menge M, für welche die Abstände $|\pi_2 - \pi_1|$ und $|\pi_4 - \pi_3|$ kleiner als $\frac{\Delta_1}{2}$ sind, so ist die Verbindungsgerade der Punkte π_1 und π_2 entweder identisch mit der Verbindungsgeraden der Punkte π_3 und π_4 oder ihr parallel.

Anderenfalls würden die Punkte π_1 und π_2 mit dem Punkte $\pi_1 + (\pi_4 - \pi_3)$, der wegen II. ebenfalls zur Menge M gehört, ein eigentliches Dreieck bilden, dessen Seiten sämtlich kleiner wären als Δ_1. Die Existenz eines solchen Dreiecks ist aber durch b) ausgeschlossen worden.

Man denke sich nun aus der Menge M zwei Punkte ausgewählt, deren Abstand $< \frac{\Delta_1}{2}$ ist, und durch jeden Punkt der Menge M diejenige Gerade gezogen, welche der Verbindungsgeraden der beiden ausgewählten Punkte parallel ist. Das auf diese Weise konstruierte System einander paralleler Geraden werde mit S bezeichnet. Je zwei Punkte der Menge M, deren Abstand $< \frac{\Delta_1}{2}$ ist, liegen dann wegen der soeben bewiesenen Eigenschaft der Punktmenge stets auf einer und derselben Geraden des Systems S. Nun gibt es nach Voraussetzung h) in der Menge M Paare von Punkten, deren Abstand kleiner ist als eine *beliebig klein* gegebene positive Größe δ. Folglich gibt es, wenn δ gegeben ist, stets eine Gerade des Systems S, auf welcher sich zwei Punkte der Menge M befinden, deren Abstand $< \delta$ ist. Daraus kann mit Hilfe von II. geschlossen werden, daß jede Gerade des Systems S zwei Punkte der Menge M enthält, deren Abstand $< \delta$ ist. Beachtet man jetzt die Eigenschaft I der Menge M, so erkennt man, daß das Geradensystem S, welches nach seiner Definition sämtliche Punkte der Menge M auf sich enthält, von diesen Punkten *allenthalben unendlich dicht erfüllt* wird, d. h.: jeder Punkt der u-Ebene, welcher auf einer Geraden des Systems S liegt, ist ein Häufungspunkt für die Punktmenge M.

Nun soll nach h) in der Menge M kein einziges System von drei ein eigentliches Dreieck bildenden Punkten existieren, von denen je zwei einen Abstand $< \Delta_1$ haben. Je zwei Geraden des Systems S müssen daher einen Abstand $\geqq \Delta_1$ haben, und zwar bilden diese Geraden, wie man mit Hilfe von I. erkennt, ein *System von äquidistanten Geraden.*

Das von den Periodenpunkten

$$2m\omega + 2m'\omega' \qquad \left[{m \atop m'} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right]$$

gebildete Punktgitter stellt eine in der Menge M als Teilmenge enthaltene Menge M_1 dar. Auch die Menge M_1 besitzt die Eigenschaften I. und II. Die Punkte der Menge M_1 verteilen sich in bestimmter Weise auf dem Geradensystem S. Der Punkt $u = 0$ gehört zur Menge M_1. Diejenige Gerade des Systems S, welche durch den Punkt $u = 0$ geht, werde mit G bezeichnet. Auf der Geraden G muß noch ein anderer von $u = 0$ verschiedener Punkt der Menge M_1 liegen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte wegen II. auf *keiner* Geraden des Systems S mehr als *ein* Punkt der Menge M_1 liegen, und folglich würden, wenn zwei beliebig weit von einander entfernte Geraden des Systems S herausgegriffen werden, in dem ganzen von diesen beiden Geraden begrenzten Teil der Ebene nur eine endliche Anzahl von Punkten des Punktgitters M_1 liegen, was offenbar nicht zutrifft.

Unter den von $u = 0$ verschiedenen Punkten des Gitters M_1, welche auf der Geraden G liegen, gibt es einen, welcher dem Punkte $u = 0$ am nächsten liegt. Der zu diesem Punkt gehörende Wert von u werde mit $2\bar{\omega}$ bezeichnet. Dann kann eine andere komplexe Größe $2\bar{\omega}'$, welche

ebenfalls einem Punkte des Gitters M_1 entspricht, so bestimmt werden, daß die Größen $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ ein mit $(2\omega, 2\omega')$ äquivalentes primitives Periodenpaar bilden. Das Parallelogramm mit den Ecken 0, $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}' = 2\tilde{\omega}''$, $2\tilde{\omega}'$ werde mit Π bezeichnet. Dieses Parallelogramm wird in der Weise, wie Fig. 3 zeigt, durch das Geradensystem S in eine gewisse Anzahl, N, von einander kongruenten Parallelogrammen zerlegt. (In Fig. 3 ist $N = 5$ gewählt.)

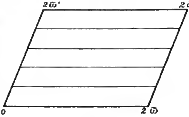


Fig. 3.

Die *Zahl* N hat für die betrachtete Transformation $u_1 = u + a$ eine charakteristische Bedeutung. Es werde mit $[u]$ der dem Punkte u modd. $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ kongruente im Periodenparallelogramm Π (die Seiten $2\tilde{\omega} \ldots 2\tilde{\omega}''$ und $2\tilde{\omega}'' \ldots 2\tilde{\omega}'$ excl.) liegende Punkt bezeichnet. Von den Punkten

$$[na] \qquad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

sind in dem gegenwärtig betrachteten Falle b) keine zwei modd. $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ einander kongruent. Die Punkte $[na]$ gehören dem Punktsystem M an und bilden für die Gesamtheit der Punkte dieses Punktsystems ein vollständiges Restsystem modd. $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$. Die Punkte $[na]$ liegen sämtlich auf den N in Fig. 3 dargestellten der Strecke $0 \ldots 2\tilde{\omega}$ parallelen Strecken ($0 \ldots 2\tilde{\omega}$ incl., $2\tilde{\omega}' \ldots 2\tilde{\omega}''$ excl.), und zwar kehren diese N Strecken, wenn man n die ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt, in einer bestimmten Reihenfolge periodisch wieder.

Man übersieht jetzt, wie sich die der Transformation $u_1 = u + a$ entsprechende birationale Transformation des algebraischen Gebildes (x, y) in sich selbst im Falle b) bei der Iteration verhält: Wenn (x_0, y_0) ein Punkt der Riemannschen Fläche ist, welche die Verzweigung der Funktion $y(x)$ geometrisch darstellt, so gibt es in der Riemannschen Fläche N *geschlossene analytische Linien* (Periodenwege), von welchen keine zwei einen Punkt gemeinsam haben und eine durch den Punkt (x_0, y_0) selbst geht. Diese N Linien sind Träger der Menge aller Bildpunkte des Punktes (x_0, y_0), und zwar werden die genannten Linien von den Bildpunkten des Punktes (x_0, y_0) allenthalben unendlich dicht erfüllt. Durch den Iterationsprozeß ist eine bestimmte Reihenfolge der Bildpunkte festgesetzt. Durchläuft man die Bildpunkte in dieser Reihenfolge, so gelangt man zu jeder der N geschlossenen Linien und zwar jedesmal nach N, niemals nach weniger als N Schritten zur selben Linie.

Es muß nun untersucht werden, welche Bedingungen für die Zahl a notwendig und hinreichend sind, damit der Fall b) eintritt.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung kann sofort aus Fig. 3 abgelesen werden. Der Punkt $u = a$ gehört nämlich der Menge M an und liegt daher auf einer Geraden des Systems S. Also kann

$$a = 2\varkappa\tilde{\omega} + \frac{2\lambda}{N}\tilde{\omega}'$$

gesetzt werden, wenn mit $\varkappa$ eine reelle Zahl, mit λ eine positive oder

negative ganze Zahl bezeichnet wird. Hierbei ist die Zahl $\varkappa$ irrational; denn andernfalls würde a die für das Eintreten des Falles a) notwendige und hinreichende Bedingung erfüllen. Die ganze Zahl λ kann mit der ganzen Zahl N keinen Teiler gemeinsam haben, weil sonst die Zahl der mit der Strecke $0 \ldots 2\bar{\omega}$ parallelen Strecken, auf denen die Punkte $[na]$ liegen, kleiner als N sein würde. Damit ist folgende für das Eintreten des Falles b) nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung gefunden:

Es gibt ein mit $(2\omega, 2\omega')$ äquivalentes primitives Periodenpaar $(2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}')$ von der Beschaffenheit, daß von den beiden reellen Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$, welche sich aus der Gleichung

$$a = 2\varkappa\bar{\omega} + 2\varkappa'\bar{\omega}'$$

ergeben, die erste irrational, die zweite rational ist. Wird $\varkappa'$ als Quotient von zwei teilerfremden ganzen Zahlen dargestellt, so hat der Nenner für die betrachtete Transformation die Bedeutung der Zahl N.

Um eine andere für das Eintreten des Falles b) charakteristische Bedingung zu erhalten, kann man entweder einen direkten Weg einschlagen oder, ausgehend von der soeben gefundenen charakteristischen Bedingung, folgendermaßen verfahren.

Aus den Gleichungen

$$2\bar{\omega} = 2\beta_1\omega - 2\alpha_1\omega', \quad 2\bar{\omega}' = 2\sigma\omega + 2\tau\omega'$$

ergeben sich vier reelle ganze Zahlen β_1, α_1, σ, τ, und es ist

$$\alpha_1\sigma + \beta_1\tau = 1,$$

$$a = 2(\varkappa\beta_1 + \varkappa'\sigma)\omega + 2(-\varkappa\alpha_1 + \varkappa'\tau)\omega'.$$

Zwischen den reellen Zahlen

$$\varkappa\beta_1 + \varkappa'\sigma = \mu$$

und

$$-\varkappa\alpha_1 + \varkappa'\tau = \mu'$$

besteht, wie sich bei Berücksichtigung der Gleichung $\alpha_1\sigma + \beta_1\tau = 1$ ergibt, eine lineare Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten, nämlich die Gleichung

$$\alpha_1 \cdot \mu + \beta_1 \cdot \mu' - \varkappa' = 0.$$

Außer der vorstehenden linearen Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten kann zwischen den Größen μ und μ' nicht noch eine zweite, von jener unabhängige lineare Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten bestehen, da sonst μ und μ' rationale Zahlen und folglich die Bedingungen des Falles a) erfüllt wären.

Die zweite für das Eintreten des Falles b) charakteristische Bedingung lautet nun:

Wenn μ und μ' aus der Gleichung

$$a = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

als reelle Größen bestimmt werden, so besteht zwischen μ und μ' eine und nur eine lineare Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten

$$\alpha\mu + \beta\mu' + \gamma = 0.$$

Der Beweis dafür, daß diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergibt sich folgendermaßen. Es kann angenommen werden, daß α, β, γ ganze Zahlen sind, welche keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen α und β werde mit d bezeichnet. Man bestimme zwei ganze Zahlen σ und τ so, daß $\frac{\alpha}{d}\sigma + \frac{\beta}{d}\tau = 1$ wird, und setze

$$2\frac{\beta}{d}\omega - 2\frac{\alpha}{d}\omega' = 2\tilde{\omega}, \qquad 2\sigma\omega + 2\tau\omega' = 2\tilde{\omega}',$$

$$\mu\tau - \sigma\mu' = \varkappa, \qquad -\frac{\gamma}{d} = \varkappa';$$

dann wird

$$a = 2\varkappa\tilde{\omega} + 2\varkappa'\tilde{\omega}'.$$

Die Größe $\varkappa$ ist irrational; denn wäre sie rational, so würden zwischen den Größen μ und μ' zwei von einander unabhängige lineare Gleichungen mit rationalen Zahlenkoeffizienten bestehen, entgegen der Voraussetzung. Die Größe $\varkappa'$ hat einen rationalen Wert, nämlich, in reduzierter Form dargestellt, den Wert $-\frac{\gamma}{d}$. Für die Zahl a ist also die zuerst aufgestellte, für das Eintreten des Falles b) charakteristische Bedingung erfüllt; zugleich ergibt sich:

Der größte gemeinschaftliche Teiler d der Zahlen α und β hat für die Transformation $u_1 = u + a$ die Bedeutung der Zahl N.

Der Fall c).

Der bisher unerörtert gebliebene Fall c) kann jetzt leicht erledigt werden. Aus der Annahme c) folgt mit Hilfe von II., daß die ganze u-Ebene von den Punkten der Menge M allenthalben unendlich dicht erfüllt wird. Innerhalb der Riemannschen Fläche, welche zur Funktion $y(x)$ gehört, verteilen sich also die Bildpunkte eines Punktes (x_0, y_0) so, daß in der Nähe jedes Punktes der Riemannschen Fläche Bildpunkte liegen. Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten des Falles c) ergibt sich:

Wenn

$$a = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

gesetzt wird, unter μ und μ' reelle Größen verstanden, so besteht zwischen μ und μ' keine lineare Gleichung

$$\alpha\mu + \beta\mu + \gamma = 0$$

mit rationalen Zahlenkoeffizienten α, β, γ; oder: es ist nicht möglich, ein mit $(2\omega, 2\omega')$ äquivalentes primitives Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ sowie eine reelle Zahl $\varkappa$ und eine reelle rationale Zahl $\varkappa'$ anzugeben, für welche

$$a = 2\varkappa\tilde{\omega} + 2\varkappa'\tilde{\omega}'$$

wird.

Mit der vorstehenden Untersuchung, soweit dieselbe sich auf die Punktmenge M bezieht, ist eine arithmetische Arbeit von Kronecker nahe verwandt.

Digitized by Google

Kronecker: Über näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. (Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1884, Bd. II, pag. 1179—1193 und 1271—1299.)

Eine andere in dem genannten Bande der Sitzungsberichte veröffentlichte Arbeit von Kronecker gehört demselben Gedankenkreise an:

Kronecker: Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen (l. c. pag. 1071—1080).

Über die Projektion des räumlichen Punktgitters.

Von Gerhard Hessenberg.

1. Seien ω_1, ω_2, ω_3 drei komplexe Zahlen, zwischen denen nur eine Gleichung

$$(1) \qquad \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 = 0$$

mit reellen Koeffizienten α_i besteht, deren geometrische Bilder also nicht in eine Gerade fallen. Die Menge aller komplexen Zahlen von der Form

$$(2) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3,$$

worin m_i ganze Zahlen, positiv, negativ oder null, sind, werde mit Ω bezeichnet. *Diese Menge Ω ist ein ebenes Punktgitter, wenn die α_i ganzzahlig sind. Sie liegt auf einer Schar äquidistanter Geraden dicht, wenn eine und nur eine Gleichung*

$$(3) \qquad a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

mit ganzzahligen reellen Koeffizienten a_i besteht. Sie ist endlich in der ganzen Zahlenebene dicht, wenn eine solche Relation nicht besteht.

Für diesen Satz gab in der Dezembersitzung vergangenen Jahres Herr Koebe einen Beweis an. In der anschließenden Diskussion wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Menge Ω als Projektion eines Raumgitters aufgefaßt werden kann. Indem ich diesen Gedanken weiter verfolgte, gelangte ich zu einer einfachen geometrischen Interpretation der drei möglichen Fälle. Auf dieser Interpretation läßt sich aber zugleich ein rein geometrischer Beweis des Satzes aufbauen, der im folgenden skizziert werden soll.

Es bezeichnen durchweg

ω_1, ω_2, ω_3, $\bar{\omega}_i$ Vektoren mit dem gemeinsamen Anfangspunkt O

α, β, λ, μ, ν reelle Zahlen

a, m, p, q ganze, positive oder negative Zahlen einschließlich der Null.

In Summenzeichen durchläuft der Zeiger i stets die Werte 1, 2, 3.

I. Begriff des Gitters.

2. Die Menge der Endpunkte aller Vielfachen $m\omega$ eines Vektors ω bei festgehaltenem Anfangspunkt O wird als *lineares Punktgitter* bezeichnet. Es besteht aus Punkten $A_{-n}, \ldots, A_0 = O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ einer Geraden, von denen je zwei aufeinanderfolgende gleichen Abstand haben.

Die Punktmenge $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ wird *ebenes Punktgitter* genannt, und zwar ein *reguläres*, wenn ω_1, ω_2 verschiedene Richtungen haben, wenn also

keine Gleichung $\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 = 0$ besteht, ein *degeneriertes*, wenn das Gegenteil zutrifft. Ein degeneriertes Gitter liegt auf einer Geraden.

Die Punktmenge $\Sigma m_i \omega_i$ heißt ein *räumliches Punktgitter*, und zwar ein *reguläres*, wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nicht in einer Ebene liegen, also keine Relation $\Sigma \alpha_i \omega_i = 0$ besteht, ein *degeneriertes* im entgegengesetzten Fall. Von degenerierten Gittern betrachten wir nur diejenigen, bei denen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nicht in eine Gerade fallen, somit nur *eine* Gleichung (1) besteht. Sie liegen in einer Ebene, nicht aber auf einer Geraden.

3. Zieht man durch O und die Endpunkte O_i der erzeugenden Vektoren ω_i eines degenerierten Gitters Ω parallele Strecken $OO' \parallel O_iO_i'$, die nicht in den Träger, d. h. die Gerade oder Ebene von Ω fallen, so ist Ω die Parallelprojektion des von den Vektoren $\omega_i' = O'O_i'$ erzeugten Gitters Ω', und zwar entsprechen sich die Punkte mit gleichen Koeffizienten m_i. Durch passende Wahl der Punkte $O'O_i'$ läßt sich aber stets erreichen, daß Ω' nicht degeneriert: Ist Ω ein degeneriertes *ebenes* Gitter, so dürfen $O'O_1'O_2'$ nicht in einer Geraden, ist Ω ein degeneriertes *räumliches* Gitter, so dürfen $O'O_1'O_2'O_3'$ nicht in einer Ebene liegen. Ein degeneriertes Gitter ist daher stets Parallelprojektion eines regulären.

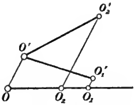


Fig. 1.

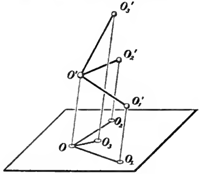


Fig. 2.

4. Die Verbindungsgerade zweier Punkte eines regulären Gitters wird eine *Gittergerade* genannt. Das lineare Gitter kann als Trivialfall außer Betracht bleiben. Eine Gittergerade enthält unendlich viele Punkte des Gitters, die in ihr ein lineares Gitter bilden. Zieht man zu einer Gittergeraden eine Parallele durch einen Punkt des Gitters, so ist diese selbst eine Gittergerade.

Legt man durch drei Punkte eines Raumgitters, die nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene, so heißt diese eine *Gitterebene*. Sie enthält unendlich viele Punkte des Raumgitters, die in ihr ein ebenes Gitter bilden. Legt man zu ihr eine Parallele durch einen Gitterpunkt, so ist auch diese eine Gitterebene.

II. Projektion des Gitters.

5. Projiziert man nunmehr ein reguläres ebenes Gitter Ω' in einer Richtung, die seiner Ebene angehört, auf eine Gerade, so entsteht auf dieser

Digitized by Google

ein degeneriertes ebenes Gitter Ω, und es sind zwei Fälle möglich, jenachdem die Projektionstrahlen Gittergeraden sind oder nicht. Im ersten Fall bilden sie eine Schar äquidistanter Geraden, es ist daher Ω ein lineares Punktgitter. Im zweiten Fall liegen sie dicht, es ist daher auch die Punktmenge Ω dicht.

6. Bei der Projektion eines regulären Raumgitters entstehen drei Fälle: Erstens kann eine Projektionsgerade Gittergerade sein, und dann sind sämtliche Projektionsgeraden Gittergeraden. Der Schnitt des Projektionsbündels ist ein ebenes Punktgitter. Zweitens kann ein Projektionsstrahl, ohne Gittergerade zu sein, in einer Gitterebene liegen. Dann gilt wiederum das Gleiche von allen Projektionsstrahlen. Sie liegen alle in parallelen Gitterebenen E, und diese bilden eine äquidistante Schar, die natürlich nicht dicht ist. In jeder dieser Ebenen bilden die Punkte des Gitters ein ebenes Gitter, in dessen Ebene die Projektionsrichtung fällt, ohne daß die Projektionsstrahlen Gittergerade sind. Es liegen daher die Projektionsstrahlen in den Ebenen E dicht, wie wir in § 5 sahen, und die Projektion des Raumgitters wird als Schnitt des Bündels der Strahlen eine Punktmenge, die auf Geraden einer äquidistanten Schar dicht liegt. — Drittens kann ein Projektionsstrahl weder Gittergerade sein noch auch in einer Gitterebene liegen. Dann ist der Projektionsbündel und mit ihm die Projektion des Gitters selbst dicht.

7. Im dritten Fall ist folgende Eigenschaft des degenerierten Gitters bemerkenswert: *Es liegt auf keiner Geraden dicht.* Wenn PQR drei Punkte des degenerierten Gitters in geradliniger Lage sind, so sind sie Projektionen von Punkten $P'Q'R'$ eines regulären Raumgitters, und diese liegen ebenfalls in einer Geraden, denn andernfalls müßte die Projektionsrichtung in die Gitterebene $P'Q'R'$ fallen. Es gehören somit $P'Q'R'$ und damit PQR je einem linearen Gitter an. Den erzeugenden Vektor des auf PQ gelegenen Gitters wollen wir den *primitiven* Vektor der Geraden PQ nennen. Irgend zwei auf PQ gelegene Punkte haben als Abstand ein Vielfaches des primitiven Vektors.

Man erkennt daraus, daß bei dem degenerierten Raumgitter sich noch der Begriff der Gittergeraden aufrecht erhalten läßt. Eine Gerade in der Ebene des Gitters enthält entweder keinen oder einen oder unendlich viele Punkte des Gitters. Im letzteren Fall bilden diese ein Gitter, und zwar im allgemeinen stets ein lineares, ausgenommen, wenn das Gitter auf einer äquidistanten Geradenschar parallel liegt. Dann enthalten die Geraden dieser Schar degenerierte dichte ebene Gitter.

III. Die Kriterien der Sonderfälle.

8. Um die in § 1 aufgestellten Kriterien zu erhalten, betrachten wir zunächst ein Raumgitter Ω', das in Richtung einer Gittergeraden in das degenerierte Gitter Ω projiziert wird. Der Projektionsstrahl von O' geht durch einen zweiten Punkt P' von Ω', dessen Vektor $\Sigma p_i \omega_i'$ in den Vektor $\Sigma p_i \omega_i$ projiziert wird. Da die Bilder P und O von P' und O' zusammenfallen, folgt

$$\Sigma p_i \omega_i = 0, \tag{4}$$

d. h. die Relation (1) läßt sich ganzzahlig schreiben. Und umgekehrt sagt sie, ganzzahlig geschrieben, aus, daß zwei Punkte von Ω' dasselbe Bild haben.

9. Fällt der Projektionsstrahl von O' in die Gitterebene $O'P'Q'$, wobei $P'Q'$ mit O' nicht in einer Geraden liegen, so fallen die Bilder OPQ in eine Gerade. Von den Vektoren $OP = \Sigma p_i \omega_i$ und $OQ = \Sigma q_i \omega_i$ ist also der eine ein reelles Vielfaches des andern:

$$(5) \qquad \lambda \Sigma p_i \omega_i + \mu \Sigma q_i \omega_i = 0.$$

Da nur *eine* reelle Gleichung zwischen den ω_i besteht, (1), so folgt

$$\lambda p_i + \mu q_i = \nu \alpha_i,$$

und nach Elimination von λ, μ, ν:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & \alpha_1 \\ p_2 & q_2 & \alpha_2 \\ p_3 & q_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \Sigma a_i \alpha_i = 0.$$

Die Koeffizienten a_i verschwinden nicht gleichzeitig, da alsdann $O'P'Q'$ in einer Geraden lägen. Besteht umgekehrt die Gleichung (3) und ist α_3 von Nnll verschieden, so folgt durch Elimination von α_3 aus (1) und (3):

$$\alpha_1(a_3\omega_1 - a_1\omega_3) + \alpha_2(a_3\omega_2 - a_2\omega_3) = 0.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall von (5). Die Bedingung (3) ist also notwendig und *hinreichend* dafür, daß jeder Projektionsstrahl in einer Gitterebene liegt.

IV. Nirgends dichter Projektionsbüschel.

10. Den Vorteil der bisherigen Betrachtung sehe ich in der einfachen geometrischen Deutung der *Kriterien* und in dem heuristischen Wert einer solchen Auslegung. Dagegen ist der Hinweis auf die geometrische Anschauung in Abschnitt II natürlich ein minderwertiger Ersatz für eine wirkliche Herleitung der *Dichtigkeitsverhältnisse*. Diesen Hinweis durch einen exakten Beweis zu ersetzen ist das Ziel der weiteren Betrachtungen.

Wir beginnen mit dem Satz, daß die Schar aller zu einer gegebenen parallelen Gittergeraden nicht dicht ist. Daß sie äquidistant sein muß, folgt ohne weiteres daraus und aus der Eigenschaft des Gitters, bei Verschiebungen um einen seiner Vektoren sich selbst zu decken.

11. Aus der Erzeugung des Gitters folgt, daß ein reguläres Gitter seinen Träger (Gerade, Ebene, Raum) in kongruente Gebietsteile (Strecken, Parallelogramme, Parallelflache) zerlegt. Innerhalb eines endlichen Gebietsteiles liegen darum nur endlich viele Gitterpunkte, d. h. ein reguläres Gitter hat keine Verdichtungsstellen im Endlichen. Sind insbesondere U, V zwei Punkte auf der Geraden eines linearen Gitters $m\omega$, deren Abstand gleich $|\omega|$ ist, so liegt zwischen ihnen ein Gitterpunkt, sofern sie nicht selbst Gitterpunkte sind. Und sind in der Ebene eines ebenen Gitters $UV = \omega_1$, $UW = \omega_2$ zwei von U ausgehende, den erzeugenden Vektoren gleiche Vektoren, so liegt innerhalb des Parallelogramms $UVWZ$, das durch die Vervollständigung von UVW entsteht $(VZ = \omega_2,\ WZ = \omega_1)$, ein Gitter-

punkt P, falls nicht eine der Geraden UV oder UW Gittergerade ist. Dann kann P auch auf der Begrenzung liegen.

12. Es seien nun PQR drei Punkte eines ebenen Gitters, die nicht in einer Geraden liegen. Zwischen P und Q sowohl wie zwischen P und R liege kein weiterer Gitterpunkt. Wir ergänzen durch $RS \parallel PQ$, $QS \parallel PR$ die Figur zu einem Parallelogramm. Liegt in diesem noch ein Gitterpunkt, so gibt es zwischen PQ und RS noch eine Gittergerade, und umgekehrt. Unter allen Gitterpunkten im Inneren des Parallelogramms $PQRS$ gibt es, da ihre Anzahl endlich ist, einen, der am nächsten an PQ liegt, und kein anderer kann gleichen Abstand haben, da sonst gegen die Annahme auch zwischen P, Q noch ein Gitterpunkt liegen müßte. Dieser Punkt heiße T. Man ziehe $TU \parallel PQ$, $QU \parallel PT$, so liegt innerhalb $PTUQ$ kein Gitterpunkt mehr und zwischen TU und PQ gibt es keine Gittergerade mehr.

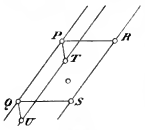


Fig. 3.

Analog beweist man, daß es zu jeder Gitterebene auf jeder Seite eine nächste gibt. Von hier aus folgt mühelos, daß der Projektionsstrahlenbüschel, sofern er aus Gittergeraden besteht, nirgends dicht liegt.

V. In sich dichter Projektionsbüschel.

13. Wir denken uns nunmehr ein reguläres ebenes Gitter in einer Richtung projiziert, die seiner Ebene angehört, aber keiner Gittergeraden zukommt. PU, QV seien zwei Projektionsstrahlen, die die Punkte P, Q des Gitters projizieren; es soll gezeigt werden, daß zwischen ihnen ein dritter Projektionsstrahl liegen muß. Indem wir von einem Trivialfall sogleich absehen, nehmen wir an, es liege zwischen P und Q auf PQ kein Gitterpunkt mehr, ziehen sodann durch einen nicht auf PQ gelegenen Gitterpunkt S die zu PQ parallele Gittergerade, die PU und QV in U und V schneiden möge. Da U, V keine Gitterpunkte sind, liegt zwischen ihnen ein Punkt R des auf SUV gelegenen Lineargitters; dessen Projektionsstrahl fällt daher zwischen PU und QV.

14. Es seien PQR drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte eines regulären Raumgitters; wir ziehen $QS \parallel PR$, $RS \parallel PQ$, so ist auch S ein Gitterpunkt. Projizieren wir in einer Richtung, die keiner Gittergeraden zukommt und in keiner Gitterebene enthalten ist; wählen wir ferner einen nicht in der Ebene PQR enthaltenen Gitterpunkt M und legen durch ihn die zu PQR parallele Gitterebene, die die Projektionsstrahlen von $PQRS$ in $UVWZ$ schneiden möge. Im Parallelogramm $UVWZ$ liegt ein Gitterpunkt T, und zwar nicht auf der Begrenzung und auch auf keiner Diagonale, da sonst durch die Projektionsstrahlen Gitterebenen gingen.

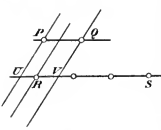


Fig. 4

Er liegt daher entweder im Dreieck UVW und sein Projektionsstrahl fällt zwischen die Strahlen von PQR, oder er liegt in VWZ. In diesem Fall ziehen wir $PT' \parallel ST$, $QT' \parallel RT$, zum Überfluß noch $RT' \parallel QT$, $ST' \parallel PT$.

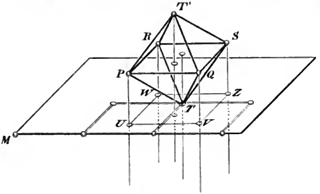


Fig. 5.

Diese vier Strahlen laufen durch denselben Gitterpunkt T', dessen Projektionsstrahl aus Symmetriegründen zwischen PQR hindurchgeht.

Der Projektionsbüschel eines regulären Gitters und *damit die degenerierte Projektion eines Gitters ist daher im allgemeinen Fall in sich dicht.*

VI. Relative Dichte.

15. Es könnte scheinen, als hätten wir hiermit die Dichtigkeitsverhältnisse des degenerierten Gitters im allgemeinen Fall vollständig beschrieben. Dies trifft aber nicht zu, wie folgendes einfache Beispiel zeigen möge: Die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 und zwischen 2 und 3, die Grenzen ausgeschlossen, ist in sich dicht, denn zwischen irgend zweien von ihnen liegt noch immer eine dritte. Trotzdem besitzt sie nicht die Eigenschaft unseres degenerierten ebenen Gitters, die *ganze* Zahlengerade *dicht* zu überdecken. Das was wir zu zeigen haben, ist vielmehr folgendes: zwischen *irgend zwei* Punkten auf der Geraden eines degenerierten ebenen Gitters, *auch wenn sie nicht dem Gitter angehören*, liegt stets ein Punkt des Gitters. Man sagt dafür, das Gitter liege *relativ dicht* zu den Punkten seines Trägers. Diese Unterscheidung zwischen relativ dichten und in sich dichten Punktmengen kommt bei der arithmetischen Behandlung nicht so klar zum Ausdruck.

16. Um die Frage zum Abschluß zu bringen, haben wir zu zeigen, daß ein degeneriertes ebenes Gitter beliebig kleine Vektoren enthält, d. h. daß sich zwei Punkte PQ so bestimmen lassen, daß die Strecke PQ absolut genommen kleiner ist, als eine vorgeschriebene Strecke δ. Indem wir dann den Vektor $PQ = \bar{\omega}$ von O aus nach beiden Seiten auf dem Träger wiederholt abtragen, gelingt es nach dem archimedischen Axiom, zwischen irgend zwei Punkte U, V der Geraden, deren Abstand nicht kleiner als δ ist, einen Gitterpunkt zu legen.

Digitized by Google

Da das Gitter in sich dicht ist, liegt zwischen zwei Punkten A, B des Gitters eine (abzählbar) unendliche Menge von Gitterpunkten, es gibt also mindestens eine Verdichtungsstelle zwischen A, B und damit beliebig kleine Vektoren. Elementar würde sich das folgendermaßen ausführen lassen: Man trage die vorgeschriebene Strecke δ von A aus nach B hin so oft ab, bis man sicher ist, B überschritten zu haben. Dies sei nach n-maligem Abtragen erreicht. Sodann wähle man zwischen A, B einen Punkt C_1 des Gitters, zwischen A und C_1 einen neuen C_2, ebenso C_3 zwischen C_1 und B, C_4 zwischen A und C_2, C_5 zwischen C_2 und C_1, C_6 zwischen C_1 und C_3 und so fort; das Verfahren kann auch anders vorgeschrieben sein, nur muß es gewiß sein, daß stets neue Punkte gewählt werden. Nach Auswahl von $n+1$ Punkten müssen notwendigerweise zwei darunter sein, deren Abstand kleiner als δ geworden ist.

17. Analog beweisen wir zunächst, daß es im degenerierten Raumgitter im allgemeinen Fall einen Vektor gibt, der absolut genommen kleiner ist, als eine vorgeschriebene Zahl δ. Seien PQR drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte des Gitters, r der Radius eines Kreises, der PQR ganz in seinem Innern enthält, etwa des Umkreises, n eine ganze Zahl, für die $n\delta > 2r$. Teilt man die drei Seiten des Dreiecks PQR in je n gleiche Teile und verbindet diese durch Parallelen zu den Seiten, so zerfällt PQR in $\frac{1}{2}n(n+1)$ kongruente Dreieckchen, deren jedes innerhalb eines Kreises vom Durchmesser δ Platz hat. Indem man nun in PQR einen Punkt S des Gitters, in den Dreiecken PSQ, QSR, RSP wiederum je einen Gitterpunkt wählt und das Verfahren fortsetzt, findet man nach Auswahl von höchstens $\frac{1}{2}(n+1)n+1$ Punkten zwei, deren Abstand kleiner als δ ist.

18. Die beiden Gitterpunkte mögen M, N heißen. Der primitive Vektor $\bar{\omega}_1$ der Geraden MN ist höchstens gleich MN, also sicher absolut kleiner als δ. Wir bestimmen nun nach dem Verfahren des § 17 einen zweiten Vektor $\bar{\omega}_2$ des Gitters, primitiv oder nicht, der absolut kleiner als $\bar{\omega}_1$ ist; er kann nicht mit $\bar{\omega}_1$ gleichgerichtet sein, da sonst $\bar{\omega}_1$ nicht primitiv wäre. Die Vektoren $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ bilden daher ein Gitterparallelogramm, dessen Dimensionen beliebig klein vorgeschrieben werden können: die größte Diagonale kann 2δ nicht überschreiten. Überzieht man darum die ganze Ebene mit dem Gitter $m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2$, welches ein Teilgitter von Ω ist, so fällt ins Innere jedes Kreises vom Radius δ mindestens ein Punkt. Daraus folgt als nahezu selbstverständlich, daß in jedem noch so kleinen Dreieck UVW der Gitterebene ein Gitterpunkt von Ω liegt, d. h. das Gitter Ω ist zu der Menge aller Punkte seiner Ebene relativ dicht.

Grunewald, März 1906.

Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen.

Von Otto Meißner.

1. Wenn ein Beobachter bei Ablesung einer Skala Zehntel der Skalenteile oder bei irgendwelchen Zeitbestimmungen, etwa Sterndurchgängen, Zehntelsekunden schätzt, so sollten eigentlich in einer großen Beobachtungsreihe alle Zehntel nahezu gleich häufig auftreten. Dies ist jedoch durchaus

Google

nicht der Fall, die Abweichungen sind sehr groß, aber völlig individuell; auch variieren sie bei einer und derselben Person im Laufe der Zeit, und zwar tritt fast immer eine stärkere Bevorzugung einzelner Zehntel, d. h. also eine Verschlechterung der Genauigkeit, ein. Dies mag an ein paar Beispielen erläutert werden.

2. Die folgenden Zehntelschätzungen sind Ablesungen an einer Millimeterskala, im ganzen 12 590 Einzelwerte.

Zehntel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit %	**20.15**	10.92	8.84	6.78	*6.57*	11.82	7.13	7.08	10.01	10.88
Unsicherheit %	0.54	0.49	0.28	0.26	0.32	0.39	0.30	0.26	0.30	0.37
Dispersion[1])	1.6	1.5	0.8	1.0	1.3	1.1	1.2	1.0	1.0	1.2

Unter Berücksichtigung der nach den Grundsätzen der Ausgleichungsrechnung ermittelten Unsicherheiten kann man sagen, daß die Zehntel 3, 4, 6 und 7 in gleicher Weise zu selten geschätzt werden, 7 % statt 10 %. Das Überwiegen der Null erklärt sich wohl aus der Vernachlässigung der Dicke des Teilstrichs, die nämlich im vorliegenden Falle nahezu 0.1 war, also $\frac{1}{10}$ des Intervalles betrug. Das sekundäre Maximum bei 5 rührt nicht etwa daher, daß die 5 eine besonders „bequeme“ Zahl ist, sondern vielleicht daher, daß die Kurve, deren Mitte abzuschätzen war, oft eine beträchtliche Dicke besaß. — Man findet aus den obigen Zahlen, daß die geschätzten Zehntel sich folgendermaßen über das Intervall eines Skalenteils verteilen:

Geschätzt	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
wirklich	0.000	0.154	0.254	0.302	0.369	0.491	0.585	0.656	0.741	0.846

3. Das nun folgende Material sind Schätzungen von Zehntelzeitsekunden, ausgeführt am Fernrohr. Der Beobachter war stets derselbe, zwischen II und III liegen $2\frac{3}{4}$ Jahre nicht ausgezählte Beobachtungen.

I. 2119 Schätzungen.

Zehntel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit %	**18.3**	5.4	*4.6*	8.1	14.9	12.3	9.1	7.9	8.7	10.9

II. 2026 Schätzungen.

Zehntel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit %	**17.6**	*3.6*	6.4	10.6	15.0	11.6	8.4	8.5	8.9	9.5

III. 2196 Schätzungen.

Zehntel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit %	**29.5**	*3.5*	4.4	7.4	13.7	10.0	11.1	8.7	5.6	6.1

1) Über den Begriff der „Dispersion“ vgl. von Bortkewitsch, Das Gesetz der kleinen Zahlen; Teubner, Leipzig. — Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw.; Teubner, Leipzig 1903, S. 312 f. — Eingeführt ist der Begriff von W. Lexis.

IV. 2164 Schätzungen.

Zehntel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit %	**20.5**	*3.1*	3.7	11.4	16.8	10.9	12.8	10.8	5.2	4.8

Wie ersichtlich, ist auch hier die Null entschieden, und in ziemlich konstanter Weise bevorzugt. Auch die geringe Häufigkeit der 1 und 2 hält während der ganzen Beobachtungsperiode (die einen Zeitraum von etwa 6 Jahren umfaßt) ziemlich gleichmäßig an, ebenso die auffallende Häufigkeit der 4. Während der Beobachter aber die letzten 4 Zehntel zu Beginn der Periode fast gleich häufig schätzte, bevorzugte er zuletzt die 6 und 7 gegenüber der 8 und 9 in erheblichem Maße. Die Genauigkeit der Schätzungen hat sich also im Laufe der Zeit nicht erhöht. Bei I und IV entsprechen die geschätzten den wirklichen Zehntelsekunden in folgender Weise:

Geschätzt	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Wirklich I	0.000	0.118	0.168	0.231	0.347	0.483	0.590	0.675	0.758	0.854
Wirklich IV	0.000	0.117	0.152	0.228	0.369	0.507	0.626	0.744	0.824	0.874

4. Um zu prüfen, ob und wieweit die Schwankungen der Häufigkeit der einzelnen Zehntel den Charakter der Zufälligkeit tragen, habe ich verschiedene Reihen, jedoch andere als die oben angeführten, in Gruppen von je etwa 200 Schätzungen geteilt, für jede Gruppe die Häufigkeit der verschiedenen Zehntel berechnet, die Summe der Quadrate der Abweichungen vom Mittel gebildet, und hieraus in bekannter Weise die mittlere Abweichung oder Unsicherheit des errechneten Häufigkeitswertes der einzelnen Zehntel gefunden. Diese schwankte bei einer Gesamtzahl von 12 000 Schätzungen für die einzelnen Zehntel um 0.3 %. Die Division einer berechneten mittleren Abweichung einer Größe durch diejenige, die man nach dem Umfang des Materials und der Wahrscheinlichkeit der Größe theoretisch zu erwarten hätte, ergibt nach Lexis die Dispersion. Ist dieser Quotient > 1, die Unsicherheit also bedeutender als zu erwarten wäre, so nennt man die Dispersion übernormal; in den berechneten Fällen war sie fast stets normal, nahezu $= 1$, nur bei starker Bevorzugung der 0 übernormal (bis zu 5!), was andeutet, daß der betreffende Beobachter in der Nähe der 0 sehr ungleich genau geschätzt hat: einmal hat er sehr häufig 0 geschätzt, das nächste Mal dafür um so weniger, ein nicht empfehlenswertes Verfahren, da der Genauigkeitsgrad dadurch niemals erhöht, sondern fast stets herabgesetzt wird.

Potsdam, 29. April 1906.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY,
BERKELEY

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

Books not returned on time are subject to a fine of 50c per volume after the third day overdue, increasing to $1.00 per volume after the sixth day. Books not in demand may be renewed if application is made before expiration of loan period.

AUG 21 1930

MAY 23 1975 X

REC'D AHC DEC 17

JAN 26 1989

AUTO DISC NOV 28

Due end of SPRING Semester
Subject to recall after →

FEB 18 1991

50m-7,'29

Digitized by Google

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C006723414

Digitized by Google